CHAPITRE 9
CONIQUES

PARTIE 9.1 : DÉFINITION MONOFOCALE

9.1.1 : Notations et équations réduites

⊙ On se place dans tout ce chapitre dans le plan $\mathcal{P}$ muni de sa structure euclidienne classique : c'est-à-dire qu'on suppose connues les notions suivantes : angle, distance, produit scalaire, déterminant et orientation.

Définition 9.1

On se donne un point F du plan, une droite $\mathcal{D}$ ne contenant pas F et un réel strictement positif e. On définit une partie $\mathcal{C}$ du plan appelée la **conique** *de* **directrice** *$\mathcal{D}$, de* **foyer** *F et d'***excentricité** *e par $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid MF = eMH = ed(M, \mathcal{D})\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.*
En notant d la distance de F à $\mathcal{D}$, on note p et on appelle **paramètre** *de la conique $\mathcal{C}$ le réel $p = ed$.*

EXEMPLE 9.1 **:** Si on exprime les coordonnées des points dans un repère orthonormé, l'ensemble des points du plan vérifiant $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2(x + \sqrt{3}y - 1)^2$ est la conique de foyer $F(2, -1)$, de directrice $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $x + \sqrt{3}y = 1$ et d'excentricité $e = 2\sqrt{2}$.

REMARQUE 9.1 : • On note K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$ de sorte que $d = FK > 0$.

On se place dorénavant dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0 = (F, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\vec{\imath} = \dfrac{\overrightarrow{KF}}{KF}$.

- *Dans ce repère $\mathcal{R}$ la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $\mathcal{D}\ :\ X = -d$.*
- *Pour un point $M(X, Y)_{\mathcal{R}_0}$ du plan, la condition d'appartenance à $\mathcal{C}$ s'écrit donc $X^2 + Y^2 = e^2(X+d)^2$ ce qui prouve donc que la droite (KF) (d'équation $Y = 0$) est* **axe de symétrie** *pour $\mathcal{C}$.*

9.1.2 : Classification et équations polaires des coniques

Définition 9.2

Avec les notations précédentes, on dit que :
- *$\mathcal{C}$ est une* **ellipse** *si $e \in]0, 1[$,*
- *$\mathcal{C}$ est une* **parabole** *si $e = 1$ et*
- *$\mathcal{C}$ est une* **hyperbole** *si $e > 1$.*

REMARQUE 9.2 :
- *Toujours dans le repère orthonormé $\mathcal{R}_0$ du paragraphe précédent, un point de coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ appartient à la conique $\mathcal{C}$ si et seulement s'il vérifie la condition suivante :*
$$MF = eMH \iff |\rho| = e|d + \rho\cos\theta| \iff \rho = -\frac{p}{1 + e\cos\theta} \text{ ou } \rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}.$$
- *Mais les courbes définies par $\rho = \rho_1(\theta) = -\dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ et $\rho = \rho_2(\theta) = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$ sont les mêmes car pour des θ convenables on a $\rho_1(\theta + \pi) = -\rho_2(\theta)$. On peut donc affirmer que :*

Proposition 9.1

La conique $\mathcal{C}$ admet pour équation polaire $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$ (dans $\mathcal{R}_0$).

PARTIE 9.2 : ELLIPSE

⊙ Bien sûr dans toute cette partie, l'excentricité e de la conique $\mathcal{C}$ vérifie $0 < e < 1$.

9.2.1 : Terminologie de l'ellipse et relations

REMARQUE 9.3 :

- *En posant* $O\left(\dfrac{e^2d}{1-e^2}, 0\right)_{\mathcal{R}_0}$*, la conique* $\mathcal{C}$*, qu'on notera dorénavant* $\mathcal{E}$ *puisque c'est une ellipse, a pour équation dans le repère* $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *:* $\dfrac{(1-e^2)^2}{e^2d^2}x^2 + \dfrac{1-e^2}{e^2d^2}y^2 = 1$.

- *Ce nouveau point* O *est sur la droite* (FK) *et* F *est entre* K *et* O.

