CHAPITRE 12 ESPACES VECTORIELS

PARTIE 12.1 : STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

12.1.1 : Définition d'un espace vectoriel

$\odot$ Quand vous étiez petits, vous ajoutiez des vecteurs du plan, vous les multipliiez par des réels ; pourquoi ne pas faire pareil avec d'autres objets et profiter de cette analogie ?

Définition 12.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (ses éléments seront appelés les **scalaires***), E un ensemble non vide (ses éléments seront appelée* **vecteurs** *mais notés sans flèche), s'il existe une loi interne $+$ et une loi externe $.$, c'est-à-dire $+ : E \times E \to E$ et $. : \mathbb{K} \times E \to E$ qui vérifient :*

- $(E, +)$ *est un groupe abélien (le neutre est noté 0_E).*
- $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}}.x = x$ *(pseudo-neutre).*
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$ *(pseudo-distributivité 1).*
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2,\ \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$ *(pseudo-distributivité 2).*
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$ *(pseudo-associativité).*

on dit que E est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel***.*

12.1.2 : Exemples et premières propriétés

EXEMPLE 12.1 :

- L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni des lois $+$ et $.$ naturelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dans lequel, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x}$, on a $\mathrm{ch} - \mathrm{sh} = f$ et $f = \exp - 2\,\mathrm{sh}$.
- L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ indexées par $\mathbb{N}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et, si on pose $u = (1, 2, 3, 4, \cdots)$ et $v = (1, 0, 1, 0, \cdots)$, on a l'égalité suivante : $u - 2.v = (-1, 2, 1, 4, 3, \cdots)$.
- L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel où l'on peut écrire, si $P = X^2 + i$ et $Q = iX + 2$: $2.P - i.Q = 2X^2 + X$.

REMARQUE 12.1 :

- *Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif alors si on prend dans $\mathbb{K}$ comme loi interne la loi $+$ du corps et comme loi "externe" la loi interne $\times$ du corps alors on munit $\mathbb{K}$ d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel : on dit qu'on le munit de sa structure vectorielle canonique.*
- *Plus généralement, si $\mathbb{L}$ est un sur-corps de $\mathbb{K}$ (corps commutatif) alors, avec les mêmes choix, $\mathbb{L}$ est muni naturellement d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

EXEMPLE 12.2 :

- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et encore un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
- Par exemple, $[2+i] = (1+i).[2+i] + (-2i+1).[1]$ est un calcul valide dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ alors qu'il est interdit dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ où l'on pourrait écrire $[2+i] = (2).[1-i] + (3).[i]$ (en crochets on a les vecteurs alors que les scalaires sont entre parenthèses).

Proposition 12.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ \lambda.0_E = 0_E,\ 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E,\ \lambda.(-x) = (-\lambda).x = -(\lambda.x)$ et $\lambda.x = 0_E \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E)$.

REMARQUE 12.2 :

• *Comme pour les structures de groupes et d'anneaux, si on dispose de deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* E *et* F*, alors on peut munir simplement* $E \times F$ *d'une structure d'espace vectoriel en posant les deux lois :* $+ : (E \times F)^2 \to E \times F$ *et* $. : \mathbb{K} \times (E \times F) \to E \times F$ *:*

$$\forall(\lambda, x, x', y, y') \in \mathbb{K} \times E^2 \times F^2,\ (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \ \text{ et } \ \lambda.(x, y) = (\lambda.x, \lambda.y)\,.$$

Les vérifications sont laissées à l'élève méticuleux(se). Le neutre est bien sûr $0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$.

• *Bien sûr, on peut généraliser ce procédé de construction à* $n \geqslant 3$ $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* $E_1, \cdots E_n$ *pour créer* $E_1 \times \cdots \times E_n$*. Si on prend* $E_1 = \cdots = E_n = E$*, on notera* E^n *l'espace* $E \times \cdots \times E$.

EXEMPLE 12.3 : $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et $3.(1, 3, 2) + 2.(2, 1, 0) = (7, 11, 6)$.

