

CHAPITRE 15

ESPACES DE DIMENSION FINIE

PARTIE 15.1 : FAMILLES DE VECTEURS

⊙ Dans un espace vectoriel général, on a déjà la notion de vecteurs colinéaires, on a vu en géométrie dans l'espace des vecteurs coplanaires ce qui est déjà une généralisation de la notion de colinéarité : il est temps de généraliser franchement.

15.1.1 : Définitions et exemples

REMARQUE 15.1 : Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on se donne aussi $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E . On définit alors l'application $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ par : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$. Il est clair que cette application est linéaire et que son image est le sous-espace vectoriel de E engendré par la partie $\{x_1, \dots, x_n\}$, soit $\text{Im } \varphi = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Définition 15.1

Avec ces notations, on peut définir des caractéristiques de cette famille :

- on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une **famille libre** si φ est injective.
- on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une **famille liée** si φ n'est pas injective.
- on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une **famille génératrice** si φ est surjective.
- on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une **base** de E si φ est un isomorphisme de E .

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont **linéairement indépendants** ; dans le cas contraire, on dira qu'ils sont **linéairement dépendants**.

REMARQUE 15.2 : • Il est donc clair que : $(x_1, \dots, x_n)$ génératrice $\iff \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$.

- Une famille est donc liée si et seulement si elle n'est pas libre ; de même qu'une famille est une base si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice.

Proposition 15.1

Avec ces notations, on a les nouvelles caractérisations :

- $(x_1, \dots, x_n)$ est libre $\iff \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$.
- $(x_1, \dots, x_n)$ est liée $\iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$.
- $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice $\iff \forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.
- $(x_1, \dots, x_n)$ est une base $\iff \forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.

EXEMPLE 15.1 :

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, les vecteurs $x_1 = (0, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$, $x_3 = (1, 1, 0)$ et $x_4 = (1, 1, 1)$ forment une famille liée et génératrice. (x_1, x_2, x_3, x_4) n'est donc ni libre ni une base.
- (sh, ch) est une base de l'espace E des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
- Dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$, les réels $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$ et $x_3 = \sqrt{3}$ forment une famille libre.

REMARQUE 15.3 : Dans le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$, si on se donne $n \in \mathbb{N}$ et une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de **polynômes de degrés échelonnés**, ce qui signifie $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \deg(P_k) = k$, alors la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre.

REMARQUE 15.4 : Comme pour les combinaisons linéaires et l'espace vectoriel engendré, on peut généraliser les caractéristiques des familles à des familles quelconques (plus forcément finies), mais pas sans aménagement ; en effet, comme on ne peut pas définir de combinaison linéaire infinie de vecteurs, on ne peut considérer que les familles de scalaires à **supports finis**, c'est-à-dire que pour une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E (I est un ensemble non vide quelconque), on définit $\varphi : \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow E$ par : $\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \varphi((\lambda_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ (ce qui a bien un sens car $J = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est fini par hypothèse). Les définitions sont alors les mêmes en ce qui concerne la famille $(x_i)_{i \in I}$ qui peut être libre, liée, génératrice ou une base. Évidemment, nous avons les mêmes traductions que dans 15.1.

EXEMPLE 15.2 :

- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $(x_{\{x\}})_{x \in \mathbb{R}}$ est libre mais pas génératrice.
- Dans $E = \mathbb{K}[X]$, la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base.

Définition 15.2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $(x_i)_{i \in I}$ une base de E et $x \in E$, par définition : $\exists! (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$. Cette famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ est la **famille des coordonnées** de x dans la base $(x_i)_{i \in I}$.

Proposition 15.2

Avec ces notations et si $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ sont les familles des coordonnées de deux vecteurs x et y de E dans la base $(x_i)_{i \in I}$ et que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors le vecteur $\alpha x + \beta y$ admet $(\alpha \lambda_i + \beta \mu_i)_{i \in I}$ pour famille des coordonnées dans la base $(x_i)_{i \in I}$.