Définition 9.3

On note maintenant $a = \dfrac{p}{1-e^2} > 0$, $b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}} > 0$, $c = OF = \dfrac{ep}{1-e^2} > 0$.

Proposition 9.2

L'ellipse $\mathcal{E}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathcal{R}$ et l'on a : $a^2 = b^2 + c^2$, $e = \dfrac{c}{a}$; la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $\mathcal{D}\ :\ x = -\dfrac{a^2}{c} = -\dfrac{a}{e}$ et $F(-c, 0)_{\mathcal{R}}$.

REMARQUE 9.4 : On trace l'ellipse assez facilement compte tenu de cette équation qui fait de plus apparaître deux axes de symétrie pour $\mathcal{E}$ *qui sont les deux axes du repère* $\mathcal{R}$.

Définition 9.4

a *est appelé le* **demi-grand axe**, b *est nommé le* **demi-petit axe**, c *est appelée la* **demi-distance focale**, *l'axe* (Ox) *s'appelle l'***axe focal**, *le cercle de centre* O *et de rayon* a *est le* **cercle principal**, *le cercle de centre* O *et de rayon* b *est le* **cercle secondaire**, *les points* $A(a, 0)_{\mathcal{R}}$, $A'(-a, 0)_{\mathcal{R}}$, $B(0, b)_{\mathcal{R}}$ *et* $B'(0, -b)_{\mathcal{R}}$ *sont les quatre* **sommets** *de* $\mathcal{E}$.

9.2.2 : Définition bifocale et jardinage

REMARQUE 9.5 :

- *L'origine* O *du repère est centre de symétrie grâce à l'équation réduite ci-dessus. Ceci prouve que la conique ayant un foyer et une directrice symétrique par rapport à* O *de* F *et* $\mathcal{D}$ *est la même que* $\mathcal{E}$.

- *L'ellipse* $\mathcal{E}$ *admet deux foyers* $F(-c, 0)_{\mathcal{R}}$ *et* $F'(c, 0)_{\mathcal{R}}$ *et deux directrices* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'\ :\ x = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{a}{e}$.

Proposition 9.3

Soit M un point du plan $\mathcal{P}$, on a alors : $M \in \mathcal{E} \iff MF + MF' = 2a$.

DÉMONSTRATION : Le sens $\Longrightarrow$ se fait par un schéma assez simple. Par contre on montre l'implication $\Leftarrow$ par le calcul analytique en constatant au préalable que, pour $M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{E}$, $x^2 + y^2 \leqslant a^2 + b^2$.

REMARQUE 9.6 : On peut en déduire, pour deux points F *et* F' *du plan fixés, les lignes de niveaux de* $MF + MF'$*. On pose donc, pour* $a \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{E}_a = \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$ *; alors l'inégalité triangulaire et l'équivalence précédente prouve que* $\mathcal{E}_a = \emptyset$ *si* $2a < FF'$, $\mathcal{E}_a$ *est le segment* $[FF']$ *si* $2a = FF'$ *et* $\mathcal{E}_a$ *est l'ellipse de foyers* F *et* F' *et de paramètres* a, $c = \dfrac{FF'}{2}$*, etc... si* $2a > FF'$.

Proposition 9.4

Réciproquement, soit $\mathcal{R}$ un ron, $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\mathcal{E} = \left\{M(x,y)_{\mathcal{R}} \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ alors :

- **Si $a = b$: $\mathcal{E}$ est le cercle de centre O et de rayon a.**
- **Si $a > b$: $\mathcal{E}$ est l'ellipse horiz. d'exc. $e = \frac{c}{a}$ de foyers $F(-c,0)_{\mathcal{R}}$, $F'(c,0)_{\mathcal{R}}$ ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$).**
- **Si $a < b$: $\mathcal{E}$ est l'ellipse vert. d'exc. $e = \frac{c}{b}$ de foyers $F(0,-c)_{\mathcal{R}}$, $F'(0,c)_{\mathcal{R}}$ ($c = \sqrt{b^2 - a^2}$).**

Démonstration : Pour $a > b$ par exemple, on pose $\mathcal{D} : x = -\frac{a^2}{c}$ et pour $M(x,y)_{\mathcal{R}}$ et $H\left(-\frac{a^2}{c}, y\right)_{\mathcal{R}}$ le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, on vérifie que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2$.

