CHAPITRE 16 FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

PARTIE 16.1 : GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

16.1.1 : Propriétés des fonctions

Définition 16.1

Soit une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ *où* $A \subset \mathbb{R}$, *on peut définir :*

- *son* **module** $|f| : A \to \mathbb{R}_+$ *défini par :* $\forall x \in A,\ |f|(x) = |f(x)|$.
- *son* **conjugué** $\overline{f} : A \to \mathbb{C}$ *défini par :* $\forall x \in A,\ \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$.
- *sa* **partie réelle** $\mathrm{Re}\,(f) : A \to \mathbb{R}$ *définie par :* $\forall x \in A,\ \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,\big(f(x)\big)$.
- *sa* **partie imaginaire** $\mathrm{Im}(f) : A \to \mathbb{R}$ *définie par :* $\forall x \in A,\ \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}\,\big(f(x)\big)$.
- *son* **graphe** *qui est la partie* $\Gamma_f = \big\{(x,z) \in A \times \mathbb{C} \mid z = f(x)\big\}$.

On peut aussi dire que la fonction f *est* ($(T,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$)*:*

- T-**périodique** *si* $\forall x \in A,\ x \pm T \in A$ *et* $f(x+T) = f(x)$.
- **périodique** *si* $\exists T \in \mathbb{R}^*,\ f$ *est* T*-périodique.*
- **bornée** *si* $\exists m \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in A,\ |f(x)| \leqslant m$.
- **constante** *si* $\exists z_0 \in \mathbb{C},\ \forall x \in A,\ f(x) = z_0$.
- **paire** *si* $\forall x \in A,\ -x \in A$ *et* $f(-x) = f(x)$.
- **impaire** *si* $\forall x \in A,\ -x \in A$ *et* $f(-x) = -f(x)$.
- k-**lipschitzienne** *si* $\forall (x,y) \in A^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$.
- **lipschitzienne** *si* $\exists k \in \mathbb{R}_+,\ f$ *est* k*-lipschitzienne.*

⊙ Pour les fonctions à variable et à valeurs réelles, on a de nouvelles définitions liées à l'ordre :

Définition 16.2

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ *avec* $A \subset \mathbb{R}$ *et* $A \neq \emptyset$, *on peut définir :*

- *sa* **valeur absolue** $|f| : A \to \mathbb{R}_+$ *définie par :* $\forall x \in A,\ |f|(x) = |f(x)|$.
- *la fonction* $f^+ : A \to \mathbb{R}$ *définie par :* $\forall x \in A,\ f^+(x) = \mathrm{Max}(0, f(x))$.
- *la fonction* $f^- : A \to \mathbb{R}$ *définie par :* $\forall x \in A,\ f^-(x) = \mathrm{Max}(0, -f(x))$.

On peut aussi dire que la fonction f *est :*

- **minorée** *si* $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ f(x) \geqslant m$.
- **majorée** *si* $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ f(x) \leqslant m$.
- **croissante** *si* $\forall (x,y) \in A^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- **décroissante** *si* $\forall (x,y) \in A^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- **monotone** *si* f *est croissante ou décroissante.*
- **strictement croissante** *si* $\forall (x,y) \in A^2,\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- **strictement décroissante** *si* $\forall (x,y) \in A^2,\ x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.
- **strictement monotone** *si* f *est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Avec ces nouvelles définitions, on peut définir :

- *la* **borne inférieure** *de* f *:* $\underset{x \in A}{\mathrm{Inf}}\big(f(x)\big) = \mathrm{Inf}\,\big(\widehat{f}(A)\big)$ *si* f *est minorée.*
- *la* **borne supérieure** *de* f *:* $\underset{x \in A}{\mathrm{Sup}}\big(f(x)\big) = \mathrm{Sup}\,\big(\widehat{f}(A)\big)$ *si* f *est majorée.*
- *le* **minimum** *de* f *:* $\underset{x \in A}{\mathrm{Min}}\big(f(x)\big) = \mathrm{Min}\,\big(\widehat{f}(A)\big)$ *si* f *est minorée et si* $\underset{x \in A}{\mathrm{Inf}}\big(f(x)\big) \in \widehat{f}(A)$.
- *le* **maximum** *de* f *:* $\underset{x \in A}{\mathrm{Max}}\big(f(x)\big) = \mathrm{Max}\,\big(\widehat{f}(A)\big)$ *si* f *est majorée et si* $\underset{x \in A}{\mathrm{Sup}}\big(f(x)\big) \in \widehat{f}(A)$.

