CHAPITRE 11 RATIONNELS ET RÉELS

PARTIE 11.1 : LES NOMBRES RATIONNELS

11.1.1 : Construction du corps $\mathbb{Q}$

⊙ Étant parti de l'ensemble $\mathbb{N}$ grâce à PEANO, on a réussi à transformer ce semi-groupe en groupe (pour la loi $+$) en construisant $\mathbb{Z}$ mais cet anneau n'étant pas un corps, on est amené à le prolonger encore.

Maintenant que l'on dispose de vocabulaire mathématique un peu évolué, laissons tomber la présentation classique des rationnels pour expliquer comment $\mathbb{Q}$ se déduit logiquement de $\mathbb{Z}$.

REMARQUE 11.1 :

- *On définit alors* $\mathcal{R}$ *sur* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *par :* $\forall (a, a', b, b') \in \mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}^*)^2,\ (a, b)\mathcal{R}(a', b') \iff a \times b' = a' \times b$.
- *Alors* $\mathcal{R}$ *est d'équivalence et on note alors* $\dfrac{a}{b}$ *la classe de* (a, b) *de sorte que* $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ *comme il se doit.*
- *On pose alors* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble de toutes ces classes d'équivalence, on veut ensuite définir des lois sur cet ensemble et celles-ci sont naturellement* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a \times b' + a' \times b}{b \times b'}$ *et* $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a \times a'}{b \times b'}$ *qui sont bien définies car* $bb' \in \mathbb{Z}^*$ *puisque* $\mathbb{Z}$ *est intègre.*
- *Il convient alors de contrôler la cohérence de ces définitions, c'est-à-dire que le résultat des opérations ne dépend pas des représentants choisis pour les classes d'équivalence. Une fois ce détail réglé :*

Théorème 11.1

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ **est un corps commutatif.**

REMARQUE 11.2 :

- *Comme précédemment pour* $\mathbb{R}$ *par rapport à* $\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{N}$ *vis-à-vis de* $\mathbb{Z}$*, on aimerait pouvoir affirmer que* $\mathbb{Z}$ *est un sous-anneau de* $\mathbb{Q}$*, ce qui se fait via le morphisme injectif d'anneaux suivant :* $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *défini par* $\forall a \in \mathbb{Z},\ \varphi(a) = \dfrac{a}{1}$*. On identifiera donc* $\mathbb{Z}$ *à* $\widehat{\varphi}(\mathbb{Z})$*, c'est-à-dire* a *à* $\dfrac{a}{1}$*.*
- *Cette construction particulière de* $\mathbb{Q}$ *grâce à* $\mathbb{Z}$ *est en fait très générale, elle peut se faire dès que l'on a un anneau intègre* A*, on crée alors de la même manière un corps* K *appelé "corps des fractions" de* A *; on retrouvera cette construction cette année.*
- *En anticipant un peu sur l'arithmétique, on peut tout de même dire que chaque rationnel non nul* r *possède une unique écriture sous la forme* $r = \pm\dfrac{p}{q}$ *où* $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et* p *et* q *premiers entre eux.*

11.1.2 : Ordre classique dans $\mathbb{Q}$

Définition 11.1

On définit sur $\mathbb{Q}$ *la relation binaire* $\leqslant$ *par : soit* $(r, r') \in \mathbb{Q}^2$ *qui s'écrivent* $r = \dfrac{p}{q}$ *et* $r' = \dfrac{p'}{q'}$ *avec* $(q, q') \in (\mathbb{N}^*)^2$*, alors on a :* $r \leqslant r' \iff pq' \leqslant p'q$*.*

REMARQUE 11.3 :

- *On vérifie que cette définition ne dépend pas des écritures des deux rationnels, que c'est une relation d'ordre total et qu'elle prolonge encore une fois la relation d'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{Z}$.*
- *Nous avons encore des compatibilités classiques, à savoir :*
  - $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3,\ x \leqslant y \Longleftrightarrow x+z \leqslant y+z$ *et, si* $z>0$ *:* $x \leqslant y \Longleftrightarrow x \times z \leqslant y \times z$.
  - $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4,\ x \leqslant y$ *et* $z \leqslant t \Longrightarrow x+z \leqslant y+t$ *et :* $0 < x \leqslant y$ *et* $0 < z \leqslant t \Longrightarrow x \times z \leqslant y \times t$.
  - $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ x \leqslant y \Longleftrightarrow -y \leqslant -x$ *et :* $0 < x \leqslant y \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
- *La notion de divisibilité n'a aucun intérêt dans un corps !*

Définition 11.2

On définit la **valeur absolue** $|x|$ *d'un réel* x*, c'est* $|x| = \mathrm{Max}(\{-x, x\})$.

