CHAPITRE 8
GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

PARTIE 8.1 : MODES DE REPÉRAGE DANS L'ESPACE

8.1.1 : Présentation et structure

⊙ On suppose ici connues les propriétés de base de l'espace $\mathcal{E}$ ainsi que la notion de **distance** et d'**angle**.

$\mathcal{E}$ est un ensemble de **points** mais comme deux points définissent un **vecteur**, on a donc naturellement un ensemble de vecteurs aussi appelé espace mais qu'on note E (la notion de **norme** est donc supposée acquise).

⊙ On dispose sur cet ensemble E de vecteurs de deux lois :
- l'une consiste à prendre deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et à construire leur somme notée $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ (**loi interne**),
- l'autre consiste à prendre un réel λ (appelé **scalaire**) et un vecteur $\overrightarrow{v}$ et à construire le vecteur $\lambda.\overrightarrow{v}$ (celle-ci est une **loi externe** car elle mélange les scalaires et les vecteurs).

⊙ On dispose entre les ensembles $\mathcal{E}$ et E d'une somme qui associe à un point $A \in \mathcal{E}$ et un vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathsf{E}$ un point $B = A + \overrightarrow{v}$ (translaté de vecteur $\overrightarrow{v}$ à partir du point A). Cet unique vecteur $\overrightarrow{v}$ est noté $\overrightarrow{AB}$.

<u>REMARQUE 8.1</u> :
- *L'ensemble E des vecteurs de l'espace a une structure d'**espace vectoriel** !*
- *L'ensemble $\mathcal{E}$ a une structure d'**espace affine** sur E !*
- *Si $\overrightarrow{v} \in \mathsf{E}$, l'application $t_{\overrightarrow{v}}$ qui va de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ et qui associe à tout point A le point $B = A + \overrightarrow{v}$ (donc tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$) est la **translation** de vecteur $\overrightarrow{v}$.*
- *L'ensemble T des translations a une structure de **groupe** pour la composition !*
- *Pour $O \in \mathcal{E}$ fixé, l'application de E dans $\mathcal{E}$ qui à un vecteur $\overrightarrow{v}$ associe le point $O+\overrightarrow{v}$ est une bijection ce qui permet d'identifier les points et les vecteurs si on fixe une origine O dans $\mathcal{E}$.*

Définition 8.1

*Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E sont **colinéaires** si $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$.*

<u>REMARQUE 8.2</u> : Attention : "$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires" n'est pas équivalent à $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

8.1.2 : Repères cartésiens et orientation de l'espace

Définition 8.2

*Un **repère cartésien** de $\mathcal{E}$ est la donnée d'un quadruplet $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ où $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires donc forment une **base** de E ; O est appelé l'**origine** du repère.*

*Les trois droites passant par O et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont appelées **axes du repère** et notées respectivement (Ox), (Oy) et (Oz).*

<u>REMARQUE 8.3</u> :
- *On construit géométriquement (par les projections), pour un point M du plan $\mathcal{E}$, trois réels x, y et z tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$.*
- *Ce triplet est unique grâce à la non coplanarité des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.*

Définition 8.3

Pour un point $M \in \mathcal{E}$ *et un repère* $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, *on a donc* $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$ *pour un unique triplet* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *qui est appelé* **coordonnées** *de* M *dans le repère* $\mathcal{R}$*. On note* $M(x, y, z)_{\mathcal{R}}$*.*

Pour un vecteur $\overrightarrow{a} \in E$*, l'unique triplet* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$ *est appelé coordonnées de* $\overrightarrow{a}$ *dans la base* $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$*. On note* $\overrightarrow{a}(x, y, z)_{\mathcal{B}}$*.*

REMARQUE 8.4 : On peut être plus précis sur les bases (de E*) ou les repères (de* $\mathcal{E}$*) et définir des bases ou des repères* **orthogonaux** *ou* **orthonormaux**.

Proposition 8.1

Si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ont pour coordonnées $\overrightarrow{a}(x, y, z)_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{b}(x', y', z')_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, alors, on a les coordonnées $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}(x + x', y + y', z + z')_{\mathcal{B}}$ et $\lambda\overrightarrow{a}(\lambda x, \lambda y, \lambda z)_{\mathcal{B}}$.

