CHAPITRE 13
SUITES

PARTIE 13.1 : TERMINOLOGIE

13.1.1 : Présentation des suites

REMARQUE 13.1 :
- *Une suite de réels ou de complexes est une famille (de réels ou de complexes) indexée par des entiers, c'est-à-dire a priori un élément* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *ou de* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- *On pourra donner des noms aux suites, c'est-à-dire poser* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de manière à abréger.*
- *On peut aussi définir des suites par des relations plus générales que le classique* $u_{n+1} = f(u_n)$ *comme pour la suite de* FIBONACCI *(Leonardo* FIBONACCI *: mathématicien italien 1175-1250)* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $F_0 = F_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Définition 13.1

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe et* $p \in \mathbb{N}^*$*, on dit que* u *est :*
- **constante** *si* $\exists a \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a$.
- **stationnaire** *si* $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists a \in \mathbb{C},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n = a$.
- p**-périodique** *si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.
- **bornée** *si* $\exists m \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |un| \leqslant m$.

De plus, si les suites sont réelles, on a les définitions supplémentaires :
- **croissante** *(resp.* **décroissante***) si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ *(resp.* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$*).*
- **strictement croissante** *(resp.* **str. décr.***) si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$ *(resp.* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$*).*
- **majorée** *(resp.* **minorée***) si* $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant m$ *(resp.*$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$*).*

Proposition 13.1

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite réelle :** $\big(u$ **est bornée**$\big) \iff \big(u$ **est minorée et majorée**$\big)$**.**

13.1.2 : Structure de l'ensemble des suites

REMARQUE 13.2 : Sur les ensembles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *(resp.* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*) des suites réelles (resp. complexes), on définit les lois internes + et × et la loi externe . par :* $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *(avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) :*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \lambda.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Proposition 13.2

$(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, ., \times)$ **est une algèbre commutative et non intègre.**

REMARQUE 13.3 :
- *Les suites constantes constituent une sous-algèbre de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*, comme le font les suites* p*-périodiques, autant que les suites stationnaires, ou encore les suites bornées (notées* $\mathcal{B}$*).*
- *Si on pose, pour une suite* u *bornée :* $||u||_\infty = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$*, alors on définit une* **norme d'algèbre***, c'est-à-dire une application de* $\mathcal{B}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *et qui vérifie,* $\forall(\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times \left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2$ *:*

$||u||_\infty = 0 \iff u = 0$, $||\lambda u||_\infty = |\lambda|\ ||u||_\infty$, $||u + v||_\infty \leqslant ||u||_\infty + ||v||_\infty$ *et* $||u \times v||_\infty \leqslant ||u||_\infty \times ||v||_\infty$.

13.1.3 : Suites extraites

Définition 13.2

Soit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** *de u s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.*

EXEMPLE 13.1 **:**

- La suite $u = (u_2, u_3, u_5, u_7, \cdots)$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car elle correspond à la fonction $\varphi : n \mapsto p_{n+1}$ où p_{n+1} est le $(n+1)$-ième nombre premier.
- La suite constante $\left(\frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite 6-périodique $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ car elle correspond à la fonction $\varphi : n \to 6n+1$ qui est bien strictement croissante.

REMARQUE 13.4 :
- *Pour une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante comme dans la définition précédente, on montre facilement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.*
- *De plus, une suite extraite d'une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en est elle-même extraite et peut s'écrire $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est extraite de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est elle-même extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

EXEMPLE 13.2 **:** La suite $(u_{6n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ mais pas de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

PARTIE 13.2 : CONVERGENCE DE SUITES COMPLEXES

13.2.1 : Définition et propriétés

Définition 13.3

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$, on dit que la suite u admet pour **limite** *ℓ ou que u* **tend vers** *ℓ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Une telle suite sera dite* **convergente** *(vers ℓ). On dira qu'une suite est* **divergente** *si elle ne tend vers aucun complexe.*

REMARQUE 13.5 : • *Les suites constantes $u = (a)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien sûr convergentes vers a.*
- *On peut constater une fois pour toutes l'équivalence :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 13.3

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(\ell, \ell') \in \mathbb{C}^2$, si u admet pour limite ℓ et ℓ', alors $\ell = \ell'$.