EXEMPLE 16.1 **:**

- La fonction $\sin$ est 2π-périodique, bornée, impaire, réelle et 1-lipschitzienne.
- La fonction $f : x \mapsto \cos(x^2)$ n'est ni périodique ni lipschitzienne, mais elle est paire et bornée.
- La fonction $\exp$ n'est ni paire, ni impaire, ni bornée, ni périodique, ni lipschitzienne.

REMARQUE 16.1 : Pour une fonction f qui s'y prête, on peut définir $\mathrm{Per}(f)$ qui est l'ensemble de toutes les périodes de f. C'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et il en existe deux sortes.

EXEMPLE 16.2 **:** Le groupe des périodes de $\sin$ est $2\pi\mathbb{Z}$ alors que celui de la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$ lui-même donc on ne peut pas parler de plus petite période pour $\chi_{\mathbb{Q}}$.

REMARQUE 16.2 : Pour une fonction réelle, comme $\leqslant$ est un ordre total dans $\mathbb{R}$:

- $\left(f \nearrow\!\!\nearrow\right) \iff \Big(\forall (x,y) \in A^2,\ x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)\Big) \iff \Big(\forall (x,y) \in A^2,\ x < y \iff f(x) < f(y)\Big)$.
- *De plus, on a : $f^+ + f^- = |f|$ alors que $f^+ - f^- = f$ de sorte que $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$.*

REMARQUE 16.3 : Une **propriété globale** *sur f est une propriété qui concerne toutes les valeurs de f (en tous les $x \in A$) alors qu'une* **propriété locale** *en a n'est vraie qu'au voisinage de a (sur $A \cap [a-\alpha; a+\alpha]$ avec $\alpha > 0$ si $a \in \mathbb{R}$, sur $A \cap [b; +\infty[$ si $a = +\infty$ ou sur $A \cap]-\infty; b]$ si $a = -\infty$).*

EXEMPLE 16.3 **:** La fonction $\cos$ est bornée et paire (propriétés globales) ; la fonction $\exp$ est localement bornée et lipschitzienne en $-\infty$ mais pas en $+\infty$ (propriétés locales).

Proposition 16.1

Une fonction réelle est bornée ssi elle est majorée et minorée.

REMARQUE 16.4 :

- *Si f admet un maximum (resp. un minimum), on dit que f admet en a un* **maximum absolu** *si $f(a) = \underset{x \in A}{\mathrm{Max}}\big(f(x)\big)$ (resp. un* **minimum absolu** *si $f(a) = \underset{x \in A}{\mathrm{Min}}\big(f(x)\big)$).*
- *On dit que f admet en a un* **maximum local** *si $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in A \cap [a-\alpha; a+\alpha],\ f(x) \leqslant f(a)$ (resp. un* **minimum local** *si $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in A \cap [a-\alpha; a+\alpha],\ f(x) \geqslant f(a)$).*

EXEMPLE 16.4 **:** La fonction ch admet en 0 un minimum absolu alors que la fonction $x \mapsto x^3 - 3x$ admet en 1 et en -1 des extrema relatifs mais pas d'extrema absolus.

Proposition 16.2

Les composées de fonctions monotones le sont encore, il en est de même pour les strictement monotones (selon le tableau suivant pour $g \circ f$) :

g et f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow\!\!\nearrow$	$\searrow\!\!\searrow$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$\nearrow\!\!\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow\!\!\nearrow$	$\searrow\!\!\searrow$
$\searrow\!\!\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow\!\!\searrow$	$\nearrow\!\!\nearrow$

Proposition 16.3

Si une fonction $f : A \to B$ (A et B des parties de $\mathbb{R}$) est bijective et strictement croissante (resp. strict. décroissante) alors f^{-1} est aussi strictement croissante (resp. strict. décroissante).

16.1.2 : Opérations sur les fonctions

REMARQUE 16.5 : Si A *est une partie de* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, on définit sur l'ensemble* $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ *des fonctions de* A *dans* $\mathbb{K}$ *les deux lois internes* $+$ *et* $\times$ *et la loi externe . ;* $\forall \lambda \in \ K, \ \forall \big(f, g\big) \in (\mathcal{F}(A, \mathbb{K})^2)$ *:*

$$\begin{array}{cccccccccc} f+g & : & A & \to & \mathbb{K} & \text{par} & \forall x \in A, & (f+g)(x) & = & f(x)+g(x) & , \\ f\times g & : & A & \to & \mathbb{K} & \text{par} & \forall x \in A, & (f\times g)(x) & = & f(x)\times g(x) & \text{et} \\ \lambda.f & : & A & \to & \mathbb{K} & \text{par} & \forall x \in A, & (\lambda.f)(x) & = & \lambda f(x) & . \end{array}$$