PARTIE 12.2 : SOUS-ESPACES VECTORIELS

12.2.1 : Définition et caractérisation

Définition 12.2

Soit $\mathbb{K}$ *un corps commutatif et* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $F \subset E$*, on dit que* F *est un* **sous-** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** *(en abrégé* **sous-espace vectoriel** *ou même sev) si :*

- $F \neq \emptyset$.
- $\forall(x, y) \in F^2,\ x + y \in F$ *(*F *est stable par* $+$*).*
- $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F,\ \lambda.x \in F$ *(*F *est stable par* $.$*).*

REMARQUE 12.3 : • $\{0_E\}$ *et* E *sont bien sûr deux sous-espaces vectoriels d'un espace* E.

• *On peut aussi dire que* F *est un sous-espace vectoriel d'un espace* E *si et seulement si* F *est stable par* $.$ *et* F *est un sous-groupe de* E *(pour la loi* $+$ *bien sûr).*

Proposition 12.2

Si $\mathbb{K}$ **est un corps commutatif et si** F **est un sous-espace vectoriel d'un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** E**, alors** F **est lui-même un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel.**

EXEMPLE 12.4 :

• Si on prend le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors les fonctions paires constituent un sous-espace de E, comme les fonctions impaires, continues, constantes, dérivables, bornées mais pas les fonctions monotones par exemple.

• Si on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$ alors les suites bornées, convergentes, stationnaires constituent à chaque fois un sous-espace vectoriel.

• $i\,\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ car $i\,\mathbb{R} \neq \emptyset$ et si $(iy, iy') \in (i\,\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $iy + iy' = i(y + y') \in i\,\mathbb{R}$ et $\lambda.(iy) = i(\lambda y) \in i\,\mathbb{R}$; par contre $i\,\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ car $i \in i\,\mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$ mais $i.i = -1 \notin i\,\mathbb{R}$.

Proposition 12.3

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a l'équivalence entre :

(i) F **est un sous-espace vectoriel de** E**.**

(ii) $F \neq \emptyset$ **et** $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(x, y) \in F^2,\ \lambda.x + \mu.y \in F$**.**

(iii) $F \neq \emptyset$ **et** $\forall\lambda \in \mathbb{K},\ \forall(x, y) \in F^2,\ \lambda.x + y \in F$**.**

EXEMPLE 12.5 : Montrons que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ est un sev de $E = \mathbb{R}^3$.

12.2.2 : Sous-espace engendré par une partie

Définition 12.3

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $(x_1, \cdots, x_p) \in E^p$ *; on appelle* **combinaison linéaire** *de* $x_1, \cdots, x_p$ *tout vecteur* x *de* E *qui peut s'écrire* $x = \lambda_1.x_1 + \cdots + \lambda_p.x_p$ *avec* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.
On note $\mathsf{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ *l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs* $x_1, \cdots, x_p$*, c'est-à-dire qu'on a la relation* $\mathsf{Vect}(x_1, \cdots, x_p) = \{ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \mid (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \}$.

EXEMPLE 12.6 **:** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^3$ et qu'on prend $x_1 = (1, 1, 0)$ et $x_2 = (1, 2, 0)$ alors il s'agit de montrer que $\mathsf{Vect}(x_1, x_2) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \}$.

Définition 12.4

Soit x *et* y *deux vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, on dit que* x *et* y *sont* **colinéaires** *s'il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $x = \lambda y$ *ou* $y = \lambda x$.

Proposition 12.4

Avec les notations ci-dessus, $\mathsf{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ **est un sous-espace de** E**.**

REMARQUE 12.4 : Généralisons cette notion à une famille quelconque de vecteurs de E.