Définition 13.4

Soit u une suite complexe convergente, alors si $\ell \in \mathbb{C}$ est l'unique complexe tel que u admet pour **limite** *ℓ, on pose $\ell = \lim\limits_{+\infty} u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ou tend) vers ℓ.*

Proposition 13.4

Si v est une suite extraite d'une suite convergente u alors v l'est aussi et $\lim\limits_{+\infty} v = \lim\limits_{+\infty} u$.

REMARQUE 13.6 : Cette proposition sert surtout à établir qu'une suite u est divergente, pour arriver à cette conclusion il suffit d'exhiber de u une suite extraite évidemment divergente ou deux suites extraites convergeant vers des limites différentes.

Proposition 13.5

Soit u une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$ tels que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers ℓ, alors la suite u tend vers ℓ.

EXEMPLE 13.3 **:** Soit u une suite complexe telle que les trois suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Alors u converge.

Proposition 13.6

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$, alors on dispose de :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$ **; et** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$**.**

REMARQUE 13.7 : La réciproque de cette dernière implication est fausse.

Proposition 13.7

Toute suite convergente est bornée.

Proposition 13.8

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant v_n$. Alors : $\lim\limits_{+\infty} v = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} u = 0$.

EXEMPLE 13.4 **:** Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \cdots$ grâce aux intégrales.

Proposition 13.9

Soit une suite réelle u qui converge vers un réel strictement positif ℓ, si on se donne un réel $a \in]0,\ell[$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant a > 0$.

13.2.2 : Opérations sur les suites convergentes

Proposition 13.10

La somme de deux suites complexes tendant vers 0 fait de même. De plus, le produit d'une suite tendant vers 0 et d'une suite bornée tend encore vers 0.

Théorème 13.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes convergentes, $\lambda \in \mathbb{C}$ un scalaire :

La suite $u+v$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

La suite $u \times v$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

La suite $\lambda.u$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda.u_n) = \lambda. \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

De plus, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe non nul, le complexe $\dfrac{1}{v_n}$ existe à partir d'un certain rang n_0 et $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers le complexe $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$.

Avec les mêmes notations, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge et l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$.

REMARQUE 13.8 : • *La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est donc divergente.*

• *L'ensemble C des suites convergentes est une sous-algèbre de celle des suites, C est une sous-algèbre des suites bornées et C contient la sous-algèbre des suites stationnaires.*

• *Ce théorème justifie aussi que l'application $\lim\limits_{n\to+\infty}$ est un morphisme d'algèbres de C dans $\mathbb{C}$.*

• *Nous avons par ailleurs, et sans utiliser la continuité, un résultat pratique : si un suite réelle positive tend vers $\ell \geqslant 0$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{\ell}$; il suffit de distinguer selon que $\ell = 0$ ou $\ell > 0$.*

PARTIE 13.3 : SUITES TENDANT VERS L'INFINI

13.3.1 : Définition des suites réelles tendant vers l'infini

Définition 13.5

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle, on dit que* u **tend vers** $+\infty$*, qu'on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*, si l'on a :* $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant a$*. De même, on dit que* u **tend vers** $-\infty$*, qu'on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*, si l'on a :* $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant a$*.*

EXEMPLE 13.5 : On montre sans difficulté que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-e^n) = -\infty$.

