CHAPITRE 17 CALCUL MATRICIEL

$\odot$ Cela fait des siècles que l'on étudie les matrices, par exemple pour des problèmes ludiques comme les **carrés latins** et **magiques**. Dans les années 1800, la méthode d'élimination de GAUSS-JORDAN (Wilhelm JORDAN : géodésien allemand 1842-1899) fut mise au point pour résoudre des systèmes linéaires. Ce fut SYLVESTER (James Joseph SYLVESTER : mathématicien et géomètre anglais 1814-1897) qui utilisa pour la première fois le terme **"matrice"** en 1850.

En 1925, HEISENBERG (Werner Karl HEISENBERG : physicien allemand 1901-1976) redécouvre le calcul matriciel en fondant une première formulation de ce qui allait devenir la mécanique quantique, en même temps que SCHRÖDINGER (Erwin Rudolf Josef Alexander SCHRÖDINGER : physicien autrichien 1887-1961). Une matrice de taille 4 modélisant les transformations de LORENTZ (Hendrik Antoon LORENTZ : physicien néerlandais 1853-1928) traduit la relativité restreinte d'EINSTEIN (Albert EINSTEIN : physicien allemand, puis apatride, puis suisse, et enfin helvético-américain 1879-1955).

PARTIE 17.1 : ESPACE VECTORIEL

Définition 17.1

Soit $\mathbb{K}$ *un corps commutatif,* $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, *on appelle* **matrice à** n **lignes,** p **colonnes à coefficients dans** $\mathbb{K}$ *un objet de la forme suivante* $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix}$ *où les* $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathbb{K}^{np}$.
L'ensemble des toutes ces matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Si* $n=p$ *on dit que la matrice est* **carrée**, *on note alors* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble de toutes ces matrices carrées.*
Deux matrices $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *et* $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *sont dites* **égales** *si :* $\forall(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!],\ a_{i,j}=b_{i,j}$.

EXEMPLE 17.1 **:** Par exemple, $A=\begin{pmatrix}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est le plus petit des carrés magiques.

REMARQUE 17.1 :

- *Pour* $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $(A,B)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ *telles que* $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *et* $\lambda\in\mathbb{K}$, *on définit deux nouvelles matrices* $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *et* $\lambda.A=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$. *On vient donc de définir une loi de composition interne + dans* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et une loi de composition externe . ; il ne reste plus qu'à étudier la structure.*

- *Avec ces notations, pour* $(i_0,j_0)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]$, *on définit la matrice élémentaire* $E_{i_0,j_0}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *qui contient des 0 à toutes les cases sauf la case* (i_0,j_0) *où se trouve un 1. On synthétise en écrivant* $E_{i_0,j_0}=(\delta_{i,i_0}\delta_{j,j_0})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *où* $\delta_{x,y}$ *est le* **symbole de** KRONECKER *(Léopold* KRONECKER *: mathématicien et logicien allemand 1823-1891) qui vaut 0 si* $x\neq y$ *et 1 si* $x=y$.

Proposition 17.1

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **est un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension** np **muni de sa base canonique** $(E_{i_0,j_0})_{\substack{1\leqslant i_0\leqslant n\\1\leqslant j_0\leqslant p}}$.

DÉMONSTRATION : Il suffit d'écrire la matrice $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ sous la forme $A=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}a_{i,j}E_{i,j}$.

Définition 17.2

La **transposée** *de* $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est la matrice* ${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Proposition 17.2

La transposition induit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

REMARQUE 17.2 : Cet isomorphisme est bien sûr un automorphisme involutif quand $n = p$.

Définition 17.3

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif, on dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une **matrice symétrique** *si elle vérifie ${}^tA = A$ et qu'elle est une* **matrice antisymétrique** *si on a ${}^tA = -A$; on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).*

REMARQUE 17.3 : $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si on a $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$ (resp $a_{i,j} = -a_{j,i}$). Ainsi, A antisymétrique admet une diagonale de 0.

Proposition 17.3

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
De plus : $\dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\big) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ **et** $\dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})\big) = \dfrac{n(n-1)}{2}$**.**

EXEMPLE 17.2 : Décomposons $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ en symétrique/antisymétrique.

Définition 17.4

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif, on dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- *une* **matrice triangulaire supérieure** *si* $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$
- *une* **matrice triangulaire inférieure** *si* $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$
- *une* **matrice diagonale** *si* $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.

REMARQUE 17.4 : On note respectivement $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n triangulaires supérieures, triangulaires inférieures et diagonales ; il est clair que ce sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que nous avons $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. De plus : $\dim\big(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})\big) = \dim\big(\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})\big) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim\big(\mathcal{D}_n(\mathbb{K})\big) = n$ avec des bases simples.