9.2.3 : Paramétrages et tangentes

REMARQUE 9.7 :

- *Puisque l'ellipse $\mathcal{E}$ précédente a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on voit que pour un point $M(x,y)_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{E}$, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = a\cos\theta$ et $y = b\sin\theta$.*
- *On peut bien sûr paramétrer l'ellipse $\mathcal{E}$ privée du point "à l'ouest" A en posant $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ pour $\theta \in]-\pi;\pi[$ pour obtenir le paramétrage suivant : $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \frac{2bt}{1+t^2}$.*

Proposition 9.5

En un point $M_0(x_0,y_0)_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{E}$, la tangente a pour équation cartésienne $T_{M_0} : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ (elle est encore obtenue par dédoublement).

Démonstration : On se sert du paramétrage avec cosinus et sinus pour voir $\mathcal{E}$ comme une courbe paramétrée.

Proposition 9.6

En un point M_0 de $\mathcal{E}$, la tangente est la bissectrice ext. de l'angle $\widehat{FM_0F'}$.

Démonstration : On se sert ici de la constance de $FM + F'M = 2a = \sqrt{\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FM}} + \sqrt{\overrightarrow{F'M}.\overrightarrow{F'M}}$ qu'on dérive par rapport au paramètre θ par exemple. En notant $\vec{f} : \mathbb{R} \to P$ la courbe paramétrée représentant l'ellipse $\left(\vec{f}(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)_{\mathcal{B}}\right)$, on a donc $\overrightarrow{f'(\theta_0)}.\left(\frac{\overrightarrow{FM_0}}{FM_0} + \frac{\overrightarrow{F'M_0}}{F'M_0}\right) = 0$: c'est ce qu'on veut.

9.2.4 : Ellipses comme transformées des cercles du plan ou de l'espace

*REMARQUE 9.8 : L'**affinité** orthogonale de rapport $\frac{b}{a}$ par rapport à la droite (Ox) est l'application $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ telle que $g(x,y) = \left(x, \frac{b}{a}y\right)$: elle consiste à ne faire une homothétie que sur les ordonnées et pas sur les abscisses. Il est clair alors que l'ellipse est l'image du cercle principal par cette affinité g.*

REMARQUE 9.9 : On peut aussi voir une ellipse comme la projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan. En effet, considérons l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et du plan d'équation $z = y\tan(\alpha)$ avec $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Sa projection sur le plan d'équation $z = -2R$ (par exemple) est l'ellipse d'équation (en reportant) $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2\cos^2\alpha} = 1$ qui est d'excentricité $\sin\alpha$.

PARTIE 9.3 : PARABOLE

⊙ Maintenant, l'excentricité e de la conique $\mathcal{C}$ (notée $\mathcal{P}$ puisque c'est une parabole) vérifie $e = 1$.

9.3.1 : Terminologie de la parabole et relations

REMARQUE 9.10 : En posant $O\left(-\frac{d}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}_0}$ (ce nouveau point O est le milieu du segment $[FK]$), la parabole $\mathcal{P}$ a pour équation dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $y^2 = 2dx$.

Proposition 9.7

Dans ce nouveau repère $\mathcal{R}$, l'équation de $\mathcal{P}$ est $y^2 = 2px$, on a $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}}$, $K\left(-\frac{p}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}}$, la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $x = -\frac{p}{2}$.