REMARQUE 13.9 :
- *Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée, de même qu'une suite qui tend vers $-\infty$ ne peut pas être minorée ; une suite qui tend vers $\pm\infty$ ne peut donc pas être convergente : on dira qu'elle tend vers $\pm\infty$. De même, une suite tendant vers $+\infty$ ne tend pas vers $-\infty$.*
- *On dira qu'une suite réelle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si elle converge (au sens usuel) ou si elle tend vers $\pm\infty$. De sorte qu'avec ce qui précède, il y a aussi unicité de la limite pour les suites convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

13.3.2 : Opérations sur ces suites

Théorème 13.2

On se donne deux suites réelles et un réel λ, on peut contempler le tableau suivant où dans les colonnes on trouve les éventuelles limites des suites dont le nom est en haut ($u+v$, uv, λu ou $\frac{1}{u}$) en fonction de celles dont la limite est supposée (u et v) et d'une constante réelle λ.

Quand il y a des points d'interrogation c'est que plusieurs cas peuvent se présenter et qu'on ne peut pas conclure avec ces seules informations sur λ, u et v.

Bien sûr, dans le tableau ci-contre ℓ et ℓ' sont des réels ce qui fait que ce tableau reprend les limites des suites convergentes.

u	v	λ	$u+v$	$u\times v$	$\lambda.u$	$\frac{1}{u}$
ℓ	ℓ'	λ	$\ell+\ell'$	$\ell\ell'$	$\lambda\ell$	?
$\ell>0$	$+\infty$	λ	$+\infty$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$\frac{1}{\ell}$
0	$+\infty$	λ	$+\infty$	?	0	?
$\ell<0$	$+\infty$	λ	$+\infty$	$-\infty$	$\lambda\ell$	$\frac{1}{\ell}$
$\ell>0$	$-\infty$	λ	$-\infty$	$-\infty$	$\lambda\ell$	$\frac{1}{\ell}$
0	$-\infty$	λ	$-\infty$	?	0	?
$\ell<0$	$-\infty$	λ	$-\infty$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$\frac{1}{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$	$\lambda>0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	$-\infty$	0	?	$-\infty$	0	0
$-\infty$	$+\infty$	$\lambda>0$	?	$-\infty$	$-\infty$	0
$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	0	0

REMARQUE 13.10 : Il convient de se constituer une petite liste de contre-exemples pour chaque "?".

EXEMPLE 13.6 : Si on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les deux suites :
- $u_n = n^2$, $v_n = \frac{1}{n}$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_nv_n = +\infty$.
- $u_n = n$, $v_n = \frac{1}{n^2}$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_nv_n = 0$.
- $u_n = n$, $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors que $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

PARTIE 13.4 : EXISTENCE DE LIMITES DE SUITES

13.4.1 : Convergence et ordre

Définition 13.6

Pour deux suites réelles u et v, on dira que $u \leqslant v$ si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

REMARQUE 13.11 : On vérifie facilement que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur les suites réelles, mais elle n'est plus totale car les suites $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas comparables.

Proposition 13.11

Soit u et v deux suites réelles convergentes : $u \leqslant v \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} u \leqslant \lim\limits_{+\infty} v$.

REMARQUE 13.12 :

- *Bien sûr, on a la même conclusion si l'on n'a que : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$.*
- *La proposition précédente signifie en résumé que la fonction limite est une fonction croissante (mais pas strictement) de l'ensemble des suites convergentes dans l'ensemble $\mathbb{R}$.*
- *L'hypothèse de convergence de ces suites est indispensable pour pouvoir conclure : on dit que les inégalités larges (et pas strictes) passent à la limite.*

EXEMPLE 13.7 : Si on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$, on a clairement $u < v$ (qui signifie que pour tout entier n on a $u_n < v_n$) et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Théorème 13.3

Soit u, v et w trois suites réelles qui vérifient la double inégalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ (il suffit que ceci soit vrai à partir d'un certain rang n_0), alors nous avons les implications suivantes connues sous le nom de "théorème des gendarmes" (ou "théorème de comparaison") classique ou en l'infini :

- $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}\right) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

REMARQUE 13.13 : La proposition 13.8 est un cas particulier de théorème des gendarmes (un des gendarmes est le commissariat lui-même).