Soit donc une famille $(x_i)_{i \in I}$ *de vecteurs de* E*, on appelle alors combinaison linéaire de cette famille tout vecteur* x *de* E *qui peut s'écrire* $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ *où la famille de scalaires* $(\lambda_i)_{i \in I}$ *vérifie nécessairement (sous peine de ne pas pouvoir définir la somme précédente)* $J = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_K\}$ *est fini de sorte que* $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ *s'interprète comme étant* $x = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i$ *(car* $0_{\mathbb{K}}.x_i = 0_E$ *est neutre pour l'addition).*

Une telle famille de scalaires est dite **à support fini** *et on note* $\mathbb{K}^{(I)}$ *l'ensemble de toutes les familles à support fini. On définit alors comme ci-dessus l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs* $(x_i)_{i \in I}$*, noté encore* $\mathsf{Vect}\big((x_i)_{i \in I}\big) = \{ x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \mid (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \}$.

REMARQUE 12.5 : On appelle **relation linéaire** *entre les vecteurs* $x_1, \cdots, x_p$ *toute combinaison linéaire de ces vecteurs qui donne* 0_E *avec des scalaires non tous nuls.*

EXEMPLE 12.7 **:** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$ et qu'on pose $x_1 = (1, 3, 1)$, $x_2 = (-1, 2, 0)$ et $x_3 = (1, 8, 2)$ alors on a une relation linéaire liant ces trois vecteurs.

Proposition 12.5

Soit E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel et** $(F_i)_{i \in I}$ **une famille de sous-espaces de** E**, alors** $\bigcap_{i \in I} F_i$ **est aussi un sous-espace vectoriel de** E**.**

Définition 12.5

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A *une partie de* E *; l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *qui contiennent* A *est lui-même un sous-espace vectoriel de* E *qui contient* A*, c'est le plus petit au sens de l'inclusion parmi tous les sous-espaces vectoriels contenant* A *et on l'appelle le* **sous-espace vectoriel de** E **engendré par** A*, noté* $\mathsf{Vect}(A)$.

REMARQUE 12.6 : On a bien sûr : A *est un sous-espace de* $E \iff A = \mathsf{Vect}(A)$.

Méthode

Soit E un espace vectoriel, A, F deux parties de E. Pour montrer que $F = \mathrm{Vect}(A)$:
- **Montrer que tout sous-espace de E qui contient A contient aussi F.**
- **Montrer que F est bien un sous-espace vectoriel de E.**

Théorème 12.1

Si $A = \{x_1, \cdots, x_p\}$ est finie, alors les deux notions de Vect coïncident, à savoir que l'on a $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p) = \mathrm{Vect}(\{x_1, \cdots, x_p\})$ au sens des définitions 12.3 et 12.5.

EXEMPLE 12.8 : Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si on pose $f : x \mapsto 1$ la fonction constante égale à 1 et $g : x \mapsto x$ la fonction identité, que vaut $\mathrm{Vect}(f, g)$?

12.2.3 : Sommes et supplémentaires

Définition 12.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E, on définit **la somme de F et G**, *notée $F+G$, par $F + G = \{z \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G,\ z = x + y\}$.*

REMARQUE 12.7 : Si $(x_1, \cdots, x_{p+q})$ est une famille de vecteurs d'un espace E, alors il est facile de vérifier que $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p) + \mathrm{Vect}(x_{p+1}, \cdots, x_{p+q}) = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_{p+q})$.

Proposition 12.6

Avec ces notations, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 12.7

Si F, G, H sont des sous-espaces d'un espace E, alors :
- $F + \{0_E\} = \{0_E\} + F = F$ **($\{0_E\}$ est neutre pour $+$ dans ce contexte).**
- $F + G = G + F$ **($+$ est commutative).**
- $F + (G + H) = (F + G) + H$ **($+$ est associative).**
- $F \subset G \Longrightarrow (F + H) \subset (G + H)$ **($+$ est compatible avec $\subset$).**
- $F \subset F + G$ **et** $G \subset F + G$ **et** $F + F = F$ **(pas d'opposé pour $+$).**
- $F + G = F \Longleftrightarrow G \subset F$ **(seul $\{0_E\}$ est régulier pour $+$).**
- $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$ **($F \cup G$ n'est pas en général un sous-espace : c'est réparé).**

REMARQUE 12.8 : L'ensemble des sous-espaces de E n'est donc pas un groupe pour cette loi $+$.