Proposition 11.1

Comme pour les entiers relatifs, on a, pour $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ **:**

$$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ |xy| = |x|.|y|,\ |x+y| \leqslant |x|+|y|,\ \Big||x|-|y|\Big| \leqslant |x \pm y| \ \text{ et } \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \ \text{ si } y \neq 0\,.$$

REMARQUE 11.4 : Cette nouvelle définition prolonge une nouvelle fois celle de la valeur absolue des entiers relatifs. L'application valeur absolue est un endomorphisme de $(\mathbb{Q}^*, \times)$.

11.1.3 : Problèmes de cet ordre

REMARQUE 11.5 : Des parties non vides minorées n'ont pas de plus petit élément ; symétriquement, des parties non vides majorées n'ont pas de maximum. La situation n'est donc pas la même que dans $\mathbb{Z}$.

EXEMPLE 11.1 : Prenons $A =]0;1[$, alors A ne possède pas de maximum, pas de minimum mais l'honneur est sauf puisque $\mathrm{Inf}(A) = 0$ et $\mathrm{Sup}(A) = 1$.

REMARQUE 11.6 : Plus grave, des parties non vides majorées (resp. non vides minorées) n'ont pas de borne supérieure (resp. inférieure) : DAS IST EINE KATASTROPHE !!!!!

EXEMPLE 11.2 : Prenons $A = \{\, r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 \leqslant 2 \,\}$, alors bien sûr $\mathrm{Inf}(A) = \mathrm{Min}(A) = 0$ mais A a beau être majoré par 2, il n'admet pas de borne supérieure et donc encore moins de maximum.

PARTIE 11.2 : LES NOMBRES RÉELS

11.2.1 : Présentation des réels

$\odot$ Les grecs, par l'intermédiaire de PYTHAGORE et de la diagonale d'un carré de côté 1, avaient compris l'insuffisance de $\mathbb{Q}$ pour la description du réel. CANTOR (par les limites de suites de rationnels) et DEDEKIND (par les coupures) essaient de "créer" rigoureusement $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ mais la construction qu'on retient maintenant est la complétion par les suites de CAUCHY (c'était l'idée originelle de CANTOR).

REMARQUE 11.7 : L'ensemble $\mathbb{R}$ *est donc l'ensemble des classes d'équivalence des suites rationnelles de* CAUCHY *(*$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (p \geqslant n$ *et* $q \geqslant n) \Longrightarrow |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$*) pour la relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *définie sur ces suites de rationnels par la condition suivante :* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R} (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon$ *: C'EST PAS FAUX !!*

11.2.2 : Structure de corps

REMARQUE 11.8 : On définit sur cet ensemble $\mathbb{R}$ deux lois internes + et $\times$ (ce sont en fait les lois + et $\times$ classiques sur les suites), on inclut $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ par l'intermédiaire des suites constantes de rationnels, on vérifie que les lois de $\mathbb{R}$ prolongent celles de $\mathbb{Q}$, et on a bien sûr le résultat suivant :

Théorème 11.2

$(\mathbb{R}, +, \times)$ **est un corps commutatif.**

11.2.3 : L'ordre classique

REMARQUE 11.9 : On dit que, pour deux réels x et y, on a $x \leqslant y$ s'ils sont respectivement la classe d'équivalence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$. Il vient alors :

Proposition 11.2

$\leqslant$ **est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (on admet qu'elle est totale).**

REMARQUE 11.10 : On dispose à nouveau de compatibilités et propriétés classiques :

- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leqslant y \Longleftrightarrow x + z \leqslant y + z$ *et, si* $z > 0$: $x \leqslant y \Longleftrightarrow x \times z \leqslant y \times z$.
- $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x \leqslant y$ *et* $z \leqslant t \Longrightarrow x+z \leqslant y+t$ *et :* $0 < x \leqslant y$ *et* $0 < z \leqslant t \Longrightarrow x\times z \leqslant y\times t$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \Longleftrightarrow -y \leqslant -x$ *et :* $0 < x \leqslant y \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

11.2.4 : Valeur absolue

Définition 11.3

Soit $x \in \mathbb{R}$*, on définit la* **valeur absolue** *de* x*, notée* $|x|$*, par* $|x| = \mathrm{Max}(\{-x, x\})$.