13.4.2 : Limites des suites monotones

⊙ Toutes ces propriétés sont bien belles mais nécessitent l'hypothèse de convergence de certaines suites et c'est bien ça le plus délicat. Mais la propriété de la borne supérieure vient à la rescousse dans le cas des suites réelles monotones.

Théorème 13.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée, alors cette suite converge vers sa borne supérieure ; c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \mathrm{Sup}\left(\{\, u_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}\right)$.
Bien sûr, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante et minorée : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathop{\mathrm{Inf}}\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Théorème 13.5

On a l'alternative suivante pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante :

- **si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors elle converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.**
- **si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.**

De même, si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

- **si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée alors elle converge vers $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.**
- **si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.**

Proposition 13.12

Soit deux suites réelles u et v telles que u est croissante, v est décroissante, $u \leqslant v$, alors u et v sont convergentes vers ℓ et ℓ' respectivement et l'on a l'intersection infinie suivante : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [u_n; v_n] = [\ell; \ell']$ (c'est le théorème des segments emboîtés).

Définition 13.7

On dit que deux suites réelles u et v sont **adjacentes** *si on a les trois hypothèses : u est croissante, v est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.*

<u>REMARQUE 13.14</u> : Ces renseignements sur u et v impliquent immédiatement que $u \leqslant v$. En effet la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et tend vers 0, elle ne peut donc qu'être positive.

Théorème 13.6

Deux suites adjacentes u et v comme dans la définition précédente convergent vers la même limite ℓ et l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

<u>REMARQUE 13.15</u> : Si ces deux suites adjacentes ne sont pas stationnaires, alors on a même une double inégalité stricte : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < \ell < v_n$.

<u>EXEMPLE 13.8</u> : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$. Montrons que ces deux suites sont adjacentes et que leur limite commune est un nombre irrationnel.

13.4.3 : Théorème de Bolzano-Weierstrass réel

⊙ À présent le fameux théorème de Bolzano et Weierstass (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass : mathématicien allemand 1815-1897) : ce dernier a posé les définitions rigoureuses de la continuité et de la dérivabilité comme nous les connaissons aujourd'hui.

Théorème 13.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle bornée, alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de celle-ci qui converge.

<u>Démonstration</u> : Soit $m \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ -m \leqslant u_n \leqslant m$. Considérons les parties suivantes : $I_0^+ = \{\, n \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant u_n \leqslant m \,\}$ et $I_0^- = \{\, n \in \mathbb{N} \mid -m \leqslant u_n < 0 \,\}$. Alors il est clair que $I_0^+ \cup I_0^- = \mathbb{N}$, donc l'un de ces deux ensembles d'indices est infini. Si I_0^+ est infini, on pose $a_0 = 0$, $b_0 = m$ et $\varphi(0) = \mathrm{Min}(I_0^+)$; sinon c'est $a_0 = -m$, $b_0 = 0$ et $\varphi(0) = \mathrm{Min}(I_0^-)$. Et ceci n'est que la première étape d'une longue récurrence.

<u>REMARQUE 13.16</u> : Il est clair que les suites convergentes sont de Cauchy ; mais grâce à ce théorème, on peut établir en retour que les suites de Cauchy sont elles-mêmes convergentes.

PARTIE 13.5 : COMPARAISON DES SUITES

13.5.1 : Notations de Landau

⊙ Introduisons maintenant trois notations qui vont permettre de préciser les modes de convergence ; elles ont été popularisées par Landau (Edmund Georg Hermann Landau : mathématicien allemand 1877-1938).

