CHAPITRE 18

DÉRIVATION

PARTIE 18.1 : DÉRIVÉE PREMIÈRE

⊙ La théorie des dérivées a vu le jour au 17-ième siècle avec le calcul infinitésimal de NEWTON et de LEIBNIZ, mais c'est au 18-ième siècle que D'ALEMBERT (Jean le Rond D'ALEMBERT : mathématicien, philosophe et encyclopédiste français 1717-1783) définit formellement la dérivée comme la limite des taux d'accroissements ; néanmoins la notion de limite n'était pas très au point et c'est WEIERSTRASS qui a apporté toute la rigueur mathématique nécessaire alors que LAGRANGE a le premier introduit la notation $f'(x)$.

18.1.1 : Définitions et propriétés de la dérivée locale

REMARQUE 18.1 :

- Pour une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $(x, y) \in A^2$ (A est une partie de $\mathbb{R}$) tel que $x \neq y$, on appelle **taux d'accroissement** de f entre x et y la quantité $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in \mathbb{K}$.
- Quand la fonction est réelle, ce taux d'accroissement s'interprète comme la **pen**te de la corde reliant $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$; cela constitue une "vitesse moyenne" de f entre x et y .

Définition 18.1

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$, $x_0 \in A$, on dit que f est **dérivable en x_0** si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, notée alors $f'(x_0)$.
La droite d'équation $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ est appelée la **tangente en x_0 à la courbe de f** .

REMARQUE 18.2 :

- Les fonctions affines sont dérivables partout et admettent pour tangente la courbe elle-même !
- Lorsque $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, on ne dit pas que la fonction est dérivable en x_0 mais on peut tout de même parler de "corde limite", la tangente (abus de notation) est alors la droite d'équation $x = x_0$.

EXEMPLE 18.1 : Tangente à la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en $(x_0, \sqrt{x_0})$ si $x_0 > 0$.

Définition 18.2

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$, $x_0 \in A$, on dit que f est **dérivable à gauche en x_0** (resp. **dérivable à droite en x_0**) si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe), notée alors $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$).
La droite d'équation $y - f(x_0) = f'_g(x_0)(x - x_0)$ (resp. $y - f(x_0) = f'_d(x_0)(x - x_0)$) est alors appelée la **tangente à gauche en x_0 à la courbe de f** (resp. la **tangente à droite en x_0 à la courbe de f**).

EXEMPLE 18.2 : La fonction $x \mapsto |x|$ admet en 0 des dérivées à gauche et à droite.

Proposition 18.1

Avec ces notations, et si x_0 est au cœur de A , on a la caractérisation :

$$(f \text{ est dérivable en } x_0) \iff (f \text{ l'est à gauche et à droite en } x_0 \text{ avec } f'_g(x_0) = f'_d(x_0)).$$

Dans ce cas, on a bien sûr : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

EXEMPLE 18.3 : Si $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, alors la fonction $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p_n(x) = x^n$ est dérivable en x_0 et on a la relation classique : $p'_n(x_0) = nx_0^{n-1}$.

18.1.2 : Structure algébrique

REMARQUE 18.3 : Avec les notations précédentes, l'application f est dérivable en $x_0 \in A$ (resp. à gauche/à droite) si et seulement s'il existe une fonction $\varphi : A \rightarrow \mathbb{K}$ continue (resp. à gauche/à droite) en x_0 et telle que $\forall x \in A$, $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$. Dans ce cas, on a $f'(x_0) = \varphi(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0) = \varphi(x_0) / f'_d(x_0) = \varphi(x_0)$). Ceci permet de ramener la dérivabilité au niveau de la continuité.

Proposition 18.2

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ et $x_0 \in A$, alors on a les implications :

- f dérivable en $x_0 \implies f$ continue en x_0 .
- f dérivable à gauche en $x_0 \implies f$ continue à gauche en x_0 .
- f dérivable à droite en $x_0 \implies f$ continue à droite en x_0 .