Définition 12.7

Soit F et G deux sous-espaces d'un espace E, on dit que :
- *F et G sont* **en somme directe** *si $F \cap G = \{0_E\}$, on note alors $F + G = F \oplus G$.*
- *F et G sont* **supplémentaires** *dans E si $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$, on note alors $E = F \oplus G$.*

EXEMPLE 12.9 : Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que dire de F et G si :
- F est le sous-espace des fonctions à limite nulle en $+\infty$ et G est celui des fonctions 2π-périodiques ?
- F est le sous-espace des fonctions paires et G celui des fonctions impaires ?

Proposition 12.8

Avec les mêmes notations, on a l'équivalence pratique suivante :

$$F \oplus G = E \iff \forall z \in E,\ \exists! (x, y) \in F \times G,\ z = x + y\,.$$

EXEMPLE 12.10 : Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$. Montrons que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

PARTIE 12.3 : APPLICATIONS LINÉAIRES

12.3.1 : Définition et caractérisation

Définition 12.8

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on dit qu'une application $f : E \to F$ est une **application $\mathbb{K}$-linéaire** *(en abrégé* **application linéaire***) si :*

$$\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda.x) = \lambda.f(x).$$

EXEMPLE 12.11 :

- Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles dérivables. Alors $D : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par : $\forall f \in E,\ D(f) = f'$ est linéaire.
- Dans le $\mathbb{C}$-espace $\mathbb{C}$, la conjugaison n'est pas une application $\mathbb{C}$-linéaire.

Définition 12.9

Avec ces notations, on dit que l'application linéaire f est :

- *une* **forme linéaire** *si $F = \mathbb{K}$.*
- *un* **endomorphisme** *de E si $F = E$.*
- *un* **isomorphisme** *si f est bijective.*
- *un* **automorphisme** *de E si $F = E$ et f bijective (bien sûr id_E en est un).*

On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ ou plus simplement $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F ; $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble de tous les endomorphismes de E, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les formes linéaires et enfin $GL(E)$ l'ensemble de tous les automorphismes de E.

EXEMPLE 12.12 : Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ est un automorphisme qui vérifie $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^3}$ s'il est défini par : $\forall(x, y, z) \in \mathbb{C}^3,\ f(x, y, z) = (y, z, x)$.

Proposition 12.9

Pour f linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F : $f(0_E) = 0_F$ et $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$.

REMARQUE 12.9 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $(x_1, \cdots, x_p) \in E^p$, $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, alors l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : $f\Big(\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k f(x_k)$.

Proposition 12.10

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ (la linéarité se conserve par composition).

REMARQUE 12.10 : Bien sûr, la composée de deux isomorphismes en est encore un, la composée de deux endomorphismes en est aussi un, la composée de deux automorphismes en est toujours un.

Proposition 12.11

Avec les notations précédentes, on a l'équivalence entre :

(i) **f est une application linéaire de E dans F.**

(ii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(x, y) \in E^2,\ f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$**.**

(iii) $\forall\lambda \in \mathbb{K},\ \forall(x, y) \in E^2,\ f(\lambda.x + y) = \lambda.f(x) + f(y)$**.**

EXEMPLE 12.13 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Proposition 12.12

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme, alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi un isomorphisme. De même, la réciproque d'un automorphisme en est aussi un.

EXEMPLE 12.14 : Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f \circ f(x, y) = \big(x + y + x - y, x + y - (x - y)\big) = (2x, 2y)$ si on reprend l'exemple précédent, donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et $f^{-1}(x, y) = \left(\dfrac{x + y}{2}, \dfrac{x - y}{2}\right)$.