REMARQUE 9.11 :
- *Réciproquement, dans un repère orthonormé, cette équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$ caractérise une parabole ayant les caractéristiques géométriques précédentes.*
- *Le tracé de cette parabole est assez simple : ce sont deux branches symétriques par rapport à (Ox) qui sont les graphes de deux fonctions plus ou moins racine.*

9.3.2 : Paramétrages et tangentes

REMARQUE 9.12 :
- *Pour $M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}$, si on pose $t = \frac{y}{p} \in \mathbb{R}$, alors on obtient le paramétrage $x = \frac{pt^2}{2}$ et $y = pt$.*
- *On peut aussi poser $t = y \in \mathbb{R}$ pour avoir un paramétrage ressemblant avec $x = \frac{t^2}{2p}$ et $y = t$.*
- *Avec le premier de ces paramétrages, la tangente en un point M de paramètre t de $\mathcal{P}$ ($M\left(\frac{pt^2}{2}, pt\right)_{\mathcal{R}}$) admet pour équation : $x - ty + \frac{pt^2}{2} = 0$ et la normale est : $tx + y = pt\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)$.*

Proposition 9.8

La tangente en un point $M_0(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$ de la parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $yy_0 = p(x + x_0)$ (elle est toujours obtenue par dédoublement).

Proposition 9.9

Si $M_0 \in \mathcal{P}$ et $M_0 \neq O$, la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 coupe la tangente à $\mathcal{P}$ en O au milieu de $[H_0F]$ et ceci orthogonalement.

DÉMONSTRATION : Si $M_0\left(\frac{pt_0^2}{2}, pt_0\right)_{\mathcal{R}}$), alors la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 a pour équation $x - t_0y + \frac{pt_0^2}{2} = 0$ (de vecteur $\vec{n}(1, -t_0)_{\mathcal{B}}$) donc son intersection avec la tangente à $\mathcal{P}$ en O est $I\left(0, \frac{pt_0}{2}\right)_{\mathcal{R}}$. Comme $H_0\left(-\frac{p}{2}, pt_0\right)_{\mathcal{R}}$ et $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)_{\mathcal{R}}$, on voit que I est le milieu de $[H_0F]$. De plus on a $\overrightarrow{H_0F}(p, -pt_0)_{\mathcal{B}}$ donc $\overrightarrow{H_0F} = p\,\vec{n}$.

REMARQUE 9.13 : Les paraboles (ou plutôt les paraboloïdes de révolution) ont donc la propriété très recherchée de condenser tous les rayons venant de l'infini dans la direction de l'axe de la parabole en le foyer sans déphasage ! Et voilà la télévision par satellite (il est presque à l'infini) !

PARTIE 9.4 : HYPERBOLE

⊙ Dorénavant, l'excentricité e de la conique $\mathcal{C}$ (notée $\mathcal{H}$ puisque c'est une hyperbole) vérifie $e > 1$.

9.4.1 : Terminologie de l'hyperbole, asymptotes et relations

REMARQUE 9.14 : En posant $O\left(\dfrac{e^2d}{1-e^2}, 0\right)_{\mathcal{R}_0}$ *(on vérifie que* $K \in [OF]$ *car* $\dfrac{e^2d}{1-e^2} < -d$*), dans le repère* $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$*, on a :* $\mathcal{H} \ : \ \dfrac{(1-e^2)^2}{e^2d^2}x^2 + \dfrac{1-e^2}{e^2d^2}y^2 = 1$.

Définition 9.5

On note maintenant $a = \dfrac{p}{e^2-1} > 0$, $b = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}} > 0$, $c = OF = \dfrac{ep}{e^2-1} > 0$.

Proposition 9.10

L'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathcal{R}$; on a aussi : $c^2 = b^2 + a^2$, $e = \dfrac{c}{a}$; la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $\mathcal{D} \ : \ x = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{a}{e}$ et $F(c, 0)_{\mathcal{R}}$.

Définition 9.6

c *est appelée la* **demi-distance focale***, l'axe* (Ox) *s'appelle l'***axe focal***, le cercle de centre* O *et de rayon* a *est le* **cercle principal***, les points* $A(a, 0)_{\mathcal{R}}$, $A'(-a, 0)_{\mathcal{R}}$ *sont les* **sommets** *de* $\mathcal{H}$.