REMARQUE 18.4 : La réciproque est fautive avec $x_0 = 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Théorème 18.1

Soit $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}$, $x_0 \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, si f et g sont dérivables en x_0 , alors :

- $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- $f \times g$ est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- $\lambda.f$ est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
- $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 si $g(x_0) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.
- $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 si $g(x_0) \neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

EXEMPLE 18.4 : Si $n \in \mathbb{Z}_+^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction $p_n : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p_n(x) = x^n$ est dérivable en x_0 et on a de nouveau la relation : $p_n'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

REMARQUE 18.5 :

- On a bien sûr les mêmes conclusions en ce qui concerne la dérivabilité à gauche ou à droite.
- L'ensemble des fonctions dérivables en x_0 est donc une sous-algèbre de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ et l'application $D_{x_0} : f \mapsto f'(x_0)$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel mais n'est pas un morphisme d'algèbres. Les fonctions polynomiales constituent une sous-algèbre de celle-ci.
- Si des fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en x_0 alors on montre par récurrence que le produit l'est aussi et on établit la formule classique et pratique suivante : $\left(\prod_{k=1}^n f_k\right)'(x_0) = \sum_{k=1}^n \left(f_k'(x_0) \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} f_j(x_0)\right)$.

Proposition 18.3

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes et $x_0 \in A$, si on pose $f_1 = \operatorname{Re}(f)$ et $f_2 = \operatorname{Im}(f)$, on a l'équivalence : $(f \text{ est dérivable en } x_0) \iff (f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont dérivables en } x_0)$.

Dans ce cas : $f'(x_0) = f_1'(x_0) + if_2'(x_0)$ d'où $\operatorname{Re}(f'(x_0)) = (\operatorname{Re}(f))'(x_0)$ et $\operatorname{Im}(f'(x_0)) = (\operatorname{Im}(f))'(x_0)$.

Théorème 18.2

Si $f : I \rightarrow J$ est une bijection continue sur I intervalle et dérivable en $a \in I$ alors si $f'(a) \neq 0$ on a f^{-1} dérivable en $b = f(a)$ avec $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

DÉMONSTRATION : On écrit $\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + (x - a)\varphi(x)$ avec φ continue en a et on compose par f^{-1} (on prend $x = f^{-1}(y)$ avec $y \neq f(a) = b$) pour obtenir la limite du taux d'accroissements pour f^{-1} .

REMARQUE 18.6 : Interprétation géométrique : la tangente au graphe de f en $(a, f(a)) = (a, b)$ est la droite $T : y = f(a) + f'(a)(x - a) = b + f'(a)(x - a)$ et sa symétrique (orthogonalement par rapport à la droite $y = x$) est $T' : y = a + \frac{1}{f'(a)}(x - b)$ (c'est-à-dire en fait $y = f^{-1}(b) + (f^{-1})'(b)(x - b)$) qui est tangente au graphe de f^{-1} en $(b, a) = (b, f^{-1}(b))$. On a échangé les rôles joués par x et y .

EXEMPLE 18.5 : Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $r = \frac{1}{q}$ et $x_0 > 0$, alors la fonction $p_r : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $p_r(x) = x^r$ est dérivable en x_0 avec encore : $p'_r(x_0) = r x_0^{r-1}$. Il suffit pour cela de se rappeler que p_r est la réciproque de p_q (restreinte à $\mathbb{R}_+^*$) et d'appliquer le théorème 18.2.

Théorème 18.3

Si $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{K}$ avec f dérivable en $a \in I$ et g dérivable en $b = f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(b)$.

DÉMONSTRATION : Il suffit d'écrire $\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x - a)\varphi(x)$ avec φ continue en a et $\forall y \in J, g(y) = g(b) + (y - b)\psi(y)$ avec ψ continue en b ; on compose ensuite.

REMARQUE 18.7 : On peut retrouver l'expression de la dérivée d'une fonction réciproque (si on sait par le théorème 18.2 qu'elle existe) en dérivant (en a) la relation $f^{-1} \circ f = \text{id}_I$ grâce au théorème 18.3.

EXEMPLE 18.6 :

- Enfin, on prend $r = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $p_r : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, p_r(x) = x^r = (x^{\frac{1}{q}})^p = (x^{\frac{1}{q}})^p$ (on montre que les deux résultats sont égaux). On se sert des calculs précédents et du théorème 18.3 pour établir que toujours : $p'_r(x_0) = r x_0^{r-1}$.
- Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $p_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ alors si on prend $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on a bien la relation attendue : $p'_\alpha(x_0) = \alpha x_0^{\alpha-1}$.

18.1.3 : Dérivée globale et application dérivée

Définition 18.3

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$, si f est dérivable en tout réel $x \in A$ (on dit que f est **dérivable (sur A)**), on peut définir la **fonction dérivée** $f' : A \rightarrow \mathbb{K}$ par : $\forall x \in A, f'(x)$ est la dérivée de f en x .