EXEMPLE 15.3 : Voici quelques coordonnées :

- Dans la base (sh, ch) de l'espace E des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' - y = 0$, la famille coordonnées de $f : x \mapsto e^x$ est $(1, 1)$.
- Dans la base $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$, la famille coordonnées de $(X - 1)^4$ est $(1, -4, 6, -4, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

REMARQUE 15.5 : Dans certains espaces, il y a des bases qui sont tellement naturelles qu'elles s'imposent d'elles-mêmes, on les appelle alors des **bases canoniques** :

- Il y a dans $E = \mathbb{K}^n$ la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.
- On a dans l'espace $E = \mathbb{K}[X]$ la base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- La base $(1, i)$ dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ est canonique.

15.1.2 : Propriétés des familles

Proposition 15.3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace, $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leq m$ et $(x_1, \dots, x_m)$ une famille de vecteurs de E , alors on a les implications suivantes :

- $(x_1, \dots, x_m)$ libre $\implies (x_1, \dots, x_n)$ libre.
- $(x_1, \dots, x_n)$ liée $\implies (x_1, \dots, x_m)$ liée.
- $(x_1, \dots, x_n)$ génératrice $\implies (x_1, \dots, x_m)$ génératrice.

REMARQUE 15.6 :

- On dit en abrégé que **toute sous-famille d'une famille libre est libre et que toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.**
- Cette proposition se généralise aux familles quelconques : soit E un $\mathbb{K}$ -espace, J un ensemble et $I \subset J$, on se donne aussi une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in J}$ de vecteurs de E , alors on a de nouveau les implications : $\left((x_i)_{i \in J} \text{ libre} \implies (x_i)_{i \in I} \text{ libre} \right)$ et $\left((x_i)_{i \in I} \text{ génératrice} \implies (x_i)_{i \in J} \text{ génératrice} \right)$.
- Toute famille comprenant le vecteur nul 0_E est forcément liée.
- La famille sans vecteur ($I = \emptyset$) est libre par faute de combattant.
- Une famille (x_1) à un seul vecteur est libre si et seulement si $x_1 \neq 0_E$.
- Une famille (x_1, x_2) à 2 vecteurs est libre si et seulement si x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires.

Proposition 15.4

Soit E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $x \in E$:

- $\left((x_1, \dots, x_n) \text{ libre et } x \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \right) \iff (x_1, \dots, x_n, x) \text{ libre.}$
- $\left((x_1, \dots, x_n) \text{ liée} \right) \iff \exists p \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_p \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n).$

EXEMPLE 15.4 :

- On prend $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 0, 2)$, $x_2 = (-1, 1, -2)$ et $x_3 = (1, 1, 1)$. Il est clair que x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires or x_3 n'est pas combinaison linéaire de x_1 et x_2 (calcul) donc (x_1, x_2, x_3) est libre.
- On prend $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère les fonctions $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \cos(2x)$ et $f_3 : x \mapsto \cos^2(x)$. Alors la famille (f_1, f_2, f_3) est liée et on a $f_1 = 2f_3 - f_2$, $f_2 = 2f_3 - f_1$ et $f_3 = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$.

REMARQUE 15.7 : Même quand une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, si $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on ne peut pas forcément exprimer x_p en fonction des autres vecteurs de la famille.