Proposition 16.4

$(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, ., \times)$ **est une** $\mathbb{K}$**-algèbre commutative et non intègre.**

REMARQUE 16.6 :

- *Les fonctions inversibles sont exactement celles qui ne s'annulent jamais.*
- *Les fonctions constantes constituent une sous-algèbre de* $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ *; les fonctions affines ne forment qu'un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$*, les fonctions croissantes n'ont pas de structure particulière.*
- *Si on pose, pour une fonction* f *bornée :* $||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in A} |f(x)|$*, alors on définit une* **norme d'algèbre** *qui va de l'algèbre* $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ *des fonctions bornées dans* $\mathbb{R}_+$ *et qui vérifie,* $\forall(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times \big(\mathcal{B}(A, \mathbb{K})\big)^2$ *:* $||f||_\infty = 0 \iff f = 0$, $||\lambda f||_\infty = |\lambda| \, ||f||_\infty$, $||f+g||_\infty \leqslant ||f||_\infty + ||g||_\infty$ *et* $||f\times g||_\infty \leqslant ||f||_\infty \times ||g||_\infty$.
- *On peut tout de même affirmer que le produit de deux fonctions impaires est paire et que la composée d'une fonction* k*-lipschitzienne et d'une fonction* k'*-lipschitzienne donne une fonction* kk'*-lipschitzienne.*
- *On peut décomposer, si* A *s'y prête, toute fonction* $f : A \to \mathbb{K}$ *d'une unique manière comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :* $\forall x \in A, \ f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
- *Il est clair que les fonctions constantes sont exactement les fonctions* 0*-lipschitziennes.*
- *Si, par exemple, les fonctions réelles* f *et* g *sont définies sur* A *et sont majorées, alors* $f+g$ *l'est aussi et on a :* $\operatorname*{Sup}_{x\in A}\big(f(x)+g(x)\big) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in A}\big(f(x)\big) + \operatorname*{Sup}_{x\in A}\big(g(x)\big)$ *; c'est-à-dire* $\operatorname*{Sup}_{A}(f+g) \leqslant \operatorname*{Sup}_{A}(f) + \operatorname*{Sup}_{A}(g)$.
- *On a peu de résultats concernant les opérations sur les fonctions monotones.*

16.1.3 : Ordre sur les fonctions

Définition 16.3

On définit une relation binaire dans $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ *(*$A \subset \mathbb{R}$*) ; si* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *:* $f \leqslant g \iff \forall x \in A, \ f(x) \leqslant g(x)$.

REMARQUE 16.7 : Ceci définit une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ *mais cet ordre est partiel.*

Définition 16.4

Avec ces notations, on définit les fonctions $\mathrm{Sup}(f, g) : A \to \mathbb{R}$ *:* $\forall x \in A, \ \big(\mathrm{Sup}(f, g)\big)(x) = \mathrm{Max}\,\big(f(x), g(x)\big)$ *et* $\mathrm{Inf}(f, g) : A \to \mathbb{R}$ *:* $\forall x \in A, \ \big(\mathrm{Inf}(f, g)\big)(x) = \mathrm{Min}\,\big(f(x), g(x)\big)$.

REMARQUE 16.8 :

- *Il est clair que* $\mathrm{Sup}(f, g)$ *est supérieure et à* f *et à* g*, et c'est même la plus petite (pour l'ordre* $\leqslant$ *défini) parmi les fonctions vérifiant cette propriété :* $\mathrm{Sup}(f, g) = \mathrm{Sup}\,\big(\{f, g\}\big)$.
- *On montre également les relations :* $\mathrm{Sup}(f, g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ *et* $\mathrm{Inf}(f, g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$.
- *La notation* $<$ *est ambiguë car* $f < g$ *peut signifier* $\forall x \in A, \ f(x) < g(x)$ *ou* $f \leqslant g$ *et* $f \neq g$.
- *Cette relation* $\leqslant$ *est compatible avec l'addition et avec le produit par des fonctions positives, si* $A \subset \mathbb{R}$ *et* $f, g, h, k : A \to \mathbb{R}$ *:* $f \leqslant g \iff f+h \leqslant g+h$ *; de plus* $\Big(f \leqslant g \text{ et } h \leqslant k\Big) \Longrightarrow f+h \leqslant g+k$.
Si $\forall x \in A, \ h(x) > 0$*, on a :* $f \leqslant g \iff f\times h \leqslant g\times h$ *; de plus* $\big(0 \leqslant f \leqslant g \text{ et } 0 \leqslant h \leqslant k\big) \Longrightarrow f\times h \leqslant g\times k$.