REMARQUE 9.15 :

- *Par symétrie de* $\mathcal{H}$ *par rapport à* (Ox) *et* (Oy)*, il suffit d'étudier la branche* $x \geqslant a$ *et* $y > 0$ *sur laquelle on a* $y = b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$. *Une étude classique prouve alors que la droite* $y = \dfrac{b}{a}x$ *est asymptote de l'hyperbole ; bien sûr, par symétrie la droite d'équation* $y = -\dfrac{b}{a}x$ *l'est aussi.*
- *Une hyperbole est dite* **équilatère** *si les asymptotes sont orthogonales, ce qui se passe ssi* $e = \sqrt{2}$.

9.4.2 : Définition bifocale et pseudo-jardinage

REMARQUE 9.16 : Les axes (Ox) *et* (Oy) *sont des axes de symétrie puisqu'il n'y a que des carrés dans l'équation de l'hyperbole dans le repère* $\mathcal{R}$*. Comme pour l'ellipse, ceci montre que* $\mathcal{H}$ *est aussi la conique de foyer* $F'(-c, 0)_{\mathcal{R}}$*, de directrice* $\mathcal{D}' : x = -\dfrac{a^2}{c} = -\dfrac{a}{e}$ *et d'excentricité* e.

Proposition 9.11

Soit M un point, on a l'équivalence : $M \in \mathcal{H} \iff |MF - MF'| = 2a$.

DÉMONSTRATION : Le sens $\Longrightarrow$ se fait par un schéma assez simple. Par contre on montre l'implication $\Leftarrow$ par le calcul analytique en vérifiant au préalable que, pour $M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{H}$, $x^2 + y^2 \geqslant a^2 \geqslant a^2 - b^2$.

REMARQUE 9.17 : Pour un point M *du plan, on peut même être plus précis :* $MF - MF' = 2a$ *caractérise la partie gauche de* $\mathcal{H}$ *et* $MF' - MF = 2a$ *caractérise la partie droite de* $\mathcal{H}$.

REMARQUE 9.18 : On peut en déduire, pour deux points fixés F *et* F' *distincts du plan, les lignes de niveaux de* $|MF - MF'|$*. On pose donc, pour* $a \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{H}_a = \{M \in \mathcal{P} \mid |MF - MF'| = 2a\}$ *; alors l'inégalité triangulaire et l'équivalence précédente prouve que* $\mathcal{H}_a = \emptyset$ *si* $2a > FF'$, $\mathcal{H}_a$ *est la réunion des deux demi-droites* $(FF') \setminus [FF']$ *si* $2a = FF'$ *et* $\mathcal{H}_a$ *est l'hyperbole de foyers* F *et* F' *et de paramètres* a, $c = \dfrac{FF'}{2}$, *etc... si* $0 < 2a < FF'$ *et* $\mathcal{H}_a$ *est la médiatrice du segment* $[FF']$ *si* $a = 0$.

Proposition 9.12

Réciproquement, soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ **et** $\mathcal{H} = \{M(x, y)_{\mathcal{R}} \mid \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\}$ **alors il y a, contrairement aux ellipses, un seul cas :** $\mathcal{H}$ **est l'hyperbole d'axe focal** (Ox)**, d'excentricité** $e = \dfrac{c}{a}$**, de foyers** $F(-c, 0)_{\mathcal{R}}$**,** $F'(c, 0)_{\mathcal{R}}$ **(**$c = \sqrt{a^2 + b^2}$**) et d'asymptotes** $y = \pm\dfrac{b}{a}x$**.**

REMARQUE 9.19 : Pour avoir une hyperbole avec un axe focal (Oy)*, il suffit d'inverser* x *et* y *donc de considérer un ensemble* $\mathcal{H} = \{M(x, y)_{\mathcal{R}} \mid \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1\}$ *avec* $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *: les foyers sont alors* $F(0, c)_{\mathcal{R}}$ *et* $F'(0, -c)_{\mathcal{R}}$*, l'excentricité* $e = \dfrac{c}{b}$ *(*$c = \sqrt{a^2 + b^2}$*) et les asymptotes toujours* $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

9.4.3 : Paramétrages et tangentes

REMARQUE 9.20 :