15.1.3 : Familles et applications linéaires**Proposition 15.5**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x_i)_{i \in I} \in E^I$:

- $\left((x_i)_{i \in I} \text{ liée} \implies (f(x_i))_{i \in I} \text{ liée} \right)$ d'où découle $\left((f(x_i))_{i \in I} \text{ libre} \implies (x_i)_{i \in I} \text{ libre} \right)$.
- $(x_i)_{i \in I} \text{ génératrice (de } E) \implies (f(x_i))_{i \in I} \text{ génératrice de } \text{Im}(f) (= \text{Vect}(f(x_i)_{i \in I})).$
- $\left((x_i)_{i \in I} \text{ libre et } f \text{ injective} \right) \implies (f(x_i))_{i \in I} \text{ libre.}$
- $\left((x_i)_{i \in I} \text{ génératrice (de } E) \text{ et } f \text{ surjective} \right) \implies (f(x_i))_{i \in I} \text{ génératrice (de } F).$
- $\left((x_i)_{i \in I} \text{ est une base de } E \text{ et } f \text{ est un isomorphisme} \right) \implies (f(x_i))_{i \in I} \text{ est une base de } F.$

REMARQUE 15.8 : Bien sûr les réciproques de toutes ces implications sont fausses.

EXEMPLE 15.5 : $f : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, si $x_1 = (0, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$, $x_3 = (1, 1, 0)$ on a (x_1, x_2, x_3) libre alors que $(f(x_1), f(x_2), f(x_3))$ est liée car $f(x_3) = f(x_1) + f(x_2)$. La famille $(f(x_1), f(x_2))$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$ alors que (x_1, x_2) n'est pas génératrice dans $\mathbb{R}^3$. De plus, la famille $(f(x_1), f(x_2))$ est aussi libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$ alors que f n'est pas injective.

Théorème 15.1

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $(x_i)_{i \in I}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

- $f \text{ injective} \iff (f(x_i))_{i \in I} \text{ est une famille libre.}$
- $f \text{ surjective} \iff (f(x_i))_{i \in I} \text{ est une famille génératrice (de } F).$
- $f \text{ est un isomorphisme} \iff (f(x_i))_{i \in I} \text{ est une base de } F.$

EXEMPLE 15.6 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$ définie par $f(x, y, z) = xX^2 + (x + y)X + (x + y + z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Il est facile de vérifier que f est linéaire et il est clair qu'en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est de degrés échelonnés donc c'est une famille libre. Ainsi f est injective. On aurait bien sûr pu le vérifier directement en calculant le noyau.

Proposition 15.6

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces, $(x_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$, alors on a l'équivalence bien pratique suivante : $f = g \iff \forall i \in I, f(x_i) = g(x_i)$.

Théorème 15.2

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces, $(x_i)_{i \in I}$ une base de E et $(y_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que : $\forall i \in I, f(x_i) = y_i$.

REMARQUE 15.9 : Quelques corollaires remarquables de ce théorème :

- Si on dispose de deux espaces E et F munis de bases $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$, alors il existe un unique isomorphisme f de E dans F tel que : $\forall i \in I, f(x_i) = y_i$.
- Si on dispose d'un espace E muni de deux bases $(e_i)_{i \in I}$ et $(e'_i)_{i \in I}$, alors il existe un unique automorphisme f de E tel que : $\forall i \in I, f(e_i) = e'_i$.

PARTIE 15.2 : THÉORIE DE LA DIMENSION

15.2.1 : Définition et propriétés

Définition 15.3

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on dit que E est un **$\mathbb{K}$ -espace de dimension finie** si E possède une famille génératrice finie.

Les espaces n'étant pas de dimension finie seront dits des **espaces de dimension infinie**.

EXEMPLE 15.7 : Un exemple de chaque catégorie :

- Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie car il possède la base canonique (donc génératrice) $(e_1, \dots, e_n)$. Même chose avec $\mathbb{K}_n[X]$.
- Par contre l'espace $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie car si une famille $(P_1, \dots, P_n)$ était génératrice, on aurait une contradiction en considérant un polynôme de degré $\max_{1 \leq k \leq n} (\deg(P_k)) + 1$.

⊙ La proposition calculatoire suivante est au centre du concept de dimension en classant les cardinaux des familles libres par rapport à ceux des familles génératrices.

Proposition 15.7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace, $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre et $(y_1, \dots, y_q)$ une famille génératrice, alors on a l'inégalité : $p \leq q$.