PARTIE 16.2 : LIMITES

16.2.1 : Les 30 limites possibles et quelques propriétés

Définition 16.5

Soit $A \subset \mathbb{R}$ *et* x_0 *un réel adhérent à* A *(c'est-à-dire un réel* $x_0 \in A$ *ou aux bornes de* A*), une fonction* $f : A \to \mathbb{C}$ *et* $\ell \in \mathbb{C}$*. On dit que* f **admet** ℓ **comme limite en** x_0*, qu'on note* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x_0} f = \ell$*, ou* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ *ou* $f \underset{x_0}{\to} \ell$*, si* $\big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$.

$\odot$ Toutefois, on peut être plus précis sur la manière qu'a x de tendre vers x_0, par valeurs supérieures ou inférieures, ou alors on peut remplacer x_0 par $+\infty$ ou $-\infty$ (si A s'y prête bien sûr). De même, si la fonction f est à valeurs réelles, on peut faire tendre f vers ℓ par au-dessus ou en-dessous, ou même vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 16.6

On définit ces 30 **limites** *avec les 6 façons de faire tendre la variable et les 5 manières de faire converger les valeurs, il suffira ensuite de mixer (la fonction est réelle à partir de la ligne 3 et* $\diamond = \forall x \in A$*) :*

	Les valeurs		*La variable*
		$x \to x_0$, $x \neq x_0$	$*, \exists \alpha > 0, \diamond, \big(\lvert x - x_0\rvert \leqslant \alpha \text{ et } x \neq x_0\big) \Longrightarrow *$
$f(x) \to \ell$	$\forall \varepsilon > 0, * \diamond * \Longrightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert \leqslant \varepsilon$	$x \to x_0$	$*, \exists \alpha > 0, \diamond, \lvert x - x_0\rvert \leqslant \alpha \Longrightarrow *$
$f(x) \to \ell+$	$\forall \varepsilon > 0, * \diamond * \Longrightarrow \ell < f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$	$x \to x_0+$	$*, \exists \alpha > 0, \diamond, x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha \Longrightarrow *$
$f(x) \to \ell-$	$\forall \varepsilon > 0, * \diamond * \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant f(x) < \ell$	$x \to x_0-$	$*, \exists \alpha > 0, \diamond, x_0 - \alpha \leqslant x < x_0 \Longrightarrow *$
$f(x) \to +\infty$	$\forall M \in \mathbb{R}, * \diamond * \Longrightarrow f(x) \geqslant M$	$x \to +\infty$	$*, \exists m \in \mathbb{R}, \diamond, x \geqslant m \Longrightarrow *$
$f(x) \to -\infty$	$\forall M \in \mathbb{R}, * \diamond * \Longrightarrow f(x) \leqslant M$	$x \to -\infty$	$*, \exists m \in \mathbb{R}, \diamond, x \leqslant m \Longrightarrow *$

REMARQUE 16.9 : Par exemple, pour une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$*, on a la définition :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2+ \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x \geqslant m \Longrightarrow 2 < f(x) \leqslant 2 + \varepsilon.$$
$$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - \alpha \leqslant x < 1 \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

$\odot$ On peut voir, pour les fonctions réelles, ces limites en termes de rectangles ou bandes de sécurité.

REMARQUE 16.10 :

- *On peut faire des translations au niveau des variables ou des valeurs pour se ramener en 0 ; comme pour les suites, si* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $\ell \in \mathbb{K}$*, on a* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) - \ell\big) = 0$.
- *De même, si* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\ell \in \mathbb{K}$ *ou* $\ell = \pm\infty$*, on a* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$.
- *Finalement, si* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\ell \in \mathbb{K}$*, on a* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) - \ell\big) = 0 \iff \lim\limits_{h \to 0} \big(f(x_0 + h) - \ell\big) = 0$.
- *Comme pour les suites, certains* $\leqslant$ *dans ces définitions peuvent se remplacer (sans changer le sens de la phrase) par des* $<$ *(par contre il faut garder* $\varepsilon > 0$ *et* $\alpha > 0$*).*
- *Si* $x_0 \in A$*, le fait que* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *impose bien sûr que* $f(x_0) = \ell$ *(on prend* ε *aussi petit qu'on veut).*

Proposition 16.5

Avec les notations précédentes, on a quelques équivalences et implications :

- **Si** $x_0 \notin A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = \ell$.
- **Si** $x_0 \in A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \left(\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = \ell \text{ et } f(x_0) = \ell\right)$.
- **Si** x_0 **est "au cœur" de** A, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = \ell \iff \left(\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \ell\right)$.
- **Si** $\ell \in \mathbb{R}$, $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell+ \text{ ou } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell-\right) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