REMARQUE 18.8 : On peut n'avoir l'existence de $f'(x)$ que pour x appartenant à une partie stricte de A auquel cas la fonction f' (qu'on peut définir par abus de notation) ne sera pas définie sur A en entier.

EXEMPLE 18.7 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Alors f n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$, on peut définir $f' : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f'(x) = -1$.

Proposition 18.4

Avec ces notations : f dérivable (sur A) $\implies f$ continue (sur A).

Théorème 18.4

Soit $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors nous avons :

- $f + g$ est dérivable (sur A) et $(f + g)' = f' + g'$.
- λf est dérivable (sur A) et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- $f \times g$ est dérivable (sur A) et $(fg)' = fg' + f'g$.

Si, de plus, la fonction g ne s'annule pas sur A , alors :

- $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables (sur A) et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

REMARQUE 18.9 :

- Comme les polynômes sont stables par dérivation, les fonctions rationnelles le sont aussi.
- Si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables sur A , alors leur produit aussi et : $\left(\prod_{k=1}^n f_k\right)' = \sum_{k=1}^n \left(f_k' \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} f_j\right)$.

Proposition 18.5

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes, si on pose $f_1 = \operatorname{Re}(f)$ et $f_2 = \operatorname{Im}(f)$, on a l'équivalence : f est dérivable (sur A) $\iff f_1$ et f_2 le sont (sur A).

Dans ce cas : $f' = f_1' + if_2'$ d'où $\operatorname{Re}(f') = (\operatorname{Re}(f))'$ et $\operatorname{Im}(f') = (\operatorname{Im}(f))'$.

EXEMPLE 18.8 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ax}$ ($a \in \mathbb{C}$), alors $f' = af$ (vu au chapitre 4).

Théorème 18.5

Soit $f : I \rightarrow J$ bijection dérivable entre deux intervalles telle que f' ne s'annule pas (sur I), alors f^{-1} est aussi dérivable (sur J) et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

EXEMPLE 18.9 : La dérivée de Arctan est $\operatorname{Arctan}' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ (vu au chapitre 2).

Théorème 18.6

Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{K}$ (I et J sont deux intervalles) telles que f et g sont dérivables alors $g \circ f$ est dérivable et : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

EXEMPLE 18.10 : • De quoi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \operatorname{Arctan}(e^x)$ est-elle une primitive ?

- Calculons la dérivée de $f :]\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

REMARQUE 18.10 : Pour une fonction dérivable $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ qui ne s'annule pas sur A , on appelle dérivée logarithmique de f la fonction $\frac{f'}{f}$. Si f est à valeurs réelles, la dérivée logarithmique de f est

$(\ln(|f|))'$ ce qui justifie son nom. Sous réserve d'existence, nous avons, pour $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}, \lambda \in \mathbb{K}^*, n \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, les formules suivantes : $\frac{(fg)'}{(fg)} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$; $\frac{(\lambda f)'}{(\lambda f)} = \frac{f'}{f}$; $\frac{(f^n)'}{(f^n)} = n \frac{f'}{f}$ et (si $f > 0$) $\frac{(f^\alpha)'}{(f^\alpha)} = \alpha \frac{f'}{f}$.

PARTIE 18.2 : DÉRIVÉES SUCCESSIVES**18.2.1 : Définition et propriétés****Définition 18.4**

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable telle que f' est aussi dérivable, alors on définit la fonction dérivée seconde de f , notée $f'' = f^{(2)}$ et c'est $f^{(2)} = f'' = (f')'$. Par récurrence, si pour un entier $n \geq 2$, la fonction $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable alors on définit la fonction dérivée n -ième de f , notée $f^{(n)}$, par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ et on dit que f est n fois dérivable.

On dit que f est indéfiniment dérivable si f est n fois dérivable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE 18.11 : • Les fonctions $\exp, \cos, \sin$ sont bien sûr indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Soit $f :]-1; +\infty[$ définie par : $\forall x > -1, f(x) = \ln(1+x)$, calculons ses dérivées successives.

REMARQUE 18.11 : • On note aussi $f'' = f^{(2)}$ et $f''' = f^{(3)}$ mais ça s'arrête là !