12.3.2 : Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 12.13

Soit f une application linéaire de E dans F, alors :
- **si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, on a $\widehat{f}(E_1)$ est un sev de F.**
- **si F_1 est un sous-espace vectoriel de F, on a $f^{<-1>}(F_1)$ est un sev de E.**

REMARQUE 12.11 : Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et F un sous-espace de E, on dit que F est **stable** *par f (ou f-stable) si $\widehat{f}(F) \subset F$. Cela nous permet alors de définir la* **corestriction** *de f à F, c'est $f||_F : F \to F$ définie par : $\forall x \in F$, $f||_F(x) = f(x)$. On a bien sûr $f||_F \in \mathcal{L}(F)$.*

Définition 12.10

Si f est une application linéaire de E dans F, on appelle **noyau** *de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, la partie de E définie par $\mathrm{Ker}(f) = f^{<-1>}(\{0_F\})$; on appelle* **image** *de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, la partie $\mathrm{Im}(f) = \widehat{f}(E)$ de F.*

Théorème 12.2

Avec ces notations :
- **$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et de plus, f injective $\iff$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.**
- **$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et de plus, f surjective $\iff$ $\mathrm{Im}(f) = F$.**

EXEMPLE 12.15 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + z, y - z, x + y)$; f est bien entendu linéaire, on va déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 12.14

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et deux applications linéaires $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors nous avons l'équivalence pratique : $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

12.3.3 : Ensembles d'applications linéaires

REMARQUE 12.12 : On définit dorénavant dans $\mathcal{L}(E, F)$ deux lois : pour deux applications linéaires f et g de E dans F (bien sûr E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif) et $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$f + g : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{array} \qquad \alpha.f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x) \end{array}$$

On vérifie sans trop de peine que $+$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{L}(E, F)$ et que . est une loi externe, c'est-à-dire que les applications $f + g$ et $\alpha.f$ ainsi créées sont bien linéaires.

Théorème 12.3

- **$(\mathcal{L}(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.**
- **$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (si $E \neq \{0_E\}$).**
- **$(GL(E), \circ)$ est un groupe.**

REMARQUE 12.13 : On ne peut rien dire de spécial sur les isomorphismes entre E et F, à part que si f est un isomorphisme de E dans F et $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $(\lambda.f)^{-1} = \lambda^{-1}.f^{-1}$.

PARTIE 12.4 : PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

12.4.1 : Affinité

Définition 12.11

*Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E (soit $E = F \oplus G$) et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire. On définit alors l'***affinité par rapport à F, parallèlement à G et de rapport α***, notée $a_{F,G,\alpha}$, par : $\forall (y,z) \in F \times G,\ a_{F,G,\alpha}(y+z) = y + \alpha.z$.*

Proposition 12.15

Avec ces notations, $a_{F,G,\alpha}$ est un endomorphisme de E.
On a même, si $G \neq \{0_E\}$: $a_{F,G,\alpha} \in GL(E) \iff \alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ et dans ce cas, $(a_{F,G,\alpha})^{-1} = a_{F,G,\alpha^{-1}}$.

Définition 12.12

Une **homothétie** *de E est une affinité par rapport à $\{0_E\}$ parallèlement à E, donc de la forme $h_\alpha : E \to E$ définie par : $\forall x \in E,\ h_\alpha(x) = \alpha.x$ (homothétie de rapport α), soit $h_\alpha = \alpha.\mathrm{id}_E$.*

Proposition 12.16

On a : $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ h_\alpha \in \mathcal{L}(E)$ et même, si $E \neq \{0_E\}$: $h_\alpha \in GL(E) \iff \alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ et alors $h_\alpha^{-1} = h_{\alpha^{-1}}$.
On a aussi : $\forall (\alpha,\beta,\lambda) \in \mathbb{K}^3,\ h_\alpha + h_\beta = h_{\alpha+\beta}$, $h_\alpha \circ h_\beta = h_{\alpha\beta}$, $\lambda.h_\alpha = h_{\lambda\alpha}$ de sorte qu'en notant $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de E, on a $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, mais aussi un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

REMARQUE 12.14 : Si $E \neq \{0_E\}$, l'application $\varphi : \mathbb{K} \to \mathcal{H}$ définie par : $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \varphi(\alpha) = h_\alpha$ est donc clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels, mais aussi un isomorphisme d'anneaux, et sa restriction à $\mathbb{K}^*$ au départ et à $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ à l'arrivée devient un isomorphisme de groupes.