REMARQUE 16.11 : Commençons notre analogie avec les suites :
- *Il est aisé de montrer que toute fonction qui admet en* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *une limite finie est bornée au voisinage de* x_0*. Bien sûr la réciproque est encore fausse.*
- *De plus, si la fonction est réelle et tend vers une valeur strictement positive* ℓ *en* x_0*, elle peut être minorée par tout réel* $x_1 \in]0;\ell[$ *sur un voisinage de* x_0*.*

Théorème 16.1

(Caractérisation séquentielle de la limite). Soit $f : A \to \mathbb{K}$, x_0 **adhérent à** A **et** $\ell \in \mathbb{K}$, **alors :**

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\right) \iff \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell\right).$$

REMARQUE 16.12 : Je vous laisse écrire les 29 autres caractérisations séquentielles.

Proposition 16.6

Avec les notations précédentes, si f **admet en** x_0 **une limite (qu'elle soit finie ou infinie), alors celle-ci est unique : c'est l'unicité de la limite !**

REMARQUE 16.13 : Ceci justifie a posteriori la notation fonctionnelle des limites.

16.2.2 : Opérations sur les limites

Proposition 16.7

Soit $A \subset \mathbb{R}$, x_0 **adhérent à** A **et deux fonctions** $f, g : A \to \mathbb{K}$, **nous avons l'implication : si** f **est bornée au voisinage de** x_0 **et si** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, **alors on a** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Théorème 16.2

Avec ces notations et si f **et** g **admettent des limites finies respectives** ℓ **et** ℓ' **en** x_0, **et si** $\lambda \in \mathbb{K}$, **alors les fonctions** $f+g$, $\lambda.f$, $f\times g$ **et** $\frac{1}{f}$ **(si** $\ell \neq 0$**) admettent aussi des limites en** x_0 **et on a :** $\lim\limits_{x\to x_0} \big((f(x)+g(x)\big) = \ell+\ell'$, $\lim\limits_{x\to x_0} \big(\lambda f(x)\big) = \lambda\ell$, $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = \ell\ell'$ **et** $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\ell}$.

REMARQUE 16.14 : L'opérateur $\lim\limits_{x\to x_0}$ *est donc un morphisme d'algèbres portant sur la sous-algèbre des fonctions qui admettent une limite finie en* x_0*. Ces relations sont bien sûr vraies pour les 6 types de limites (en termes de variable), avec quand même des limites finies.*

Théorème 16.3

(Composition des limites) Soit $A \subset \mathbb{R}$ **et** $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ **et** $g : B \to \mathbb{K}$ **avec** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$ **et** $\widehat{f(A)} \subset B$, **alors si** x_0 **est adhérent à** A, **si** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, **si** $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = \ell$ **alors** $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x) = \ell$.

Théorème 16.4

On se donne deux fonctions réelles et un réel λ, on peut contempler le tableau suivant où dans les colonnes on trouve les éventuelles limites en x_0 des fonctions dont le nom est en haut $\left(f+g,\ fg,\ \lambda f \text{ ou } \frac{1}{f}\right)$ en fonction de celles dont la limite est supposée (f et g) et d'une constante réelle λ.

Quand il y a des points d'interrogation c'est que plusieurs cas peuvent se présenter et qu'on ne peut pas conclure avec ces seules informations sur λ, f et g.

Bien sûr, dans le tableau ci-contre ℓ et ℓ' sont des réels ce qui fait que ce tableau reprend les résultats sur les limites finies.

f	g	λ	$f+g$	$f\times g$	$\lambda.f$	$\frac{1}{f}$
ℓ	ℓ'	λ	$\ell+\ell'$	$\ell\ell'$	$\lambda\ell$	?
$\ell>0$	$+\infty$	λ	$+\infty$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$\frac{1}{\ell}$
0	$+\infty$	λ	$+\infty$	?	0	?
$\ell<0$	$+\infty$	λ	$+\infty$	$-\infty$	$\lambda\ell$	$\frac{1}{\ell}$
$\ell>0$	$-\infty$	λ	$-\infty$	$-\infty$	$\lambda\ell$	$\frac{1}{\ell}$
0	$-\infty$	λ	$-\infty$	?	0	?
$\ell<0$	$-\infty$	λ	$-\infty$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$\frac{1}{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$	$\lambda>0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	$-\infty$	0	?	$-\infty$	0	0
$-\infty$	$+\infty$	$\lambda>0$	?	$-\infty$	$-\infty$	0
$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	0	0

Proposition 16.8

Soit $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction complexe, x_0 adhérent à A, on pose $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ et $f_2 = \mathrm{Im}(f)$, on se donne aussi un complexe $\ell = \ell_1 + i\ell_2$ avec $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$.
Alors on a l'équivalence : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \left(\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \ell_1 \text{ et } \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \ell_2\right)$.