Définition 13.8

Soit deux suites réelles ou complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la suite v qui ne s'annule pas :

- *On dit que u est* **négligeable devant** *v, noté $u \underset{\infty}{=} o(v)$, ou $u_n \underset{\infty}{=} o\big(v_n\big)$ si l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, on dit que u est un* **"petit O"** *de v (au voisinage de $+\infty$).*
- *On dit que u est* **dominée par** *v, noté $u \underset{\infty}{=} O(v)$, ou $u_n \underset{\infty}{=} O\big(v_n\big)$ si l'on a $\dfrac{u}{v}$ bornée (c'est-à-dire $\Big(\dfrac{u_n}{v_n}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée), on dit que u est un* **"grand O"** *de v.*
- *On dit que u est* **équivalente à** *v, noté $u \underset{\infty}{\sim} v$, ou $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ si l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.*

EXEMPLE 13.9 **:** • $n^{10} \underset{\infty}{=} o\big(2^n\big)$ et $\big(\ln(n)\big)^5 \underset{\infty}{=} o\big(\sqrt{n}\big)$ d'après les croissances comparées.

• Si on note p_n le n-ième nombre premier et $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n, alors Hadamard (Jacques Salomon Hadamard : mathématicien français 1865-1963 ; célèbre pour sa distraction, il aurait servi de modèle principal pour le personnage du Savant Cosinus) et De la Vallée-Poussin (Charles-Jean Étienne Gustave Nicolas, baron de la Vallée Poussin : mathématicien belge 1866-1962) ont prouvé en 1896 qu'on avait $p_n \underset{\infty}{\sim} n\ln(n)$ et $\pi(n) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$.

REMARQUE 13.17 :

- *Le petit O et le grand O ne sont pas des égalités au sens algébrique en ce sens qu'il n'y a pas transitivité. Par exemple : $2n \underset{\infty}{=} O(n^2)$ et $3n+1 \underset{\infty}{=} O(n^2)$ et pourtant $2n \neq 3n+1$.*
- *Pour ce qui est des propriétés de ces trois relations binaires : la relation de "petit O" n'est pas réflexive, pas symétrique par contre elle est antisymétrique et transitive ; la relation de "grand O" est réflexive, pas symétrique, pas antisymétrique mais elle est transitive ; enfin la relation d'équivalence est comme il se doit une relation d'équivalence.*
- *Il est clair que $u_n \underset{\infty}{=} O(1)$ signifie que la suite u est bornée et que $u_n \underset{\infty}{=} o(1)$ veut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. De plus, si l'on a $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ alors on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*
- *On peut tolérer des abus de notations comme $o(o(u_n)) \underset{\infty}{=} o(u_n)$ (qui traduit la transitivité de la relation o) où ce $=$ ne se lit que dans un sens (de la gauche vers la droite) et pas dans l'autre.*
- *On ne peut pas sommer les équivalents en général, passer un équivalent au $\ln$ ou à l'exponentielle.*

REMARQUE 13.18 : Avec la notation $\ll$ de Hardy *(Godfrey Harold* Hardy *: mathématicien britannique 1877-1947) qui est équivalente à o : $u_n \ll v_n \iff u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$ et en prenant douze réels bien ordonnées comme suit : $0 < b' < a' < 1 < a < b$, $\delta' < \gamma' < 0 < \gamma < \delta$, $\beta' < \alpha' < 0 < \alpha < \beta$, on a :*

$$b'^n \ll a'^n \ll n^{\delta'} \ll n^{\gamma'} \ll \ln^{\beta'} n \ll \ln^{\alpha'} n \ll 1 \ll \ln^{\alpha} n \ll \ln^{\beta} n \ll n^{\gamma} \ll n^{\delta} \ll a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n.$$

Hardy *a "découvert"* Ramanujan *(Srinivâsa Aiyangâr* Râmânujan *: mathématicien indien 1887-1920) dont voici une formule :* $1+\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cdots}}}}}} = \sqrt{\dfrac{e\cdot\pi}{2}}.$

13.5.2 : Propriétés relatives de ces notions

Théorème 13.8

On se donne des suites réelles ou complexes u, v, w, z, t dont certaines ne doivent pas s'annuler et des scalaires λ et μ :

(i) $u_n \underset{\infty}{=} O(u_n)$ **et** $u_n \underset{\infty}{\sim} u_n$.