DÉMONSTRATION : On montre que toute famille à $n + 1$ dans un espace engendré par n vecteurs est liée.

REMARQUE 15.10 : S'il existe une famille libre infinie dans E , celui-ci est de dimension infinie.

15.2.2 : Définition de la dimension**Proposition 15.8**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie, alors E admet une base finie.

DÉMONSTRATION : Si $E \neq \{0_E\}$, comme E est de dimension finie, on sait qu'il existe une famille génératrice $(y_1, \dots, y_q)$ (avec $q \geq 1$), on pose $n = \text{Max} \{p \in \mathbb{N}^* \mid \text{il existe une famille libre à } p \text{ vecteurs}\}$.

Proposition 15.9

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie, toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre de vecteurs.

Définition 15.4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie, on appelle **dimension du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E** l'unique entier n tel qu'il existe une base de E à n vecteurs ; on note cet entier $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ (ou $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps sur lequel on travaille).

EXEMPLE 15.8 : Deux exemples de "plans" :

- Comme $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace $\mathbb{C}$, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ alors que (1) est une base du $\mathbb{C}$ -espace $\mathbb{C}$ et on a donc $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.
- Le $\mathbb{R}$ -espace E des solutions de l'équation $y'' - y = 0$ est de dimension 2 : (sh, ch) en est une base.

REMARQUE 15.11 : Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}^*$, alors comme on connaît les bases canoniques dans ces deux espaces : $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

Proposition 15.10

Soit E et F deux espaces de dimension finie, alors $E \times F$ est lui-même un espace de dimension finie et on a : $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

REMARQUE 15.12 : • Par récurrence, si E est de dimension n et $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\dim(E^p) = np$.

- Si on a deux corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ et tels que $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$ -espace de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, alors si E est un $\mathbb{L}$ -espace de dimension n , E est aussi un $\mathbb{K}$ -espace de dimension np .

15.2.3 : Base incomplète

⊙ On cherche maintenant des caractérisations des bases qui soient assez simples en pratique, et on va avoir une proposition qui ressemble fort à ce qu'on a vu sur les ensembles finis :

Théorème 15.3

Soit E un espace de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E :

- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre alors on a forcément $p \leq n$.
- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre et si $p = n$ alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base.
- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice alors on a forcément $n \leq p$.
- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice et si $p = n$ alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base.

EXEMPLE 15.9 : Dans $E = \mathbb{R}^3$, (x_1, x_2, x_3) est une base si $x_1 = (0, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$, $x_3 = (1, 1, 0)$.

Théorème 15.4

Soit E un espace de dimension finie et $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$:

- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice, alors il en existe une sous-famille qui est une base.
- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, elle peut être complétée en une base de E .

EXEMPLE 15.10 :

- La famille (x_1, x_2) est libre dans $E = \mathbb{R}^3$ si $x_1 = (1, 1, 2)$ et $x_2 = (0, 1, 1)$. Comme $\dim(E) = 3$, on peut compléter cette famille en une base (x_1, x_2, x_3) : $x_3 = (1, 1, 1)$.
- La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est génératrice dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ si $P_1 = 1 + X$, $P_2 = 1 - X$, $P_3 = X^2 + X + 1$ et $P_4 = X^2 + 1$. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, on peut enlever un vecteur à cette famille pour en faire une base, c'est fait avec (P_1, P_2, P_3) (mais aussi avec (P_1, P_2, P_4) , ou (P_1, P_3, P_4) ou (P_2, P_3, P_4)).

15.2.4 : Sous-espaces et dimension**Théorème 15.5**

Soit E un espace de dimension finie et F un sous-espace de E , alors :

- F est aussi de dimension finie et on a $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- De plus on a l'équivalence : $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

DÉMONSTRATION : On considère comme avant une famille libre de vecteurs de F de cardinal maximal.