<u>DÉMONSTRATION</u> : Je dirai même plus : "C'est vrai pour les suites".

Proposition 16.9

Si $f : A \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec x_0 adhérent à A, alors : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

16.2.3 : Limites et ordre

Proposition 16.10

Si $f : A \to \mathbb{K}$ et $g : A \to \mathbb{R}_+$ avec x_0 adhérent à A vérifient la majoration $\forall x \in A,\ |f(x)| \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors on peut conclure que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Proposition 16.11

Soit $f, g : A \to \mathbb{R}$ et x_0 adhérent à A, si on suppose que f et g admettent des limites finies en x_0 et que $\forall x \in A,\ f(x) \leqslant g(x)$ alors on peut conclure que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

<u>REMARQUE 16.15</u> : Bien sûr, les inégalités strictes "ne passent pas à la limite", en général bien sûr.

Théorème 16.5

Soit f, g et h trois fonctions de A dans $\mathbb{R}$, x_0 adhérent à A, $\ell \in \mathbb{R}$, on suppose aussi que : $\forall x \in A,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Alors on a les trois implications :

- $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell\right) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$ **(théorème des gendarmes).**
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$; • $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$.

REMARQUE 16.16 : Comme pour la proposition précédente, il suffit que l'encadrement soit vrai au voisinage de x_0 pour que la conclusion persiste : c'est une propriété locale.

Théorème 16.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert $]a;b[$ (on peut avoir $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$) et f monotone, alors on a les 8 implications : (théorème de la limite monotone)

- **Si f est croissante, minorée, majorée, alors $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \operatorname{Inf}\limits_{x\in]a;b[} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \operatorname{Sup}\limits_{x\in]a;b[} f(x)$.**
- **Si f est décroissante, minorée, majorée, alors $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \operatorname{Sup}\limits_{x\in]a;b[} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \operatorname{Inf}\limits_{x\in]a;b[} f(x)$.**
- **Si f est croissante, minorée, non majorée, alors $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \operatorname{Inf}\limits_{x\in]a;b[} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty$.**
- **Si f est décroissante, minorée, non majorée, alors $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \operatorname{Inf}\limits_{x\in]a;b[} f(x)$.**
- **Si f est croissante, non minorée, majorée, alors $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \operatorname{Sup}\limits_{x\in]a;b[} f(x)$.**
- **Si f est décroissante, non minorée, majorée, alors $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \operatorname{Sup}\limits_{x\in]a;b[} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = -\infty$.**
- **Si f est croissante, non minorée, non majorée, alors $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty$.**
- **Si f est décroissante, non minorée, non majorée, alors $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = -\infty$.**

PARTIE 16.3 : CONTINUITÉ

16.3.1 : Continuité locale

Définition 16.7

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ et $x_0 \in A$, on dit que f est **continue en x_0** *si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

REMARQUE 16.17 : f continue en x_0 $\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

EXEMPLE 16.5 : $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \sqrt{x}$ est continue en $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

REMARQUE 16.18 : Soit une fonction $f : A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{K}$ telle que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ existe, alors on peut prolonger f "par continuité" en x_0 en posant la fonction $g : A \to \mathbb{K}$ dont la restriction à $A \setminus \{x_0\}$ est f et telle que $g(x_0) = \ell$. Alors g est bien continue en x_0 par construction. On note traditionnellement encore f la fonction ainsi prolongée : on a effectué **le prolongement de f par continuité en x_0**.

EXEMPLE 16.6 : Prolongeons $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$.

Théorème 16.7

Soit $f, g : A \to \mathbb{K}$, $x_0 \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a les assertions suivantes :

- **$\big(f$ et g sont continues en $x_0\big) \Longrightarrow \big(f + g,\ f \times g$ et $\lambda.f$ sont continues en $x_0\big)$.**
- **$\big(f$ continue en $x_0\big) \iff \Big(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)\Big)$.**
- **$\Big(f$ continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0\Big) \Longrightarrow \Big(\dfrac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 et y est continue$\Big)$.**
- **Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\big(f$ continue en $x_0\big) \iff \big(\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ continues en $x_0\big)$.**
- **Si $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{K}$, $x_0 \in A$, $\big(f$ continue en x_0 et g en $f(x_0)\big) \Longrightarrow \big(g \circ f$ continue en $x_0\big)$.**

REMARQUE 16.19 :