REMARQUE 8.5 : Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ *est préférable pour parler d'un tétraèdre* $ABCD$ *non aplati.*

Proposition 8.2

On se donne deux repères $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}')$ tels que $O' = (a, b, c)_{\mathcal{R}}$, $\overrightarrow{u}' = (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}}$, $\overrightarrow{v}' = (\alpha', \beta', \gamma')_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{w}' = (\alpha'', \beta'', \gamma'')_{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Alors si un point $M \in \mathcal{E}$ a pour coordonnées $M(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ et $M(x', y', z')_{\mathcal{R}'}$, on a :

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \\ y &= b + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \\ z &= c + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' \end{aligned}$$

⊙ On passe d'un repère orthonormal à un autre en effectuant un **déplacement** (translation, **rotation**, **vissage**) ou un **anti-déplacement** (composée d'une **réflexion** (symétrie orthogonale par rapport à une droite) et d'un déplacement). On dit alors que deux repères (ou deux bases) ont même orientation si on passe de l'un à l'autre par un déplacement.

Orienter l'espace : c'est choisir une base orthonormale de référence ; les bases **directes** seront alors celles qui ont même orientation que celle-ci, les autres seront appelées **indirectes**.

Traditionnellement en maths, on choisit comme sens direct le sens donné par la **règle du bonhomme d'**AMPÈRE (André-Marie AMPÈRE : mathématicien et physicien français 1775-1836) : il regarde $\overrightarrow{\imath}$ et est traversé pas $\overrightarrow{k}$ des pieds à la tête alors il a $\overrightarrow{\jmath}$ à sa gauche, par la règle du tire-bouchon ou des doigts de la main droite (pouce sur $\overrightarrow{\imath}$, index sur $\overrightarrow{\jmath}$ et majeur sur $\overrightarrow{k}$).

REMARQUE 8.6 :

- *Si on se donne un plan* P *de* E *qu'on oriente en choisissant deux vecteurs* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *qui constituent une base orthonormée directe de* P*, alors cela induit une orientation de la droite* D *orthogonale à* P *: on dit qu'un vecteur unitaire* $\overrightarrow{w}$ *oriente* D *si* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est une bond de* E*.*
- *Si on se donne une droite* D *de* E *qu'on oriente en choisissant un vecteur* $\overrightarrow{w}$ *unitaire pour donner la direction de cette droite, alors on a encore une* **orientation induite** *mais cette fois-ci de* P *de la manière suivante : on dit qu'une base orthonormée* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *de* P *est directe si* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est une bond de* E*.*

8.1.3 : Autres coordonnées de l'espace

⊙ On se donne dans ce paragraphe un rond $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ de $\mathcal{E}$.

Définition 8.4

On dit qu'un point M *de l'espace* $\mathcal{E}$ *admet pour* **coordonnées cylindriques** (r, φ, z) *si le projeté* H *de* M *sur le plan* (xOy) *(muni de l'orientation induite par* $\overrightarrow{k}$*) admet pour coordonnées polaires* (r, φ) *et si* $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_\varphi} + z\overrightarrow{k}$ *avec* $\overrightarrow{u_\varphi} = \cos(\varphi)\overrightarrow{\imath} + \sin(\varphi)\overrightarrow{\jmath}$*.*

REMARQUE 8.7 : Un point $M(x,y,z)_{\mathcal{R}}$ admet pour coordonnées cylindriques (r,φ,z') si et seulement si $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$ et $z' = z$.

Définition 8.5

On dit qu'un point M de l'espace $\mathcal{E}$ admet pour **coordonnées sphériques** *(r,θ,φ) si $r = OM$, θ est l'écart angulaire entre $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{OM}$, $\varphi = (\overrightarrow{i},\overrightarrow{OH})$ où H est le projeté de M sur le plan (xOy) (muni de l'orientation induite par $\overrightarrow{k}$).*

REMARQUE 8.8 :

- *Un point $M(x,y,z)_{\mathcal{R}}$ admet pour coordonnées sphériques (r,θ,φ) si et seulement si $x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$ et $z = r\cos(\theta)$.*
- *La* **colatitude** *de M est l'angle $\theta \in [0;\pi]$, la* **latitude** *est $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et la* **longitude** *est $\varphi \in [0;2\pi[$, les* **méridiens** *sont les lignes de niveaux $\varphi = \varphi_0$ et $R = R_0 > 0$ et les* **parallèles** *sont les lignes de niveaux $\theta = \theta_0$ et $R = R_0 > 0$.*

EXEMPLE 8.1 : Les coordonnées sphériques de Bordeaux sont environ $\left(R,\frac{\pi}{4},0\right)$ sur la terre où R est le rayon de la terre, l'axe (Oz) est orienté par l'axe des pôles (sud-nord) et où l'origine des longitudes est le méridien de Greenwich.