12.4.2 : Projection

Définition 12.13

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E (soit $E = F \oplus G$), on appelle **projection** *sur F parallèlement à G, notée $p_{F,G}$, l'affinité correspondante de rapport 0. On a donc : $\forall (y,z) \in F \times G,\ p_{F,G}(y+z) = y$.*

Théorème 12.4

Avec ces notations, on a les résultats suivants :
- **$p_{F,G} \in \mathcal{L}(E)$ et $p_{F,G} \circ p_{F,G} = p_{F,G}$ ($p_{F,G}$ est idempotent dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$).**
- **F et G sont stables par $p_{F,G}$ et $p_{F,G}|_F = \mathrm{id}_F$, $p_{F,G}|_G = 0$ (application nulle).**
- **$\mathrm{id}_E - p_{F,G} = p_{G,F}$ (on dit que ces deux projections sont associées).**
- **$F = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - p_{F,G}) = \mathrm{Im}(p_{F,G})$ et $G = \mathrm{Ker}(p_{F,G}) = \mathrm{Im}(\mathrm{id} - p_{F,G})$.**

***EXEMPLE 12.16* :** Quelle est l'expression analytique de la projection p sur la droite $D : y = x$ parallèlement à la droite $D' : x = 0$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Définition 12.14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle **projecteur** *de E un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p \circ p = p$ (donc un élément idempotent de l'anneau $\mathcal{L}(E)$).*

Théorème 12.5

Un projecteur p de E est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
Plus précisément : $\forall x \in E,\ x = \big(x - p(x)\big) + \big(p(x)\big)$ avec $\big(p(x), x - p(x)\big) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$.

REMARQUE 12.15 : Un projecteur p n'est un automorphisme que si p est l'identité de l'espace.

EXEMPLE 12.17 : Caractériser $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ p(x,y,z) = (x,y,x)$.

12.4.3 : Symétrie

Définition 12.15

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E (soit $E = F \oplus G$), on appelle **symétrie** *par rapport à F parallèlement à G , notée $s_{F,G}$, l'affinité correspondante de rapport -1. On a donc : $\forall (y,z) \in F \times G,\ s_{F,G}(y+z) = y - z$.*

REMARQUE 12.16 : Pour se représenter géométriquement une symétrie $s_{F,G}$, on peut la relier à la projection $p_{F,G}$ correspondante en constatant que : $s_{F,G} = 2p_{F,G} - \mathrm{id}_E$.

Théorème 12.6

Avec ces notations, on a les résultats suivants :

- **$s_{F,G} \in GL(E)$ et $s_{F,G} \circ s_{F,G} = \mathrm{id}_E$ ($s_{F,G}$ est involutif dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$).**
- **F et G sont stables par $s_{F,G}$ et $s_{F,G}||_F = \mathrm{id}_F$, $s_{F,G}||_G = -\mathrm{id}_G$; de plus $-s_{F,G} = s_{G,F}$.**
- **$F = \mathrm{Ker}(s_{F,G} - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(s_{F,G} + \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s_{F,G} + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(s_{F,G} - \mathrm{id}_E)$.**

EXEMPLE 12.18 : Quelle est l'expression analytique de la symétrie s de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan $P : x + y + z = 0$ parallèlement à la droite D engendrée par le vecteur $(1,0,1)$?