- Par convention, $f^{(0)} = f$ de sorte que, sous réserve d'existence : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.
- On peut utiliser, surtout en physique, la notation de LEIBNIZ : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}$.
- Bien sûr, si une fonction f est n fois dérivable, alors elle l'est p fois pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- En notant D la "fonction dérivation", $f' = D(f)$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = D(f^{(n-1)}) = \dots = D^n(f)$ par définition, cela prouve que si $n \in \mathbb{N}$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p + q = n$, on a $f^{(n)} = (f^{(p)})^{(q)} = (f^{(q)})^{(p)}$.

18.2.2 : Structure et classe

Définition 18.5

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est :

- de classe D^n si elle est n fois dérivable.
- de classe C^n si elle est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ est continue sur A .
- de classe C^∞ si elle est indéfiniment dérivable.

$D^n(A, \mathbb{K})$ (resp. $C^n(A, \mathbb{K})$) : ensemble des fonctions n fois dérivables de A dans $\mathbb{K}$ (resp. de classe C^n).

Théorème 18.7

Soit $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions n fois dérivables et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

- $f + g$ est n fois dérivable et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.
- λf est n fois dérivable et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.
- $f \times g$ est n fois dérivable et : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (la formule de LEIBNIZ).

Si, de plus, la fonction g ne s'annule pas sur A : $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont n fois dérivables.

De plus, si on suppose f et g de classe C^n , alors $f + g, \lambda f, fg$ sont aussi de classe C^n et si g ne s'annule pas $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont encore de classe C^n .

DÉMONSTRATION : Toutes ces implications se font par récurrence sur n .

REMARQUE 18.12 :

- Ce qui précède prouve que si $n \in \overline{\mathbb{N}}$: $C^n(A, \mathbb{K})$ et $D^n(A, \mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
- D'après la proposition 18.7, on a : $C^\infty(A, \mathbb{K}) \subset \dots \subset C^n(A, \mathbb{K}) \subset D^n(A, \mathbb{K}) \subset C^{n-1}(A, \mathbb{K}) \subset \dots \subset C^2(A, \mathbb{K}) \subset D^2(A, \mathbb{K}) \subset C^1(A, \mathbb{K}) \subset D^1(A, \mathbb{K}) \subset C^0(A, \mathbb{K}) \subset \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

EXEMPLE 18.12 : • En considérant $f : x \mapsto |x|$, l'inclusion $D^1(A, \mathbb{K}) \subset C^0(A, \mathbb{K})$ est stricte.

- La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée n'est pas continue donc l'inclusion $C^1(A, \mathbb{K}) \subset D^1(A, \mathbb{K})$ est stricte.

Proposition 18.6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes, si on pose $f_1 = \text{Re}(f)$ et $f_2 = \text{Im}(f)$, on a l'équivalence : f est n fois dérivable $\iff f_1$ et f_2 le sont.

Dans ce cas : $f^{(n)} = f_1^{(n)} + if_2^{(n)}$ d'où $\text{Re}(f^{(n)}) = (\text{Re}(f))^{(n)}$ et $\text{Im}(f^{(n)}) = (\text{Im}(f))^{(n)}$.

De plus, on a l'équivalence : f est de classe $C^n \iff f_1$ et f_2 le sont.

EXEMPLE 18.13 : • $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

- On peut calculer la dérivée n -ième de $f : x \mapsto e^x \cos(x)$ de deux manières différentes.

Théorème 18.8

Soit $n \in \overline{\mathbb{N}}^*$, $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{K}$ (I et J sont deux intervalles) telles que f et g sont n fois dérivables (resp. de classe C^n) alors $g \circ f$ est n fois dérivable (resp. de classe C^n).

De plus, si $f : I \rightarrow J$ est une bijection n fois dérivable (resp. de classe C^n) telle que f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est aussi n fois dérivable (resp. de classe C^n) sur J .