PARTIE 8.2 : PRODUITS SCALAIRE, VECTORIEL ET MIXTE (DÉTERMINANT)

8.2.1 : Définition et propriétés du produit scalaire

⊙ Si on se donne un vecteur $\overrightarrow{a}(x,y,z)_{\mathcal{B}}$ dans une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ orthonormale, alors par PYTHAGORE (appliqué deux fois), on a : $||\overrightarrow{a}||^2 = ||x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}||^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Définition 8.6

On se donne deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E, on définit alors le **produit scalaire** *de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$ ou $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, par :*

- *$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si l'un des deux vecteurs est nul.*
- *$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\cos(\theta)$ sinon (où θ est l'écart angulaire entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$).*

REMARQUE 8.9 :

- *Cette définition du produit scalaire ne dépend pas de l'orientation choisie dans l'espace et ça prolonge la définition vue dans le plan (le cosinus est une fonction paire et l'angle n'est pas orienté).*
- *Ce produit scalaire vérifie les mêmes propriétés de base que dans le plan ; si $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in E^2$ alors :*
  - *$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$, $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leqslant ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$ et $\big|||\overrightarrow{u}|| - ||\overrightarrow{v}||\big| \leqslant ||\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}||$.*
  - *$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.*
  - *$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires de même sens $\iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||$.*
  - *$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires de sens contraire $\iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||$.*
- *On retrouve aussi l'interprétation géométrique avec les projections orthogonales $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) puisque tel est le cas dans le plan $(ABC$ ici).*

Proposition 8.3

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, on a :

- $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$.
- $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$.
- $||\vec{u}+\vec{v}||^2 + ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 2(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2)$ **(identité du parallélogramme).**
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$ **(identité de polarisation).**

<u>DÉMONSTRATION</u> : Les deux dernières se déduisent des deux premières comme dans le plan.
Que ces deux vecteurs soient colinéaires ou pas, il existe au moins un plan P qui les contient, dans celui-ci les relations sont vraies d'après le chapitre 1, or le produit scalaire de l'espace prolonge celui du plan.

Théorème 8.1

Le produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, ce qui se traduit par les relations :

- $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2,\ \vec{u}.\vec{v} \in \mathbb{R}$ **(forme).**
- $\forall\vec{u} \in E,\ \vec{u}.\vec{u} \geqslant 0$ **(positive).**
- $\forall\vec{u} \in E,\ \vec{u}.\vec{u} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ **(définie).**
- $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2,\ \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ **(symétrique).**
- $\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in E^3,\ \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}).\vec{w} = \lambda\vec{u}.\vec{w} + \mu\vec{v}.\vec{w}$ **(linéaire en la première variable) et** $\vec{u}.(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \lambda\vec{u}.\vec{v} + \mu\vec{u}.\vec{w}$ **(linéaire en la seconde variable).**

De plus, si $\vec{u}(x,y,z)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}(x',y',z')_{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est une base orthonormée de E :

- $x = \vec{u}.\vec{\imath}$, $y = \vec{u}.\vec{\jmath}$, $z = \vec{u}.\vec{k}$; $x' = \vec{v}.\vec{\imath}$, $y' = \vec{v}.\vec{\jmath}$ **et** $z' = \vec{v}.\vec{k}$.
- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$, $||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ **et** $||\vec{v}||^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.

8.2.2 : Définition et propriétés du produit vectoriel

Définition 8.7

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, on définit alors le **produit vectoriel** *de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, par :*

- $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$ *si les deux vecteurs sont colinéaires.*
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\sin(\theta)\vec{k}$ *sinon (où $\theta \in [0,\pi]$ est l'écart angulaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire qui oriente la droite orthogonale au plan orienté* $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ *avec $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ direct)).*

<u>REMARQUE 8.10</u> : Il est clair avec cette définition qu'avec ces notations,on a :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$.