- *D'après les limites, si* f *est continue en* x_0 *alors* $|f|$ *l'est aussi,* f *est aussi bornée au voisinage de* x_0 *et si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $f(x_0) > 0$*, alors* f *est strictement positive sur un voisinage de* x_0*.*
- *L'ensemble des fonctions de* A *dans* $\mathbb{K}$ *qui sont continues en* x_0 *forment une sous-algèbre de* $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$*.*
- *Si* f *et* g *sont réelles et continues sur* A*, alors* $\mathrm{Sup}(f, g)$ *et* $\mathrm{Inf}(f, g)$ *le sont encore.*
- *L'application identité est bien sûr continue en tout* $x_0 \in \mathbb{R}$*, ainsi, les fonctions polynomiales sont continues en tout* $x_0 \in \mathbb{R}$ *car elles forment la sous-algèbre engendrée par* $x \mapsto x$*. De plus, toute fonction rationnelle est ainsi continue en tout* x_0 *qui n'annule pas le dénominateur.*

Définition 16.8

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ *et* $x_0 \in A$*, on dit que* f *est* **continue à gauche en** x_0 *si* $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$ *et on dit que* f *est* **continue à droite en** x_0 *si* $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$*.*

EXEMPLE 16.7 : La fonction partie entière est continue à droite en 2 mais pas à gauche.

Proposition 16.12

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ et $x_0 \in A$, alors on a l'équivalence :

$$\big(f \text{ continue en } x_0\big) \iff \big(f \text{ est continue à gauche en } x_0 \text{ et } f \text{ est continue à droite en } x_0\big).$$

16.3.2 : Continuité globale

Définition 16.9

On dit que $f : A \to \mathbb{K}$ **est continue (sur** A**)** *si* $\forall x_0 \in A,\ f$ *est continue en* x_0*.*

REMARQUE 16.20 :

- *D'après ce qu'on a vu au niveau local, toute fraction rationnelle est continue sur son ensemble de définition (là où le dénominateur ne s'annule pas).*
- *On a montré dans le chapitre des fonctions usuelles que les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont continues.*
- *Si* f *est continue, toute restriction de* f *est a fortiori continue.*

Proposition 16.13

Toute application lipschitzienne est continue.

Théorème 16.8

On dispose d'opérations sur les fonctions continues :

- **Si $f : A \to B$ et $g : B \to \mathbb{K}$ sont continues, $g \circ f$ est continue.**
- **Soit $f, g : A \to \mathbb{K}$ continues et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + g$, $\lambda.f$ et $f \times g$ sont continues.**
- **De plus, si f ne s'annule pas sur A, alors $\frac{1}{f}$ est continue.**
- **Si $f : A \to \mathbb{C}$, on a $\big(f$ continue$\big) \iff \big(\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues$\big)$.**

REMARQUE 16.21 : On note $C^0(A, \mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions continues de* A *dans* $\mathbb{K}$*. Ce qui précède prouve que* $C^0(A, \mathbb{K})$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$*.*

PARTIE 16.4 : CONTINUITÉ D'UNE FONCTION RÉELLE SUR UN INTERVALLE

16.4.1 : Théorème des valeurs intermédiaires

REMARQUE 16.22 : Pour deux réels α et β, on note $\widetilde{[\alpha;\beta]}$ l'intervalle $[\alpha;\beta]$ si $\alpha \leqslant \beta$ ou $[\beta;\alpha]$ si $\beta \leqslant \alpha$.

Théorème 16.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I intervalle, f continue, $(a,b) \in I^2$ et $y \in \widetilde{[f(a);f(b)]}$, alors on peut conclure grâce à ces hypothèses que : $\exists c \in \widetilde{[a;b]},\ y = f(c)$.

DÉMONSTRATION : Par exemple, si $a < b$ et $f(a) < y < f(b)$, on pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et si $f\Big(\dfrac{u_0+v_0}{2}\Big) < y$, on pose $u_1 = \dfrac{u_0+v_0}{2}$ et $v_1 = v_0$ et $u_1 = u_0$ et $v_1 = \dfrac{u_0+v_0}{2}$ si $f\Big(\dfrac{u_0+v_0}{2}\Big) > y$.

REMARQUE 16.23 : On vérifie en construisant des contre-exemples que toutes les hypothèses de ce théorème sont essentielles pour en avoir la conclusion.

Proposition 16.14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue avec I intervalle, $(a,b) \in I^2$ tel que $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors : $\exists c \in \widetilde{[a;b]},\ f(c) = 0$.