REMARQUE 15.13 : Un sous-espace de dimension 1 s'appelle une **droite**, ce sera un **plan** si la dimension est 2. La **codimension** d'un sous-espace F d'un espace E de dimension finie est l'entier $\dim(E) - \dim(F)$. On appelle **hyperplan** un sous-espace de codimension 1.

Proposition 15.11

Dans un espace E de dimension finie, tout sous-espace F possède au moins un supplémentaire.

REMARQUE 15.14 : Vient maintenant la plus connue des contributions de GRASSMANN (Hermann Günther GRASSMANN : mathématicien et indianiste allemand 1809-1877) considéré comme l'un des fondateurs de la théorie des espaces vectoriels.

Proposition 15.12

Soit F et G deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie, alors on a la formule de GRASSMANN : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

REMARQUE 15.15 : Soit E un espace de dimension finie et F un sous-espace de E , alors tous les supplémentaires de F ont pour dimension $\text{codim}(F) = \dim(E) - \dim(F)$. Si G est un sous-espace de E tel que $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, alors G est un supplémentaire de F .

15.2.5 : Rang d'une famille de vecteurs**Définition 15.5**

Soit E un espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs, on appelle **rang de la famille** $(x_1, \dots, x_p)$, qu'on note $\text{rg}(x_1, \dots, x_p)$, la dimension de l'espace $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

EXEMPLE 15.11 : Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) où $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{-x}$, $f_3 = \text{sh}$ et $f_4 = \text{ch}$ est égal à 2 car $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \text{Vect}(f_1, f_2) = \text{Vect}(f_3, f_4)$ est l'espace des solutions de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

REMARQUE 15.16 : On peut affirmer que la fonction rang est croissante parmi les familles de vecteurs de E ; ce qui signifie que si $n \leq m$ le rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est inférieur à celui de la famille $(x_1, \dots, x_m)$, et ceci tout simplement car $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_m)$.

Théorème 15.6

Soit E un espace de dimension n et $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, on a :

- $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq p$ en général et : $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p \iff (x_1, \dots, x_p)$ libre.
- $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq n$ en général et : $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = n \iff (x_1, \dots, x_p)$ génératrice.

REMARQUE 15.17 :

- Tout ceci est bien beau mais ce n'est pas nouveau, sauf si cela nous fournit un algorithme pour déterminer si les familles sont libres, génératrices ou si ce sont des bases, or nous disposons justement d'une méthode appelée **méthode du pivot de GAUSS** pour calculer le rang d'une famille finie de vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie dans lequel on dispose d'une base (la plupart du temps ce sera une base canonique).
- Une considération générale, si $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_q)$ sont deux familles pour lesquelles on a $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_i \in \text{Vect}(y_1, \dots, y_q)$ et $\forall j \in \llbracket 1; q \rrbracket, y_j \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_p) : \text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(y_1, \dots, y_q)$.
- Ceci nous permet d'écrire, pour une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E , une permutation σ de $\llbracket 1; p \rrbracket, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $\alpha \in \mathbb{K}^* : \text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \text{rg}(x_1, \dots, \alpha x_p)$.
- De plus : $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(x_1, \dots, x_p, 0_E) = \text{rg}(x_1, \dots, x_p, \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k) = \text{rg}(x_1, \dots, x_p - \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k)$.
- Vient ensuite l'algorithme qui se visualise à l'aide d'un tableau de scalaires.

EXEMPLE 15.12 : Calcul du rang de la famille (x_1, x_2, x_3, x_4) dans $E = \mathbb{R}^4$ où $x_1 = (1, 0, 3, -2)$, $x_2 = (1, 2, 1, 3)$, $x_3 = (-1, 0, 5, 1)$ et $x_4 = (-4, -4, 16, -5)$ par la méthode du pivot de GAUSS.