Définition 17.5

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la **trace** *de la matrice carrée A, notée $\mathrm{tr}(A)$, c'est le scalaire* $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

Proposition 17.4

L'application trace est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

REMARQUE 17.5 : On note I_n la matrice diagonale de taille n qui possède une diagonale de 1, elle est appelée la **matrice identité** *; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*

PARTIE 17.2 : PRODUIT MATRICIEL

Définition 17.6

Soit $(n, m, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $\mathbb{K}$ *un corps commutatif et deux matrices* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ *; on définit le* **produit** $A \times B$, *c'est la matrice* $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *définie par :* $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

REMARQUE 17.6 : Ce produit se "voit" assez bien si on dispose A *à gauche de* C *et* B *au dessus de* C.

EXEMPLE 17.3 : On calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 17.1

Soit $(n, m, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ **et** $(A, A', B, B', C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 \times \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})^2 \times \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ **et** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ **où** $\mathbb{K}$ **est un corps commutatif, alors nous avons les relations suivantes :**

$$(\lambda A + \mu A') \times B = \lambda A \times B + \mu A' \times B \ ; \ A \times (\lambda B + \mu B') = \lambda A \times B + \mu A \times B' \quad \text{et} \quad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

REMARQUE 17.7 : On ne peut définir et comparer les matrices $A \times B$ *et* $B \times A$ *que si* $n = p = m$ *; dans ce cas, on n'a que très rarement* $A \times B = B \times A$ *(on dit dans ce cas que* A *et* B **commutent***).*

EXEMPLE 17.4 : On calcule $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 17.5

Si les tailles des matrices le permettent, on a $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

REMARQUE 17.8 : • *Même s'il n'est pas au programme, on peut évoquer le* **produit par blocs**.

- *En posant le calcul, il est clair que si* $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *on a* $I_n \times M = M = M \times I_p$.
- *Dorénavant, comme pour toute loi de composition notée multiplicativement, on ne notera plus le symbole* $\times$ *dans un produit donc on pourra par exemple noter* ABC *le produit de trois matrices.*

Proposition 17.6

Si $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ **alors on a** ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Si $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ **alors on a** $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **alors** $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.

REMARQUE 17.9 : De plus, si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, *alors* $\mathrm{tr}(A\,{}^tA) = \mathrm{tr}({}^tA A) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j}^2$.

Par conséquent : $\mathrm{tr}(A\,{}^tA) \geqslant 0$ *et on a l'équivalence :* $\mathrm{tr}(A\,{}^tA) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.

PARTIE 17.3 : ALGÈBRE DES MATRICES CARRÉES

Théorème 17.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **est une** $\mathbb{K}$**-algèbre de neutre** I_n.

REMARQUE 17.10 : • *Dès que $n \geqslant 2$, elle n'est ni intègre ni commutative.*
• *$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en général ; alors que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ en sont bien des sous-algèbres, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ étant même commutative (mais toujours pas intègre).*

REMARQUE 17.11 : Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose $A = B + C$ avec $BC = CB$ alors on peut écrire $A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k C^{p-k}$. Cette formule est particulièrement intéressante si l'une des deux matrices (ou mieux les deux) est diagonale ou nilpotente. Le calcul des puissances de matrices est essentiel pour les probabilités, les résolutions de systèmes différentiels, etc...

EXEMPLE 17.5 :
• Soit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$. On peut exprimer u_n et v_n en fonction de n en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
• On peut aussi modéliser l'obtention d'un yam (la face voulue est fixée) avec 5 dès à 6 faces par une matrice 6×6 (car il y a 6 états possibles) si on se rappelle la **formule des probabilités totales**.

Définition 17.7

On note $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe multiplicatif des **matrices inversibles** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

REMARQUE 17.12 : On admet provisoirement, mais ça découlera d'un théorème futur quand on aura découvert la relation entre les matrices et les applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie : une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle l'est à gauche (ou à droite).

Proposition 17.7

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors ${}^tA$ est inversible et on a $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

REMARQUE 17.13 : Un des objectifs majeurs à propos des matrices carrées A est d'arriver à les écrire sous la forme $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible et D une matrice diagonale. Le calcul des puissances de A est alors facile car $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = PD^pP^{-1}$.

REMARQUE 17.14 : Les matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) à termes diagonaux non nuls constituent un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$, de même que pour les matrices diagonales inversibles.

PARTIE 17.4 : MATRICES DE GAUSS

Définition 17.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $(\alpha, \lambda) \in (\mathbb{K}^*)^2$, on définit les **matrices de transvection** $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}$, *les* **matrices de dilatation** $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ *et les* **matrices d'interversion** $I_{i,j} = I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$.

EXEMPLE 17.6 : $T_{1,2}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(n = 3)$.

REMARQUE 17.15 :
• *La multiplication d'une matrice rectangulaire A par les matrices de* Gauss *à gauche (resp. à droite) modélise les opérations élémentaires du* **pivot de** Gauss *sur les lignes (resp. sur les colonnes).*
• *Ces matrices de* Gauss *sont inversibles : $T_{i,j}(\alpha)^{-1} = T_{i,j}(-\alpha)$, $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$ et $I_{i,j}^{-1} = I_{i,j}$.*
• *Ceci nous permet d'avoir un algorithme pour le calcul de l'inverse d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$.*

EXEMPLE 17.7 : Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.