- *Il existe bien sûr le paramétrage classique de chacune de deux branches de l'hyperbole avec les fonctions hyperboliques :* $x = a\,\mathrm{ch}(t)$ *et* $y = b\,\mathrm{sh}(t)$ *avec* $t \in \mathbb{R}$ *(branche droite) et* $x = -a\,\mathrm{ch}(t)$ *et* $y = b\,\mathrm{sh}(t)$ *avec* $t \in \mathbb{R}$ *(branche gauche).*
- *On peut aussi poser* $u = \mathrm{th}\left(\frac{t}{2}\right)$ *ce qui donne* $u \in]-1, 1[$ *et* $x = a\dfrac{1 + u^2}{1 - u^2}$ *et* $y = \dfrac{2bu}{1 - u^2}$ *pour la branche droite de* $\mathcal{H}$ *; même chose pour la branche gauche bien sûr.*
- *On peut aussi paramétrer par la valeur* v *de* $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ *ce qui donne* $v \in \mathbb{R}^*$ *car aucun point de* $\mathcal{H}$ *n'appartient à l'asymptote et le paramétrage simple* $x = \dfrac{a}{2}\left(v + \dfrac{1}{v}\right)$ *et* $y = \dfrac{b}{2}\left(v - \dfrac{1}{v}\right)$.

Proposition 9.13

Pour $M_0(x_0, y_0)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{H}$**, la tangente en** M_0 **à** $\mathcal{H}$ **a pour équation** $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ **(dédoublement).**

DÉMONSTRATION : Il suffit d'utiliser l'un des paramétrages précédents.

Proposition 9.14

Pour $M_0(x_0, y_0)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{H}$**, la tangente en** M_0 **à** $\mathcal{H}$ **est la bissectrice intérieure de l'angle** FM_0F'**.**

DÉMONSTRATION : Il suffit, comme pour l'ellipse, de dériver (pour n'importe quel paramétrage) la relation de pseudo-jardinage $MF' - MF = 2a$ (pour la branche droite de $\mathcal{H}$) pour avoir $\overrightarrow{f'(t_0)}.\left(\dfrac{\overrightarrow{FM_0}}{FM_0} - \dfrac{\overrightarrow{F'M_0}}{F'M_0}\right) = 0$.

REMARQUE 9.21 :

- *Dans le repère* $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v})$ *où* $\vec{u}(a, -b)_{\mathcal{B}}$ *et* $\vec{v}(a, b)_{\mathcal{B}}$ *(*$\mathcal{R}'$ *n'est ni normé ni orthogonal en général), si* $M(x, y)_{\mathcal{R}}$ *et* $M(x', y')_{\mathcal{R}'}$ *alors* $x' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)$ *et* $y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)$ *donc* $x'y' = \dfrac{1}{4}$.
- *On en déduit que si l'hyperbole est équilatère (les asymptotes sont orthogonales, soit* $a = b$*) on a* $e = \sqrt{2}$ *et* $\mathcal{H}$ *admet pour équation* $x''y'' = \dfrac{a^2}{2}$ *dans le rond* $\mathcal{R}'' = \left(O, \dfrac{\vec{u}}{\sqrt{2}\,a}, \dfrac{\vec{v}}{\sqrt{2}\,a}\right)$.

PARTIE 9.5 : LES CONIQUES À PARTIR DE LEUR ÉQUATION CARTÉSIENNE

⊙ Soit $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ et $\mathcal{C} = \{ M(x,y)_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \}$. On estime bien sûr que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$.

9.5.1 : Sans termes en xy

⊙ On suppose dans ce paragraphe que $b = 0$ et on se donne $M(x,y)_{\mathcal{R}}$.

⊙ On suppose $(a,c) = (0,0)$ dans la remarque qui suit.