PARTIE 15.3 : APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

15.3.1 : Dimension et isomorphismes

Proposition 15.13

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E et F 2 $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels :

- Si E de dimension n alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ (ce qu'on note $E \sim \mathbb{K}^n$).
- Si E et F de dimension finie, alors $E \sim F \iff \dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 15.14

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi de dimension finie et on a : $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

DÉMONSTRATION : Soit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E (il en existe si $\dim(E) = n$) et $\varphi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow F^n$ définie par : $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \varphi(f) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$. Il suffit de montrer que φ est un isomorphisme.

REMARQUE 15.18 :

- Si E est de dimension finie, on en déduit que son **dual** $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'est aussi et de même dimension car $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$. Ce qui signifie que l'espace et son dual sont isomorphes.
- Plus précisément, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors on peut définir, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la forme linéaire k -ième coordonnée notée e_k^* qui associe à un vecteur $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ sa coordonnée x_k (selon e_k). On montre que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée **base duale** de la base $(e_1, \dots, e_n)$.

15.3.2 : Rang d'une application linéaire

Définition 15.6

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle **rang de f** , noté $\text{rg}(f)$, la dimension du sous-espace $\text{Im}(f)$ de F : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

EXEMPLE 15.13 : Si $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, p(x, y, z) = (x, y, y)$, $\text{rg}(p) = 2$.

Théorème 15.7

Avec ces notations, si on note $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$ alors :

- $\text{rg}(f) \leq p$ en général et $\text{rg}(f) = p \iff f$ injective.
- $\text{rg}(f) \leq n$ en général et $\text{rg}(f) = n \iff f$ surjective.

REMARQUE 15.19 : De ceci, on peut en déduire que si $f : E \rightarrow F$ est linéaire entre deux espaces de dimension finie : $(\dim(E) < \dim(F)) \implies (f \text{ non surjective})$ et $(\dim(E) > \dim(F)) \implies (f \text{ non injective})$.

15.3.3 : Théorème du rang**Théorème 15.8**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a la formule du rang : $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$. Plus précisément, f induit un isomorphisme entre tout supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Théorème 15.9

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces de même dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, il y a équivalence entre :

- | | | | |
|-------|--|--------|--|
| (i) | f est un isomorphisme | (ii) | f est injective |
| (iii) | $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ | (iv) | f est surjective |
| (v) | $\text{rg}(f) = n$ | (vi) | $\text{Im}(f) = F$ |
| (vii) | $\exists g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g = \text{id}_F$ | (viii) | $\exists g \in \mathcal{L}(F, E), g \circ f = \text{id}_E$ |

Théorème 15.10

Soit E un espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$, on a l'équivalence entre :

- | | | | | | |
|-------|---|--------|---|-------|----------------------------|
| (i) | f est un automorphisme | (ii) | f est injective | (iii) | $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ |
| (iv) | f est surjective | (v) | $\text{rg}(f) = n$ | (vi) | $\text{Im}(f) = E$ |
| (vii) | $\exists g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = \text{id}_E$ | (viii) | $\exists g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = \text{id}_E$ | (ix) | f est régulière à gauche |
| | | | | (x) | f est régulière à droite |

Proposition 15.15

Soit E, F, G 3 espaces de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors : Si f est un isomorphisme alors $\text{rg}(g) = \text{rg}(g \circ f)$. Si g est un isomorphisme alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(g \circ f)$.

Proposition 15.16

Dans E de dimension finie, les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles.

REMARQUE 15.20 : Les hyperplans sont donc les seuls sous-espaces de E à n'avoir qu'une équation.

15.3.4 : Pivot de Gauss

REMARQUE 15.21 : Pour calculer en pratique le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ entre deux espaces E et F dont on connaît des bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$, on se rappelle du fait que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ donc que $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ et de l'algorithme du calcul du rang d'une famille de vecteurs (les colonnes de 0 nous donnent en prime une base du noyau).

EXEMPLE 15.14 : Calculer le rang de l'application linéaire (c'est clair) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, f(x, y, z, t) = (x - z + t, y - x, y + t - z)$.