*REMARQUE 16.24 : Cette proposition est à l'origine de l'***algorithme de dichotomie** *qui permet de trouver une valeur approchée à ε près ($\varepsilon > 0$ quelconque) d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur le segment $[a;b]$ si f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a)f(b) < 0$.*

Proposition 16.15

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue I intervalle alors $\widehat{f}(I)$ est aussi un intervalle.

16.4.2 : Fonctions continues monotones

Proposition 16.16

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ monotone, soit $x_0 \in I$ qui n'est pas aux bornes de I, alors f admet en x_0 une limite à gauche et une limite à droite (resp. notées $f(x_0-)$ et $f(x_0+)$) : $f(x_0-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+)$ si f est croissante (resp. $f(x_0+) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0-)$ si f est décroissante).

REMARQUE 16.25 : Si les bornes de I sont dans I on dispose tout de même de résultats analogues à gauche ou à droite en ces points mais on peut très bien ne pas avoir de limite finie sinon.

Proposition 16.17

Avec ces notations, $\big(f$ est continue en $x_0\big) \iff \big(f(x_0-) = f(x_0+)\big)$.

EXEMPLE 16.8 : La fonction partie entière n'est donc pas continue en les entiers relatifs.

Proposition 16.18

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone, alors on a l'équivalence pratique :

$$f \text{ continue} \iff \widehat{f}(I) \text{ est un intervalle.}$$

Proposition 16.19

Soit I un intervalle, $J \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction continue et bijective. Alors f est strictement monotone, J est un intervalle et $f^{-1} : J \to I$ est aussi continue.

REMARQUE 16.26 : Graphiquement, il est simple de visualiser le graphe de f^{-1} en fonction de celui de f ; en effet, $\big((x,y) \in \Gamma_f\big) \Longleftrightarrow \big(x \in I$ et $y = f(x)\big) \Longleftrightarrow \big(y \in J$ et $x = f^{-1}(y)\big) \Longleftrightarrow \big((y,x) \in \Gamma_{f^{-1}}\big)$. Ainsi le graphe de f^{-1} est le symétrique orthogonal par rapport à la droite $\Delta : x = y$ du graphe de f.

16.4.3 : Continuité sur un segment

Théorème 16.10

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors "f est bornée et atteint ses bornes" qui signifie : $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f(x) = \operatorname*{Max}_{x\in[a;b]} f(x) = f(c)$ et $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{x\in[a;b]} f(x) = \operatorname*{Min}_{x\in[a;b]} f(x) = f(d)$ (pour un couple $(c,d) \in [a;b]^2$).

DÉMONSTRATION : Si on suppose f non majorée, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists u_n \in [a;b],\ f(u_n) \geqslant n$ (car n n'est pas un majorant de f sur $[a;b]$). Le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS fournit une contradiction.
Si $\alpha = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f(x)$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists u_n \in [a;b],\ \alpha - \dfrac{1}{2^n} < f(u_n) \leqslant \alpha$. Et rebelote !

REMARQUE 16.27 : Encore une fois, les deux hypothèses sont absolument essentielles : f doit être définie sur un segment (un intervalle fermé et borné : donc un compact) et f doit être continue.

Proposition 16.20

Avec ces notations : $\widehat{f}([a;b]) = \big[\displaystyle\operatorname*{Min}_{x\in[a;b]} f(x), \operatorname*{Max}_{x\in[a;b]} f(x)\big]$ ce qui s'énonce : "L'image directe d'un segment par une application continue est aussi un segment".

REMARQUE 16.28 : Comme il y a 9 types d'intervalles, une fonction continue peut transformer de 73 façons différentes des intervalles en intervalles.

PARTIE 16.5 : CONTINUITÉ UNIFORME

16.5.1 : Définition et exemples

Définition 16.10

Soit $f : A \to \mathbb{C}$, on dit que f est **uniformément continue** *(sur A) si elle vérifie l'assertion suivante :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x,y) \in A^2,\ |x-y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

EXEMPLE 16.9 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x^2)$ est continue mais pas uniformément.

Proposition 16.21

Avec ces notations : f lipschitzienne $\Longrightarrow$ f uniformément continue $\Longrightarrow$ f continue.

16.5.2 : Fonctions réelles continues sur un segment

Théorème 16.11

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si f est continue elle est aussi uniformément continue (théorème de HEINE (Eduard HEINE : mathématicien allemand 1821-1881)).

DÉMONSTRATION : Absurde, si $\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists (x,y) \in [a;b]^2,\ |x-y| \leqslant \alpha$ et $|f(x)-f(y)| > \varepsilon_0$, on peut, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, considérer $(u_n, v_n) \in [a;b]^2$ tel que $|u_n - v_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et $|f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon_0$.