(ii) $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$, $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$ **et** $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow v_n \underset{\infty}{\sim} u_n$.

(iii) $\left(u_n \underset{\infty}{=} O(v_n) \text{ et } v_n \underset{\infty}{=} O(w_n)\right) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} O(w_n)$ **et** $\left(u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \text{ et } v_n \underset{\infty}{\sim} w_n\right) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{\sim} w_n$.

(iv) $\left(u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \text{ et } v_n \underset{\infty}{=} O(w_n)\right) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$ **et** $\left(u_n \underset{\infty}{=} O(v_n) \text{ et } v_n \underset{\infty}{=} o(w_n)\right) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$.

(v) $\left(u_n \underset{\infty}{=} O(w_n) \text{ et } v_n \underset{\infty}{=} O(w_n)\right) \Longrightarrow \lambda u_n + \mu v_n \underset{\infty}{=} O(w_n)$ **et**
$\left(u_n \underset{\infty}{=} o(w_n) \text{ et } v_n \underset{\infty}{=} o(w_n)\right) \Longrightarrow \lambda u_n + \mu v_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$.

(vi) $\left(u_n \underset{\infty}{=} O(z_n) \text{ et } v_n \underset{\infty}{=} O(t_n)\right) \Longrightarrow u_n v_n \underset{\infty}{=} O(z_n t_n)$ **et** $\left(u_n \underset{\infty}{\sim} z_n \text{ et } v_n \underset{\infty}{\sim} t_n\right) \Longrightarrow u_n v_n \underset{\infty}{\sim} z_n t_n$.

(vii) $\left(u_n \underset{\infty}{=} o(z_n) \text{ et } v_n \underset{\infty}{=} O(t_n)\right) \Longrightarrow u_n v_n \underset{\infty}{=} o(z_n t_n)$ **et**
$\left(u_n \underset{\infty}{=} O(z_n) \text{ et } v_n \underset{\infty}{=} o(t_n)\right) \Longrightarrow u_n v_n \underset{\infty}{=} o(z_n t_n)$.

(viii) $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow \dfrac{1}{u_n} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$ **et** $\left(u_n \underset{\infty}{\sim} z_n \text{ et } v_n \underset{\infty}{\sim} t_n\right) \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{z_n}{t_n}$.

(ix) $\left(u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \text{ et } \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante }\right) \Longrightarrow u_{\varphi(n)} \underset{\infty}{=} o(v_{\varphi(n)})$.

(x) $\left(u_n \underset{\infty}{=} O(v_n) \text{ et } \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante }\right) \Longrightarrow u_{\varphi(n)} \underset{\infty}{=} O(v_{\varphi(n)})$.

(xi) $\left(u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \text{ et } \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante }\right) \Longrightarrow u_{\varphi(n)} \underset{\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

(xii) $\left(u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \text{ et } v_n \underset{\infty}{\sim} w_n\right) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$ **et** $\left(u_n \underset{\infty}{=} O(v_n) \text{ et } v_n \underset{\infty}{\sim} w_n\right) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} O(w_n)$.

(xiii) $\left(u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \text{ et } v_n \underset{\infty}{=} o(w_n)\right) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(w_n)$ **et** $\left(u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \text{ et } v_n \underset{\infty}{=} O(w_n)\right) \Longrightarrow u_n \underset{\infty}{=} O(w_n)$.

(xiv) $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \underset{\infty}{=} o(u_n) \Longleftrightarrow v_n - u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$.

Si u et v sont des suites strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}$:

(xv) **Si** $\alpha > 0$, $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n^\alpha \underset{\infty}{\sim} v_n^\alpha$, $u_n \underset{\infty}{=} O(v_n) \Longleftrightarrow u_n^\alpha \underset{\infty}{=} O(v_n^\alpha)$ **et** $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \Longleftrightarrow u_n^\alpha \underset{\infty}{=} o(v_n^\alpha)$.