Proposition 8.4

Avec les notations précédentes $||\vec{u}\wedge\vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\sin(\theta)$ est l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

<u>REMARQUE 8.11</u> :

- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est directe par construction, mais elle n'a aucune raison d'être orthonormée en général.*
- *Par contre si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et normés, la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est orthonormale directe.*
- *Échanger les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ revient à changer $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ alors que θ n'est pas modifié, ainsi le produit vectoriel est antisymétrique.*

REMARQUE 8.12 :

• *Soit un vecteur* $\overrightarrow{u} \in E$ *non nul et* $\varphi : E \to E$ *par :* $\forall \overrightarrow{a} \in E,\ \varphi(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{a}$. *Pour simplifier, identifions les vecteurs à leurs coordonnées dans une bond* $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0, \overrightarrow{w}_0)$ *où* $\overrightarrow{u}_0 = \dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$.

• *Par construction du produit vectoriel, on vérifie que* $\varphi = h \circ r \circ p$ *où* $p : E \to E$, $r : E \to E$ *et* $h : E \to E$ *sont définies par :* $\forall \overrightarrow{a}(x,y,z)_{\mathcal{B}} \in E,\ p(x,y,z) = (0,y,z)$ *(*p *est la projection orthogonale sur le plan orthogonal à* $\overrightarrow{u}$*),* $r(x,y,z) = (x,-z,y)$ *(*r *est la rotation autour de l'axe orienté par* $\overrightarrow{u}$ *et d'angle* $\pi/2$*) et* $h(x,y,z) = ||\overrightarrow{u}||(x,y,z)$ *(*h *est l'homothétie de rapport* $||\overrightarrow{u}||$*).*

Théorème 8.2

Le produit vectoriel est une application bilinéaire, antisymétrique et alternée, ce qui se traduit par les relations :

- $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$ **(antisymétrique).**
- $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \mu \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ **(linéaire en la première variable) et** $\overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{w}) = \lambda \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$ **(linéaire en la seconde).**
- $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ **(alternée).**

Si $\overrightarrow{u}(x,y,z)_{\mathcal{B}}$ **et** $\overrightarrow{v}(x',y',z')_{\mathcal{B}}$ **où** $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ **est une base orthonormée directe de** E **:**

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y)_{\mathcal{B}}.$$

REMARQUE 8.13 : On présente traditionnellement les vecteurs en colonnes et on dispose alors d'un moyen graphique classique de retenir cette formule du produit vectoriel dans une bond.

Proposition 8.5

Double produit vectoriel : $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$ **:**

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}.$$

8.2.3 : Définition et propriétés du produit mixte

Définition 8.8

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$*, on définit le* **produit mixte** *de ces trois vecteurs (ou leur* **Déterminant***), qu'on note* $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$*, c'est* $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$ *; on peut aussi le noter* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$*.*

Théorème 8.3

Si $\overrightarrow{u}(x,y,z)_{\mathcal{B}}$, $\overrightarrow{v}(x',y',z')_{\mathcal{B}}$, $\overrightarrow{w}(x'',y'',z'')_{\mathcal{B}}$ **où** $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ **est une base orthonormée directe de** E**, alors on a la magnifique formule :**

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z.$$

On en déduit que l'application $\mathrm{Det} : E^3 \to \mathbb{R}$ **est trilinéaire, alternée, antisymétrique, soit :**

- $\mathrm{Det}(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda_1 \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \lambda_2 \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ **(lin. en variable 1).**
- $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{w}) = \lambda_1 \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{w}) + \lambda_2 \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{w})$ **(lin. en variable 2).**
- $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda_1 \overrightarrow{w}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{w}_2) = \lambda_1 \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_1) + \lambda_2 \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_2)$ **(lin. en variable 3).**
- $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -\mathrm{Det}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = -\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = -\mathrm{Det}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ **(antisymétrie).**
- $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 0$ **(alternance).**

quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w}_1$, $\overrightarrow{w}_2$ **et les réels** λ_1, λ_2.