Proposition 11.3

Comme pour les rationnels, on a, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ • $|xy| = |x|.|y|$ • $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ • $\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x \pm y|$ • $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$ **.**

REMARQUE 11.11 : Cette nouvelle définition prolonge une nouvelle fois celle de la valeur absolue des rationnels. L'application valeur absolue est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

PARTIE 11.3 : PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE

11.3.1 : La fameuse propriété

⊙ Tout l'intérêt analytique du corps $\mathbb{R}$ réside dans le théorème qui suit et que nous ne démontrerons pas :

Théorème 11.3

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée possède une borne supérieure et toute partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée possède une borne inférieure.

REMARQUE 11.12 : Mais la notion de plus petit des majorants n'est pas très facile à manipuler :

Proposition 11.4

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors : $a = \mathrm{Sup}(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \forall x \in A,\ x \leqslant a \\ \bullet\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ a - \varepsilon < x \leqslant a \end{cases}$

REMARQUE 11.13 : Bien sûr : $a = \mathrm{Inf}(A) \Longleftrightarrow \Big(\forall x \in A,\ a \leqslant x$ *et* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ a \leqslant x < a + \varepsilon\Big)$.

REMARQUE 11.14 : On dit que le corps $\mathbb{R}$ *est* **archimédien** *car* $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ nx > y$. *En effet, on le démontre par l'absurde et en considérant* $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$.

11.3.2 : Les intervalles et les convexes

Définition 11.4

*Il existe 9 types d'***intervalles***, pour* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*, il y a :* $[a;b]$, $]a;b]$, $[a;b[$, $]a;b[$, $[a;+\infty[$, $]a;+\infty[$, $]-\infty;b]$, $]-\infty;b[$ *et* $]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$ *avec par exemple* $]a;b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b \,\}$.

REMARQUE 11.15 : On dit qu'un intervalle du type $[a;b]$ *est un* **segment**.

Définition 11.5

On dit qu'une partie A *de* $\mathbb{R}$ *est* **convexe** *si :* $\forall (x,y) \in A^2,\ [x;y] \subset A$.

EXEMPLE 11.3 : Bien sûr $[0;1]$ est convexe alors que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}^*$ ne le sont pas.

Théorème 11.4

Les intervalles sont exactement les convexes.

DÉMONSTRATION : C'est une magnifique disjonction des cas.

PARTIE 11.4 : PARTIE ENTIÈRE

11.4.1 : Propriétés de la partie entière

Théorème 11.5

Soit $x \in \mathbb{R}$**, alors :** $\exists ! n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant x < n+1 \Longleftrightarrow x - 1 < n \leqslant x$.

DÉMONSTRATION : Soit $x > 0$, on considère $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant x\}$ qui est non vide car $0 \in A$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \notin A$ car $\mathbb{R}$ est archimédien. Comme on a : $\forall p \geqslant m, p \notin A$, alors A est majoré par m donc possède un maximum n. On a donc $n \in A$ et $n+1 \notin A$ par hypothèse ce qui prouve l'existence.

Définition 11.6

On appelle **partie entière** *d'un réel* x *l'unique entier relatif* n *de la proposition précédente et on le note* $\lfloor x \rfloor$*. Ainsi :* $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \Longleftrightarrow x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

REMARQUE 11.16 : La partie entière est croissante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.

11.4.2 : Densité

Définition 11.7

Soit $A \subset \mathbb{R}$*, alors* A *est* **dense** *si :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \Longrightarrow \exists a \in A,\ x < a < y$.

Théorème 11.6

$\mathbb{Q}$ **et** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **sont denses dans** $\mathbb{R}$**.**

DÉMONSTRATION : Soit x et y deux réels avec $x < y$, on cherche un entier naturel $q \geqslant 1$ et un entier relatif p tels que $x < \dfrac{p}{q} < y \Longleftrightarrow qx < p < qy$. Il suffit donc que $qy - qx > 1$.