REMARQUE 9.22 : Ces cas sont très simples :
- *Si $a = c = d = e = f = 0$ alors $\mathcal{C}$ est le plan en entier $(0 = 0)$.*
- *Si $a = c = d = e = 0$ et $f \neq 0$ alors $\mathcal{C} = \emptyset$.*
- *Si $a = c = 0$ et $(d,e) \neq (0,0)$ alors $M \in \mathcal{C} \iff dx + ey + f = 0$ ainsi $\mathcal{C}$ est une droite du plan.*

⊙ On suppose $(a,c) \neq (0,0)$, il y a alors 2 cas : soit $ac \neq 0$, soit $\big((a = 0 \text{ et } c \neq 0) \text{ ou } (a \neq 0 \text{ et } c = 0)\big)$.

REMARQUE 9.23 :
Examinons le cas $a = 0$ et $c \neq 0$ (par exemple) alors $M \in \mathcal{C} \iff (y + \frac{e}{2c})^2 = -\frac{d}{c}x + \frac{e^2}{4c^2} - \frac{f}{c}$:

- *Si $d = 0$ et $\frac{e^2}{4c^2} - \frac{f}{c} = 0$ alors $\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = -\frac{e}{2c}$.*
- *Si $d = 0$ et $\frac{e^2}{4c^2} - \frac{f}{c} < 0$ alors $\mathcal{C} = \emptyset$.*
- *Si $d = 0$ et $\frac{e^2}{4c^2} - \frac{f}{c} > 0$ alors $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites parallèles.*
- *Si $d \neq 0$ alors $M \in \mathcal{C} \iff (y + \frac{e}{2c})^2 = -\frac{d}{c}\left(x - \frac{e^2}{4cd} + \frac{f}{d}\right)$. On reconnaît l'équation d'une parabole de sommet $S\left(\frac{e^2}{4cd} - \frac{f}{d}, -\frac{e}{2c}\right)_{\mathcal{R}}$, d'axe (Ox) de paramètre $p = \left|\frac{d}{2c}\right|$ et qui s'oriente selon le signe de $\frac{d}{2c}$.*

Examinons maintenant le cas $a \neq 0$ et $c \neq 0$ alors $M \in \mathcal{C} \iff a\big(x + \frac{d}{2a}\big)^2 + c\big(y + \frac{e}{2c}\big)^2 = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$:

- *Si a et c sont de même signe et que $\frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f = 0$ alors $\mathcal{C} = \{\Omega\}$ avec $\Omega\left(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c}\right)_{\mathcal{R}}$.*
- *Si a et c sont de même signe et que $\frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$ est du signe contraire alors il est clair que $\mathcal{C} = \emptyset$.*
- *Si a et c sont de même signe et que $\frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$ est encore du même signe alors $\mathcal{C}$ est une ellipse horizontale si $a < c$, un cercle de centre Ω (voir ci-dessus) si $a = c$ et une ellipse verticale si $a > c$.*
- *Si a et c sont de signes contraires et $\frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f = 0$ alors $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites sécantes.*
- *Si a et c sont de signes contraires alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'axe focal (Ox) si $\frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$ est du même signe que a et d'axe focal (Oy) si $\frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$ est du même signe que c.*

Proposition 9.15

Dans ces conditions ($b = 0$), l'ensemble $\mathcal{C}$ est de l'un des dix types suivants :
(1) le plan en entier, (2) l'ensemble vide, (3) un point seul, (4) un cercle, (5) une seule droite, (6) la réunion de deux droites sécantes, (7) la réunion de deux droites parallèles, (8) une ellipse, (9) une hyperbole ou (10) une parabole (mais selon les axes du repère $\mathcal{R}$).

9.5.2 : Avec des termes en xy

REMARQUE 9.24 :

- *Si, pour* $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$, *on se place dans le repère* $\mathcal{R}_\theta = (O,\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{v_\theta})$ *qui est aussi orthonormé, alors si* $M(x',y')_{\mathcal{R}_\theta}$ *et* $M(x,y)_{\mathcal{R}}$ *on a :* $M \in \mathcal{C} \iff Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ *avec* $A = a\cos^2\theta + b\sin\theta.\cos\theta + c\sin^2\theta$, $B = b\cos(2\theta) + (c-a)\sin(2\theta)$, $C = a\sin^2\theta - b\sin\theta.\cos\theta + c\cos^2\theta$.
- *Poser* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *si* $a = c$ *ou* $\theta = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b}{a-c}\right)$ *si* $a \neq c$ *pour se débarrasser des termes en* $x'y'$.