REMARQUE 18.13 : Les formules des dérivées successives de f^{-1} ou $g \circ f$ sont assez compliquées :

- Sous réserve d'existence, on a les formules suivantes : $(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}$, puis $(f^{-1})'' \circ f = -\frac{f''}{(f')^3}$,

$$(f^{-1})''' \circ f = \frac{3(f'')^2 - f'f'''}{(f')^5} \text{ et } (f^{-1})^{(4)} \circ f = \frac{10f'f''f''' - (f')^2f^{(4)} - 15(f'')^3}{(f')^7}. \text{ Je vous laisse la suite.}$$

- De même, si elles existent, nous avons les relations suivantes : $(g \circ f)' = (f')(g' \circ f)$ puis $(g \circ f)'' = (f'')(g' \circ f) + (f')^2(g'' \circ f)$, $(g \circ f)''' = (f''')(g' \circ f) + 3(f'f'')(g'' \circ f) + (f')^3(g''' \circ f)$ mais on a la formule de FAÀ DI BRUNO (Francesco FAÀ DI BRUNO : prêtre et mathématicien italien 1825-1888) :

$$(g \circ f)^{(n)} = \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \\ m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n}} \frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_n! n!^{m_n}} (g^{(m_1 + \dots + m_n)} \circ f) \times \prod_{j=1}^n (f^{(j)})^{m_j}.$$

PARTIE 18.3 : VARIATIONS DES FONCTIONS RÉELLES DÉRIVABLES

18.3.1 : ROLLE et accroissements finis

Théorème 18.9

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ ($a < b$) telle que $f(a) = f(b)$, alors : $\exists c \in]a; b[, f'(c) = 0$ (théorème de ROLLE (Michel ROLLE : mathématicien français 1652-1719)).

REMARQUE 18.14 : • Il faut avoir à l'esprit l'aspect graphique et cinématique de ce théorème.

- f doit être réelle comme le montre le contre-exemple de la fonction $f : x \rightarrow e^{ix}$ telle que $f(0) = f(2\pi)$.
- Toutes les hypothèses sont absolument essentielles pour avoir la conclusion du théorème.
- On peut l'énoncer d'une autre manière : $\exists \theta \in]0; 1[, f'(a + \theta(b - a)) = 0$.

Théorème 18.10

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ ($a < b$), alors on peut conclure : $\exists c \in]a; b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (c'est le théorème des accroissements finis).

REMARQUE 18.15 : • Il existe un "instant" où la vitesse instantanée vaut la vitesse moyenne !

- On peut aussi écrire ce résultat sous la forme : $\exists \theta \in]0; 1[, f'(a + \theta(b - a)) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et la condition $a < b$ n'est plus d'actualité : il suffit de mettre des tildes sur les intervalles.

- Une autre forme : si $f : \widetilde{[a; b]} \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a \neq b$) est continue sur $\widetilde{[a; b]}$ et dérivable sur $\widetilde{]a; b[}$: $\exists c \in \widetilde{]a; b[, f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$ ce qui constitue le cas $n = 0$ de l'égalité de TAYLOR-LAGRANGE.

REMARQUE 18.16 : (HP) L'égalité de TAYLOR-LAGRANGE est hors-programme mais pas l'inégalité :

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : \widetilde{[a; b]} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n sur $\widetilde{[a; b]}$ et $n + 1$ fois dérivable sur $\widetilde{]a; b[}$, alors :

$$\exists c \in \widetilde{]a; b[, f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \dots + \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

- On en déduit l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE (bien sûr), si f est de classe C^{n+1} sur $\widetilde{[a; b]}$:

$$\left| f(b) - f(a) - (b - a)f'(a) - \dots - \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{M_{n+1}|b - a|^{n+1}}{(n + 1)!} \text{ avec } M_{n+1} = \text{Max}_{x \in \widetilde{[a; b]}} |f^{(n+1)}(x)|.$$

EXEMPLE 18.14 : Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ noté abusivement : $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Théorème 18.11

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalle, $x_0 \in I$, on suppose que f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que f' admet une limite en x_0 notée $l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x)$; alors f est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0) = l$.

EXEMPLE 18.15 : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ si : $\forall x \leq 0, f(x) = 0$ et $\forall x > 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

Théorème 18.12

Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ (avec $a \neq b$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) continue sur $]a; b[$ et dérivable sur $]a; b[$ telle que f' est bornée sur $]a; b[$, on a : $|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \times \sup_{x \in]a; b[} |f'(x)|$.

DÉMONSTRATION : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pose $f(b) - f(a) = \rho e^{i\alpha}$ et $g = e^{-i\alpha} f = g_1 + i g_2$; par conséquent $|g'_1| \leq |g'| = |f'| \leq M = \sup_{x \in]a; b[} |f'(x)|$ d'où l'on déduit que $|g_1(b) - g_1(a)| \leq M|b - a|$.