(xvi) **Si** $\alpha < 0$, $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n^\alpha \underset{\infty}{\sim} v_n^\alpha$, $u_n \underset{\infty}{=} O(v_n) \Longleftrightarrow v_n^\alpha \underset{\infty}{=} O(u_n^\alpha)$ **et** $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \Longleftrightarrow v_n^\alpha \underset{\infty}{=} o(u_n^\alpha)$.

(xvii) $\left(u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \text{ et } \lim_{\infty} u_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+} \setminus \{1\}\right) \Longrightarrow \ln(u_n) \underset{\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Si u et v sont des suites réelles :

(xviii) $\lim_{\infty}(u_n - v_n) = 0 \Longleftrightarrow e^{u_n} \underset{\infty}{\sim} e^{v_n}$.

__REMARQUE 13.19__ : La propriété (v) du théorème suivant nous dit que l'ensemble des suites dominées par une suite fixe v est un espace vectoriel ; même chose pour les fonctions négligeables devant v.

__EXEMPLE 13.10__ : Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la formule suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n!) - an\ln(n) - bn - c\ln(n)$. On cherche tout d'abord l'unique triplet (a,b,c) tel que : $u_{n+1} - u_n \underset{\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On en déduit alors l'existence de $K > 0$ telle que : $n! \underset{\infty}{\sim} K\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$; c'est la fameuse formule de STIRLING (James STIRLING : mathématicien écossais 1692-1770).

Reste à trouver la constante K : le merveilleux monde des intégrales nous permettra de la déterminer !

PARTIE 13.6 : ANNEXES

13.6.1 : Retour sur les suites complexes

Proposition 13.13

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$; on se donne aussi un complexe $\ell = \ell_1 + i\ell_2$ avec $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$.
Alors on a l'équivalence : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell \iff \big(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell_2\big)$.

<u>REMARQUE 13.20</u> : Ainsi, même si la notion de convergence a été définie au départ pour les suites complexes, on peut se restreindre à l'étude des suites réelles d'après cette proposition. Néanmoins, il ne faut pas croire qu'il soit toujours plus intéressant de se ramener à l'étude des parties réelles et imaginaires pour étudier une suite complexe : c'est juste une possibilité !

Théorème 13.9

Soit une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexe bornée alors il existe une suite extraite $(z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de celle-ci qui converge (théorème de Bolzano-Weierstrass complexe).

13.6.2 : Cesàro (HP)

⊙ Bien qu'hors programme cette année, le résultat suivant de Cesàro (Ernesto Cesàro : mathématicien italien 1859-1906) est utile pour préciser les modes de convergence des suites : c'est-à-dire par exemple pour trouver un équivalent de $u_n - \ell$ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers ℓ.

Théorème 13.10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $\ell \in \mathbb{C}$, alors on a aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right) = \ell$.

<u>REMARQUE 13.21</u> :

- *Cela signifie simplement que si une suite tend vers ℓ alors la suite des moyennes arithmétiques de ses termes fait de même, ce qui se conçoit aisément.*
- *Nous avons une généralisation de ce résultat aux cas des suites réelles qui tendent vers $\pm\infty$. En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right) = -\infty$.*

13.6.3 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 et 2

⊙ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 fixé et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$ où, a priori $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

<u>REMARQUE 13.22</u> :

- *De telles suites sont dites* **arithmético-géométriques** *; cette appellation est logique car on retrouve les suites arithmétiques quand on a $a = 1$ et les non moins connues suites géométriques si $b = 0$.*
- *L'étude est simple si $a = 1$ car alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nb$ ou si $b = 0$ car : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a^n u_0$.*
- *Si $a \neq 1$, on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ pour obtenir : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n u_0 + b\left(\dfrac{1-a^n}{1-a}\right)$.*

⊙ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (pour $n \in \mathbb{N}$) $(E)\ :\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ où $(a, b, c) \in (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}$.