On sait même que le déterminant est circulaire, à savoir qu'avec les mêmes vecteurs, on a la relation : $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

REMARQUE 8.14 : On ne retient cette formule développée que graphiquement grâce à la **règle de** SARRUS *(Pierre Frédéric* SARRUS *: mathématicien français 1798-1861).*

Proposition 8.6

Si $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in E^2$, on a : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ coplanaires $\Longleftrightarrow$ $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ et donc en passant aux négations : $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ base de E $\Longleftrightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$.

Proposition 8.7

Si $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in E^2$, $\big|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\big|$ est le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs.

REMARQUE 8.15 : (HP) Comme dans le plan, et même si ça n'est au programme que du chapitre 24, on peut définir le déterminant d'un système de trois vecteurs dans une base quelconque de l'espace E ; on se donne donc une base $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de E et des vecteurs $\vec{u}(x,y,z)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v}(x',y',z')_{\mathcal{B}}$, $\vec{w}(x'',y'',z'')_{\mathcal{B}}$, on définit alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z''+x'y''z+x''yz'-xy''z'-x'yz''-x''y'z$ qui n'a plus rien de géométrique a priori. Par un calcul similaire à celui effectué dans le plan, on montre grâce aux propriétés du produit mixte que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \times [\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}]$ et comme $[\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}] \neq 0$ car $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est une base de E, on récupère : $\begin{cases} (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0, \\ \vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ coplanaires} \iff \det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0. \end{cases}$

PARTIE 8.3 : DROITES ET PLANS

8.3.1 : Différentes définitions et représentations d'un plan

⊙ On définit un **plan** par un point et deux vecteurs l'engendrant (non colinéaires donc), ou par deux points distincts et un vecteur non colinéaires à $\overrightarrow{AB}$, ou par trois points non alignés ou enfin par un point et un vecteur normal. On a 2 types de représentations des plans : **paramétrique** ou **cartésienne**.

Proposition 8.8

Soit $\mathcal{R}=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère quelconque de $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ la base correspondante et $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(x_0,y_0,z_0)_{\mathcal{R}}$ et de vecteurs "générateurs" $\vec{a}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{b}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)_{\mathcal{B}}$. Alors une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est :

$$M(x,y,z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = & x_0+\lambda\alpha_1+\mu\beta_1 \\ y = & y_0+\lambda\alpha_2+\mu\beta_2 \\ z = & z_0+\lambda\alpha_3+\mu\beta_3 \end{cases}$$

EXEMPLE 8.2 : Une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1,2,3)_{\mathcal{R}}$ (dans un repère $\mathcal{R}$ quelconque) et engendré par les vecteurs $\vec{u}(1,1,1)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}(1,-1,1)_{\mathcal{B}}$ est $\begin{cases} x = & 1+\lambda+\mu \\ y = & 2+\lambda-\mu \\ z = & 3+\lambda+\mu \end{cases}$ mais aussi $\begin{cases} x = & \lambda \\ y = & \mu \\ z = & 2+\lambda \end{cases}$ (avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$) car il passe par le point $B=(0,0,2)_{\mathcal{R}}$ et est engendré par les vecteurs $\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})(1,0,1)_{\mathcal{B}}$ et $\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})(0,1,0)_{\mathcal{B}}$.

Proposition 8.9

Avec les mêmes notations, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est :

$$M(x,y,z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)(x-x_0)+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)(y-y_0)+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(z-z_0)=0$$

Proposition 8.10

Soit $(a,b,c) \neq (0,0,0)$**,** $d \in \mathbb{R}$**,** $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ **un repère quelconque de** $\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ **la base correspondante, l'ensemble** $\mathcal{P}$ **des points** $M(x,y,z)_{\mathcal{R}}$ **tels que** $ax+by+cz+d=0$ **est un plan de vecteurs "générateurs"** $\vec{u}(-b,a,0)_{\mathcal{B}}$ **et** $\vec{v}(-c,0,a)_{\mathcal{B}}$ **(si** $a \neq 0$**).**

⊙ On veut maintenant utiliser le produit scalaire pour traduire l'orthogonalité, il faut donc dans la suite avoir les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

Proposition 8.11

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ **un repère orthonormé de** $\mathcal{E}$**,** $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ **la base orthonormale correspondante et** $\mathcal{P}$ **le plan passant par** $A(x_0,y_0,z_0)_{\mathcal{R}}$ **et de vecteur normal** $\vec{n}(a,b,c)_{\mathcal{B}}$**. Alors** $\mathcal{P}$ **a pour équation cartésienne :** $\mathcal{P} : ax+by+cz = ax_0+by_0+cz_0$**.**