REMARQUE 18.17 : Plus précisément pour les fonctions à valeurs réelles, avec ces notations, si $a < b$ et qu'on suppose que $\forall x \in]a; b[, \alpha \leq f'(x) \leq \beta$, alors : $\alpha(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq \beta(b - a)$.

Proposition 18.7

Soit $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ avec I intervalle et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on suppose f continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors : f est k -lipschitzienne sur $I \iff \forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq k$.

REMARQUE 18.18 : f de classe C^1 sur $]a; b[$ est M_1 -lipschitzienne où $M_1 = \max_{x \in]a; b[} |f'(x)|$.

18.3.2 : Variations des fonctions

Proposition 18.8

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ avec I intervalle et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on suppose f continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors nous avons l'équivalence : f constante sur $I \iff \forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$.

EXEMPLE 18.16 : C'est ainsi qu'on a prouvé que si $a > 0 : \forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(ax) - \ln(x) - \ln(a) = 0$.

Proposition 18.9

Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ avec I intervalle et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on suppose f et g continues sur I et dérivables sur $\overset{\circ}{I}$ alors : $(\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in I, f(x) = g(x) + \lambda) \iff (\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = g'(x))$.

EXEMPLE 18.17 : Soit à comparer, pour tout réel x , $2 \operatorname{Arctan}(e^x)$ et $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$.

Théorème 18.13

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I intervalle et f continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$:

- $(f \text{ est croissante sur } I) \iff (\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0)$.
- $(f \text{ est strictement croissante sur } I) \iff (\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0 \text{ et } f' \text{ ne s'annule sur aucun intervalle du type } [a; b] \text{ avec } (a, b) \in \overset{\circ}{I}^2 \text{ et } a < b)$.

REMARQUE 18.19 : On inverse les inégalités pour caractériser la (stricte) décroissance.

EXEMPLE 18.18 : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \cos(x)$ est strictement croissante.

PARTIE 18.4 : CONVEXITÉ

18.4.1 : Définitions et géométrie

REMARQUE 18.20 : On dit qu'une fonction réelle définie sur un intervalle est **convexe** si toutes ses cordes sont au dessus de son graphe entre les extrémités de la corde.

Définition 18.6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle, on dit que f est :

- **convexe** si $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0; 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.
- **concave** si $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0; 1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.
- **strictement convexe** si $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in]0; 1[, x \neq y \implies f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$.
- **strictement concave** si $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in]0; 1[, x \neq y \implies f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y)$.

EXEMPLE 18.19 : $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$ est strictement concave.

18.4.2 : Caractérisation de la convexité

Proposition 18.10

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe avec I un intervalle, alors nous avons :

$$\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0; 1]^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \implies f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

REMARQUE 18.21 : Ces inégalités sont la forme discrète des inégalités de JENSEN (Johan JENSEN : mathématicien et ingénieur danois 1859-1925) utilisées en théorie de la mesure et en probabilités.

Proposition 18.11

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I intervalle, pour $x \in I$, soit la fonction $T_x : I \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in I \setminus \{x\}, T_x(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$. Alors : f est convexe $\iff \forall x \in I, T_x$ est croissante.

REMARQUE 18.22 : • Bien sûr les T_x sont décroissantes pour f concave.

- Ainsi, si f est convexe, elle admet en tous points x et y ($x < y$) intérieurs à I des dérivées à gauche et à droite et qui vérifient de plus la quadruple inégalité : $f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$.
- Ces inégalités garantissent géométriquement que la courbe d'une fonction convexe est au dessus de ses tangentes (même si ce ne sont que des tangentes à gauche ou à droite).
- Les fonctions convexes étant dérivables à gauche et à droite en tout point $x \in \overset{\circ}{I}$, elles y sont continues à gauche et à droite donc continues. On ne peut rien dire aux bords de I .

Proposition 18.12

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable avec I un intervalle ouvert : f convexe $\iff f'$ est croissante.

REMARQUE 18.23 : Si I contient ses bornes, on peut ne supposer f dérivable que sur $\overset{\circ}{I}$ mais alors il faut rajouter des hypothèses en ces bornes pour avoir une condition nécessaire et suffisante de convexité.

Théorème 18.14

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable avec I un intervalle : f est convexe $\iff f'' \geq 0$.

EXEMPLE 18.20 : La fonction $\ln$ est concave ; la moyenne géométrique de n réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$ est donc toujours inférieure à leur moyenne arithmétique : $\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.