Définition 13.9

*On associe à une telle équation, comme pour les équations différentielle linéaires, l'***équation caractéristique** $(E_c)\ :\ az^2 + bz + c = 0$.

Théorème 13.11

On sait résoudre (E) en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:
- **si $\Delta \neq 0$, en notant z_1 et z_2 les deux solutions de (E_c), les suites solutions de (E) sont de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha_1 z_1^n + \alpha_2 z_2^n$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$.**
- **si $\Delta = 0$, en notant $z_1 = -\dfrac{b}{2a}$ l'unique solution (double) de (E_c), les suites solutions de (E) sont de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha_1 n + \alpha_2) z_1^n$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$.**

***EXEMPLE 13.11* :** Le théorème précédent nous montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$ est 6-périodique.

⨀ Dorénavant, on impose $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{R}$ et on cherche les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que (pour $n \in \mathbb{N}$) $(E)\ :\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

Théorème 13.12

On sait résoudre (E) en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:
- **si $\Delta > 0$, en notant z_1 et z_2 les deux solutions réelles de (E_c), les solutions de (E) sont de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha_1 z_1^n + \alpha_2 z_2^n$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.**
- **si $\Delta = 0$, en notant $z_1 = -\dfrac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ l'unique solution (double) de (E_c), les solutions réelles de (E) sont de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha_1 n + \alpha_2) z_1^n$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.**
- **si $\Delta < 0$, en notant $z_1 = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ et $z_2 = \rho e^{-i\theta}$ $((\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2)$ les solutions de (E_c), les solutions réelles de (E) sont $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \big(\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta)\big)\rho^n$ $((\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2)$.**

***EXEMPLE 13.12* :** Le théorème précédent nous permet d'exprimer le terme général de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$.

REMARQUE 13.23 : Comme pour les équations différentielles, on peut faire intervenir un second membre, mais cette fois-ci pour que les conclusions persistent, il est bon que ces suites soient de la forme $P(n)z^n$ dans le cas complexe ou de cette même forme ou de la forme $(P(n)\cos(n\theta) + Q(n)\sin(n\theta))r^n$ dans le cas réel. Vous adapterez les théorèmes vus dans ce chapitre 4 à cette configuration.

***EXEMPLE 13.13* :** On cherche à résoudre : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 6u_{n+1} + 8u_n = 3n - 4 - 2^{n+2}$ (E).

13.6.4 : Suites définies par une fonction

REMARQUE 13.24 : On se donne une fonction $f : I \to I$ croissante et continue, $a \in I$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Il y a deux cas :

- *si $u_1 \leqslant u_0$, on montre facilement par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on sait donc déjà qu'elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Il y a de nouveau deux cas :*
  - *s'il existe un point fixe de f inférieur ou égal à u_0 alors la suite u converge vers le plus grand des points fixes de f inférieurs ou égaux à u_0.*
  - *sinon la suite u tend vers $-\infty$.*
- *si $u_1 \geqslant u_0$, on montre alors par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on sait donc déjà qu'elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Il y a encore deux cas :*
  - *s'il existe un point fixe de f supérieur ou égal à u_0 alors la suite u converge vers le plus petit des points fixes de f supérieurs ou égaux à u_0.*
  - *sinon la suite u tend vers $+\infty$.*

REMARQUE 13.25 : On se donne une fonction $f : I \to I$ décroissante et continue, $a \in I$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. La fonction $g = f \circ f$ est bien sûr croissante et les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = g(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = g(u_{2n+1})$. Donc ce qui a été fait ci-dessus s'applique pour donner différents cas : il faut de toutes façons étudier les points fixes de f et ceux de g, il est clair que les points fixes de f sont points fixes de g mais la réciproque est fausse en général.