Proposition 8.12

Avec les mêmes notations, si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ **et** $d \in \mathbb{R}$**, l'ensemble** $\mathcal{P}$ **des points** $M(x,y,z)_{\mathcal{R}}$ **tels que** $ax+by+cz+d=0$ **est un plan de vecteur normal** $\vec{n}(a,b,c)_{\mathcal{B}}$**.**

<u>*REMARQUE 8.16*</u> *:*

- *Si des plans* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *(de vecteurs normaux respectifs* $\vec{n}$ *et* $\vec{n}'$*) ne sont pas parallèles, alors leur intersection est une droite qui admet pour vecteur directeur* $\vec{n} \wedge \vec{n}'$*.*
- *Avec ces notations, on dit que* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont* **perpendiculaires** *si* $\vec{n} \perp \vec{n}'$*.*

Proposition 8.13

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ **un repère orthonormé de** $\mathcal{E}$ **et deux plans** $\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{P}'$ **d'équations cartésiennes respectives (dans** $\mathcal{R}$**)** $\mathcal{P} : ax+by+cz+d=0$**,** $\mathcal{P}' : a'x+b'y+c'z+d'=0$**.**

- $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \iff \vec{n} \wedge \vec{n'} = \vec{0} \iff ab'-a'b = bc'-b'c = ca'-c'a = 0$.
- $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c,\ d' = \lambda d)$.

<u>*REMARQUE 8.17*</u> *: Cette caractérisation du parallélisme et de l'égalité de deux plans est toujours d'actualité si on exprime les équations de ces plans dans un repère quelconque (proposition 8.10).*

<u>*REMARQUE 8.18*</u> *: (HP) On dispose comme dans le plan de la notion de faisceau, mais cette fois-ci ce sont des* **faisceaux de plans***, si* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *d'équations cartésiennes respectives (dans* $\mathcal{R}$ *quelconque)* $\mathcal{P} : ax+by+cz+d=0$, $\mathcal{P}' : a'x+b'y+c'z+d'=0$, *alors le faisceau* $\mathcal{F}_{\mathcal{P},\mathcal{P}'}$ *est l'ensemble des plans, pour* λ *parcourant* $\mathbb{R}$*, d'équation* $ax+by+cz+d+\lambda(a'x+b'y+c'z+d')=0$*. On a encore trois cas :*

- *si* $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P},\mathcal{P}'} = \{\mathcal{P}\}$*.*
- *si* $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$ *mais* $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$*, alors* $\mathcal{F}_{\mathcal{P},\mathcal{P}'}$ *est l'ensemble des tous les plans parallèles à* $\mathcal{P}$ *sauf* $\mathcal{P}'$*.*
- *si* $\mathrm{non}(\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}')$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P},\mathcal{P}'}$ *est l'ensemble des plans contenant* $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ *sauf* $\mathcal{P}'$*.*

8.3.2 : Différentes définitions et représentations d'une droite

<u>*REMARQUE 8.19*</u> *: Une droite de l'espace est définie par un point et un vecteur directeur, comme intersection de deux plans : on en a encore des équations paramétriques et cartésiennes.*

Proposition 8.14

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ **un repère quelconque de** $\mathcal{E}$**,** $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ **la base associée et** $\mathcal{D}$ **la droite passant par** $A(x_0,y_0,z_0)_{\mathcal{R}}$ **et de vecteur directeur** $\vec{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_{\mathcal{B}} \neq \vec{0}$**. Alors une représentation paramétrique de** $\mathcal{D}$ **est :** $M(x,y,z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = & x_0 + \lambda\alpha_1 \\ y = & y_0 + \lambda\alpha_2 \\ z = & z_0 + \lambda\alpha_3 \end{cases}$