Théorème 12.7

Si s est une involution linéaire de E alors c'est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. De plus, on dispose de la décomposition associée à cette symétrie : $\forall x \in E,\ x = \left(\dfrac{x + s(x)}{2}\right) + \left(\dfrac{x - s(x)}{2}\right)$ avec $\left(\dfrac{x + s(x)}{2}, \dfrac{x - s(x)}{2}\right) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration : Il suffit de constater que $p = \dfrac{s + \mathrm{id}_E}{2}$ est un projecteur sur et parallèlement à ces mêmes sous-espaces et que $s = 2p - \mathrm{id}_E$ est la symétrie associée.

EXEMPLE 12.19 : Caractériser $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ s(x,y,z) = (x,-z,-y)$.

PARTIE 12.5 : STRUCTURE AFFINE

12.5.1 : Translations et sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Définition 12.16

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $a \in E$; la **translation** *de vecteur a est l'application $t_a : E \to E$ définie par $\forall x \in E,\ t_a(x) = a + x$.*
L'image (directe) d'un sous-espace vectoriel F de E par t_a est noté $a + F = \{a + x \mid x \in F\}$: une telle partie de E est appelée **sous-espace affine** *de E.*

EXEMPLE 12.20 **:** Dans le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^2$, la partie $\mathcal{F} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 1 \}$ est un sous-espace affine car c'est l'image par la translation de vecteur $a = (1, 0)$ de $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \}$.

Proposition 12.17

Si a et b sont deux vecteurs d'un espace E et F et G en sont deux sous-espaces vectoriels alors on a les équivalences suivantes pour les sous-espaces affines :
$(a + F \subset b + G) \Longleftrightarrow (F \subset G$ **et** $b - a \in G)$ **ce qui implique** $(a + F = b + G) \Longleftrightarrow (F = G$ **et** $b - a \in F)$**.**

Définition 12.17

Si on a un sous-espace affine $\mathcal{F}$, il existe donc un unique sous-espace vectoriel F et il existe $a \in E$ (pas forcément unique) tel que $\mathcal{F} = a + F$: on appelle F le **sous-espace directeur** *de $\mathcal{F}$.*

Proposition 12.18

Si a et b sont deux vecteurs d'un espace E et F un sous-espace vectoriel alors on a l'équivalence suivante : $(a + F = b + F) \Longleftrightarrow (b \in a + F)$**.**

Définition 12.18

Soit deux sous-espaces affines $\mathcal{F} = a + F$ et $\mathcal{G} = b + G$, on dit que $\mathcal{F}$ est **parallèle à** *$\mathcal{G}$ si $F \subset G$; on dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$* **sont parallèles** *si $F = G$.*

REMARQUE 12.17 : La relation "être parallèle à" n'est rien de spécial alors que la relation "sont parallèles" est d'équivalence.

Proposition 12.19

L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathcal{F} = a + F$ et $\mathcal{G} = b + G$ d'un espace vectoriel E est soit vide, soit c'est un sous-espace affine dont le sous-espace directeur est l'intersection des sous-espaces directeurs F et G de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$. On dispose des critères :
- **Si $F + G = E$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide.**
- **Si $F \oplus G = E$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un seul vecteur.**

REMARQUE 12.18 : En notant $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ le sous-espace directeur d'un sous-espace affine $\mathcal{F} = a + F$, la proposition précédente peut se traduire, dans le cas où $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, par : $\overrightarrow{\mathcal{F} \cap \mathcal{G}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \cap \overrightarrow{\mathcal{G}}$.

Proposition 12.20

L'intersection de tous les sous-espaces affines de E qui contiennent une partie $A \neq \emptyset$ de E est un sous-espace affine appelé le sous-espace affine engendré par A.