REMARQUE 9.25 : Après calculs, on a $-4AC = B^2 - 4AC = b^2 - 4ac$ *(car* $B = 0$ *pour la valeur de* θ *choisie) or on connaît les différentes formes de* $\mathcal{C}$ *dans le cas* $B = 0$ *d'après le paragraphe précédent :*

Proposition 9.16

Si on note $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les différents cas :

- **si $\Delta = 0$ alors $\mathcal{C}$ est le plan, l'ensemble vide, une droite, une parabole ou la réunion de deux droites parallèles.**
- **Si $\Delta > 0$ alors $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites sécantes ou une hyperbole.**
- **Si $\Delta < 0$ alors $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide, un point seul, un cercle ou une ellipse.**

DÉMONSTRATION : Si $\Delta = 0$ alors $AC = 0$ donc on se ramène à la remarque 9.22 et au début de la remarque 9.23. Si $\Delta > 0$ ou $\Delta < 0$ alors $AC < 0$ ou $AC > 0$ ce qui fait que A et C sont de même signe ou de signes opposés et on se ramène à la fin de la remarque 9.23.

9.5.3 : Tangentes et centres de symétrie

REMARQUE 9.26 :

- *On admet que pour un ensemble* $\mathcal{C}$ *non dégénéré (c'est-à-dire un cercle, une ellipse, une hyperbole ou une parabole, l'équation de la tangente en un point* $M_0(x_0,y_0)_{\mathcal{R}}$ *de* $\mathcal{C}$ *est encore obtenue par dédoublement : on rajoute la règle* $2xy = xy + xy$ *est remplacé par* $x_0y + xy_0$.
- *La tangente a alors pour équation* $(2ax_0 + by_0 + d)x + (2cy_0 + bx_0 + e)y + dx_0 + ey_0 + 2f = 0$ *donc elle admet pour vecteur normal (on est dans un rond) le vecteur* $\overrightarrow{n} = (2ax_0 + by_0 + d, 2cy_0 + bx_0 + e)_{\mathcal{B}}$ *qui n'est autre que le* **vecteur gradient** *en* M_0 *de la fonction* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par la relation définissant l'ensemble* $\mathcal{C}$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.
- *C'est-à-dire que* $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\ \varphi(x_0,y_0) = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)\right)_{\mathcal{B}}$.

REMARQUE 9.27 :

- *En effectuant un changement d'origine du repère* $\mathcal{R}$, *on trouve par calculs que* $\Omega(x_0,y_0)_{\mathcal{R}}$ *est un centre de symétrie pour l'ensemble* $\mathcal{C}$ *si et seulement si* $2ax_0 + by_0 + d = 2cy_0 + bx_0 + e = 0$ *; c'est-à-dire si et seulement si* $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ \varphi(x_0,y_0) = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)\right)_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{0}$.
- *Le calcul nous montre aussi que l'équation de* $\mathcal{C}$ *devient alors* $aX^2 + bXY + cY^2 + \varphi(x_0,y_0) = 0$.
- *C'est un système deux équations deux inconnues à résoudre pour trouver les centres de symétrie :*
  - *si* $\Delta = 0$ *il y a une infinité de solutions ou aucune.*
  - *si* $\Delta \neq 0$ *il y a une solution unique donc un centre de symétrie unique.*

Méthode

Soit à étudier $\mathcal{C}\ :\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (dans un repère orthonormé) :

- **Calculer le discriminant pour savoir à quel type d'ensemble on a affaire.**
- **Chercher s'il y a un centre de symétrie et calculer l'angle de la rotation.**
- **Effectuer le changement de repère associé pour faire disparaître les termes en xy et en x et en y (si ce n'est pas une parabole bien sûr).**
- **Reconnaître enfin notre ensemble $\mathcal{C}$ et la tracer.**