Proposition 8.15

Avec ces notations, un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ est (selon les cas) :

$$\begin{array}{lll} \text{si} & \alpha_1 \neq 0 & \text{alors} \quad M(x,y,z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \alpha_2(x-x_0) - \alpha_1(y-y_0) = \alpha_1(z-z_0) - \alpha_3(x-x_0) = 0 \\ \text{si} & \alpha_2 \neq 0 & \text{alors} \quad M(x,y,z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \alpha_2(x-x_0) - \alpha_1(y-y_0) = \alpha_2(z-z_0) - \alpha_3(y-y_0) = 0 \\ \text{si} & \alpha_3 \neq 0 & \text{alors} \quad M(x,y,z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \alpha_3(x-x_0) - \alpha_1(z-z_0) = \alpha_2(z-z_0) - \alpha_3(y-y_0) = 0 \end{array}$$

REMARQUE 8.20 : On constate qu'une droite dans l'espace a deux équations cartésiennes qui la définissent : c'est normal puisqu'une droite est l'intersection de deux plans. Par contre on peut obtenir une droite d'une infinité de manières comme intersection de deux plans, il n'y a pas d'unicité (même pas à coefficient près) d'un système d'équations cartésiennes pour une droite.

8.3.3 : Différentes distances ou projections dans l'espace

Proposition 8.16

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, alors le projeté H d'un point M de l'espace est donné par $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\overrightarrow{AM}.\vec{u}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$.

De plus la distance de M à la droite est $d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}$.

Proposition 8.17

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et orthogonal à $\vec{n}$ alors le projeté H de $M \in \mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}$ est caractérisé par la relation vectorielle : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM} - \dfrac{\overrightarrow{AM}.\vec{n}}{||\vec{n}||^2}\vec{n}$.

Proposition 8.18

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et orthogonal à $\vec{n}$, alors la distance de $M \in \mathcal{E}$ au plan $\mathcal{P}$ est $d(M,\mathcal{P}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{||\vec{n}||}$. De plus, si dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$, si on a $\mathcal{P} \ : \ ax+by+cz+d=0$ et $M(x_0,y_0,z_0)_{\mathcal{R}}$, alors $d(M,\mathcal{P}) = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (on a $(a,b,c) \neq (0,0,0)$).

REMARQUE 8.21 : Si le plan $\mathcal{P}$ est plutôt donné par un point A et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors la distance entre le point M et le plan $\mathcal{P}$ est $d(M,\mathcal{P}) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}]\right|}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$.

REMARQUE 8.22 : Si on se donne deux droites (affines) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non parallèles de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors on peut montrer qu'il existe une unique droite Δ rencontrant à la fois $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et qui est orthogonale à la fois à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$: Δ est appelée la **perpendiculaire commune** *à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$. Δ a donc comme vecteur directeur $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Les points $A = \mathcal{D} \cap \Delta$ et $A' = \mathcal{D}' \cap \Delta$ sont les seuls de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ qui vérifient $d(\mathcal{D},\mathcal{D}') = AA' \leqslant MM'$ quels que soient les points $M \in \mathcal{D}$ et $M' \in \mathcal{D}'$.*

PARTIE 8.4 : SPHÈRES

8.4.1 : Définition et équation d'une sphère

Définition 8.9

Soit un point $\Omega \in \mathcal{E}$ et un réel $R \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle **sphère** *de* **centre** Ω *de* **rayon** R *l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\Omega M = R$.*

Proposition 8.19

Si $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormé et $\Omega(a, b, c)_{\mathcal{R}}$ et $R > 0$, la sphère de centre Ω et de rayon R a pour équation cartésienne (dans $\mathcal{R}$) :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0.$$

Proposition 8.20

Avec ces notations, réciproquement si on se donne l'ensemble $\mathcal{S}$ des points de $\mathcal{E}$ tels que $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d = 0$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, alors on a 3 cas en notant $p = a^2+b^2+c^2-d$ et $\Omega(-a, -b, -c)_{\mathcal{R}}$:

- **$\mathcal{S} = \emptyset$ si $p < 0$.**
- **$\mathcal{S} = \{\Omega\}$ si $p = 0$.**
- **$\mathcal{S}$ est la sphère de centre Ω et de rayon $R = \sqrt{p}$ si $p > 0$.**

Proposition 8.21

Soit $(A, B) \in \mathcal{E}^2$ deux points distincts et $\mathcal{S}$ est la sphère de diamètre $[AB]$, alors pour un point $M \in \mathcal{E}$, on a la caractérisation : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Longleftrightarrow M \in \mathcal{S}$.