12.5.2 : Enfin des points

REMARQUE 12.19 :
- *On peut aussi considérer les vecteurs de l'espace vectoriel E comme des points (notés avec des grandes lettres) : on note cet ensemble des points $\mathcal{E}$; pour qu'on ait la structure affine entrevue dans le plan, on définit une loi $+$ entre les points et les vecteurs : c'est la loi $+$ de E, en effet pour $(A, u) \in \mathcal{E} \times E$, on définit $A + u$ comme la somme des vecteurs A et u.*
- *On retrouve alors les axiomes d'un espace affine :*
  - $\forall A \in \mathcal{E},\ A + 0_E = A$ *(normal car 0_E neutre pour $+$ dans E).*
  - $\forall (A, u, v) \in \mathcal{E} \times E^2,\ (A + u) + v = A + (u + v)$ *(normal car $+$ associatif dans E).*
  - $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2,\ \exists! u \in E,\ A + u = B$ *(c'est $\overrightarrow{AB} = B - A$ car $(E, +)$ est un groupe).*
- *On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et aussi $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ (Michel* CHASLES *: mathématicien français 1793-1880).*
- *Pour un point donné A, l'application $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est une bijection entre $\mathcal{E}$ et E dont la bijection réciproque est $v \mapsto A + v$; ceci permet, en choisissant une origine, d'"identifier" les points et les vecteurs.*

12.5.3 : Barycentres et convexité

⊙ Étant donnés des points $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et des scalaires $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, si la somme $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, on montre comme pour les points du plan qu'il existe un unique point G tel qu'on ait $\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{GA_i} = 0_E$.

Définition 12.19

Avec ces notations G est appelé le **barycentre** *des points $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ affectés des coefficients $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, noté $G = \mathrm{bar}\Big((A_1, a_1), \cdots, (A_n, a_n)\Big)$ ou $G = \sum_{i=1}^{n} a_iA_i$ (abus de notation).*
Si $a_1 = \cdots = a_n$, ce barycentre est appelé **isobarycentre** *ou centre de gravité.*

Proposition 12.21

Avec ces notations, on a encore l'équivalence entre :
- **G est le barycentre des points $A_1, \cdots, A_n$ affectés des coefficients $a_1, \cdots, a_n$.**
- **$\forall M \in \mathcal{E},\ \sum_{k=1}^{n} a_k\overrightarrow{MA_k} = s\overrightarrow{MG}$.**

REMARQUE 12.20 : • Comme dans le plan, on a l'"associativité" et la "commutativité" du barycentre.

• Soit A et B deux points de $\mathcal{E}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on note $[AB] = \{\, tA + (1-t)B \mid t \in [0;1] \,\}$ le segment entre A et B, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres de A et B avec des coefficients positifs.

Définition 12.20

Soit $\Gamma \subset \mathcal{E}$, on dit que Γ est **convexe** *si : $\forall (A, B) \in \Gamma^2,\ [AB] \subset \Gamma$.*

PARTIE 12.6 : ALGÈBRES (HP)

Définition 12.21

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un ensemble non vide muni de deux lois internes $+$ et $\times$ et d'une loi externe ., on dit que $(E, +, ., \times)$ est une **$\mathbb{K}$-algèbre** *si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si $(E, +, \times)$ est un anneau et si, en plus : $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2,\ (\lambda.x) \times y = \lambda.(x \times y) = x \times (\lambda.y)$.*

EXEMPLE 12.21 : • $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative et non intègre.
- Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, $(\mathbb{K}, +, \times, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative et intègre.
- $(\mathbb{C}[X], +, ., \times)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative et intègre.
- $(\mathcal{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative et non intègre si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 12.22

Avec ces notations, si $A' \subset A$, on dit que A' est une **sous-algèbre** *de A, si A' est un sous-espace vectoriel de A et un sous-anneau de A.*

EXEMPLE 12.22 : • Les fonctions bornées constituent une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Les homothéties forment une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
- L'ensemble des polynômes pairs est une sous-algèbre de $\mathbb{C}[X]$.

REMARQUE 12.21 : On a les notions habituelles de sous-algèbre engendrée par une partie, de morphismes d'algèbres, d'isomorphismes, d'endomorphismes et d'automorphismes, les images directes et réciproques de sous-algèbres par des morphismes d'algèbres en sont aussi.