<u>*REMARQUE 8.23*</u> *: On peut, toujours dans un repère orthonormé, représenter les points de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(a, b, c)_{\mathcal{R}}$ de rayon $R > 0$ de manière paramétrique, pour $M(x, y, z)_{\mathcal{R}}$:*

$$M \in \mathcal{S} \iff \big(\exists(\theta, \varphi) \in [0; 2\pi[\times[0; \pi],\ x = a + R\sin(\theta)\cos(\varphi),\ y = b + R\sin(\theta)\sin(\varphi) \ \text{ et } \ z = c + R\cos(\theta)\big).$$

Proposition 8.22

Soit $\mathcal{S}$ la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ dans un repère $\mathcal{R}$ orthonormé, alors le plan tangent en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{R}}$ de cette sphère est d'équation cartésienne (dans $\mathcal{R}$) : $xx_0 + yy_0 + zz_0 + a(x + x_0) + b(y + y_0) + c(z + z_0) + d = 0$.

<u>*REMARQUE 8.24*</u> *: On constate que cette équation de plan a encore été obtenue par dédoublement par rapport à celle de la sphère.*

8.4.2 : Différentes intersections

⊙ On peut "sentir" les propositions suivantes ou les démontrer en passant par les équations de ces sphères, de ces droites et plan dans un repère orthonormé :

Proposition 8.23

Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ les deux sphères de centres respectifs Ω et Ω' et de rayons respectifs R et R' alors on a les 7 cas suivants pour l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$:
- $\Omega\Omega' < R' - R$ **($\mathcal{S}$ est strictement intérieur à $\mathcal{S}'$).**
- $\Omega\Omega' < R - R'$ **($\mathcal{S}'$ est strictement intérieur à $\mathcal{S}$).**
- $\Omega\Omega' = R' - R$ **($\mathcal{S}$ est tangent intérieurement à $\mathcal{S}'$).**
- $\Omega\Omega' = R - R'$ **($\mathcal{S}'$ est tangent intérieurement à $\mathcal{S}$).**
- $|R' - R| < \Omega\Omega' < R + R'$ **($\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont sécants selon un cercle).**
- $\Omega\Omega' = R' + R$ **($\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont tangents extérieurement).**
- $\Omega\Omega' > R + R'$ **($\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont strictement extérieurs l'un à l'autre).**

<u>*REMARQUE 8.25*</u> *: Dans le cas où l'on a $|R'-R| < \Omega\Omega' < R+R'$, le cercle de $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$ est de centre $C \in [\Omega\Omega']$ et de rayon $r > 0$ et l'on a les relations $R^2 = \Omega C^2 + r^2$, $R'^2 = \Omega' C^2 + r^2$ et $\Omega C + \Omega' C = \Omega\Omega'$ ce qui se résout en :*

$$\Omega C = \frac{\Omega\Omega'^2 + R^2 - R'^2}{2\Omega\Omega'},\ \Omega C = \frac{\Omega\Omega'^2 - R^2 + R'^2}{2\Omega\Omega'}$$

$$\text{et } r = \frac{\sqrt{(R + R' + \Omega\Omega')(R - R' + \Omega\Omega')(R' - R + \Omega\Omega')(R + R' - \Omega\Omega')}}{2\Omega\Omega'}.$$

Proposition 8.24

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{D}$ une droite du plan, alors on a les 3 cas suivants pour l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$:
- $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$ **($\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécants).**
- $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$ **($\mathcal{D}$ est tangente à la sphère $\mathcal{S}$).**
- $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$ **($\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ se rencontrent en 2 points distincts).**

Proposition 8.25

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, alors on a les 3 cas suivants pour l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$:
- $d(\Omega, \mathcal{P}) > R$ **($\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ ne sont pas sécants).**
- $d(\Omega, \mathcal{P}) = R$ **($\mathcal{P}$ est tangent à la sphère $\mathcal{S}$).**
- $d(\Omega, \mathcal{P}) < R$ **($\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ se rencontrent selon un cercle).**

<u>*REMARQUE 8.26*</u> *: Dans le cas où l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}$ est un cercle, alors en notant C son centre et r son rayon, on dispose encore de relations : C est le projeté de Ω sur $\mathcal{P}$ et $r^2 + \Omega C^2 = R^2$.*