CHAPITRE 19
GROUPE SYMÉTRIQUE

PARTIE 19.1 : STRUCTURE

Définition 19.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$*, on rappelle qu'une* **permutation** *de* $[\![1;n]\!]$ *est une bijection de* $[\![1;n]\!]$ *dans lui-même.*
On note $\boldsymbol{\sigma}_n$ *l'ensemble de toutes ces permutations.*

<u>*REMARQUE 19.1*</u> *:* • *On se souvient que le cardinal de* $\boldsymbol{\sigma}_n$ *est* $n!$.

• *On peut noter les permutations plus élégamment :* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *par exemple.*

Proposition 19.1

$(\boldsymbol{\sigma}_n, \circ)$ est un groupe dont le neutre est l'identité (non abélien dès que $n \geqslant 3$).

<u>*REMARQUE 19.2*</u> *: On appelle* **support** *de* σ *(noté* S_σ*) les éléments de* $[\![1;n]\!]$ *qui sont "modifiés" par* σ *:* $S_\sigma = \{k \in [\![1;n]\!] \mid \sigma(k) \neq k\}$*. Deux permutations à supports disjoints commutent.*

Définition 19.2

On appelle **transposition** *toute permutation de* $\boldsymbol{\sigma}_n$ *qui n'échange que deux entiers.*
Si celle-ci n'échange que i *et* j *(avec bien sûr* $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ *et* $i \neq j$*) alors on la note* $\tau_{i,j}$*.*

<u>*REMARQUE 19.3*</u> *: Il y a* $\binom{n}{2}$ *transpositions dans* $\boldsymbol{\sigma}_n$ *; ce ne sont pas les seuls éléments d'ordre 2.*

Proposition 19.2

Le groupe $\boldsymbol{\sigma}_n$ est engendré par les transpositions ; plus précisément, chaque permutation peut s'écrire comme composée d'au plus $n-1$ transpositions.

<u>EXEMPLE 19.1</u> : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \tau_{5,2} \circ \tau_{4,3} \circ \tau_{3,1}$.

PARTIE 19.2 : SIGNATURE ET GROUPE ALTERNÉ

Définition 19.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\sigma \in \boldsymbol{\sigma}_n$*, on appelle* **inversion** *pour* σ *tout couple* $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ *tel que* $i < j$ *et* $\sigma(i) > \sigma(j)$ *(*σ *inverse l'ordre entre* i *et* j *et leurs images* $\sigma(i)$ *et* $\sigma(j)$*).*
Avec ces notations, en notant N *le nombre d'inversions de* σ*, on appelle* **signature** *de* σ *le nombre 1 si* N *est pair et* -1 *si N est impair ; on note* $\varepsilon(\sigma)$ *la signature de* σ *de sorte que* $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$*.*
On dit qu'une permutation est **paire** *si* $\varepsilon(\sigma) = 1$ *et on dit qu'elle est* **impaire** *si* $\varepsilon(\sigma) = -1$*.*

<u>EXEMPLE 19.2</u> : Pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\varepsilon(\sigma) = 1$ car $N = 4$.

Proposition 19.3

Avec ces notations : $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \dfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$**. Les transpositions sont impaires.**

DÉMONSTRATION : On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de tous les doubletons de $[\![1;n]\!]$, il y en a bien sûr $\binom{n}{2}$. L'application $\tilde{\sigma} : \mathcal{D}_n \to \mathcal{D}_n$ définie par : $\forall \{i,j\} \in \mathcal{D}_n,\ \tilde{\sigma}(\{i,j\}) = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ en est une permutation.

Théorème 19.1

La fonction $\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}_n \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes.

Définition 19.4

On appelle **groupe alterné d'ordre** n*, noté* $\mathcal{A}_n$*, l'ensemble des permutations paires de* $\boldsymbol{\sigma}_n$*.*

REMARQUE 19.4 : • Bien sûr, $\mathcal{A}_n$ *est un sous-groupe de* $\boldsymbol{\sigma}_n$*.*
• Si $n \geqslant 2$ *et si* σ_0 *est une permutation impaire (il en existe), alors l'application* $\varphi : \mathcal{A}_n \to \boldsymbol{\sigma}_n \backslash \mathcal{A}_n$ *définie par :* $\forall \sigma \in \mathcal{A}_n,\ \varphi(\sigma) = \sigma \circ \sigma_0$ *est bijective de sorte que* $\operatorname{card}(\mathcal{A}_n) = \dfrac{n!}{2}$.

PARTIE 19.3 : CYCLES, ORDRE ET PUISSANCES

Définition 19.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [\![2;n]\!]$*, une permutation* σ *de* $\boldsymbol{\sigma}_n$ *est appelée un* p-**cycle** *(*p *est appelé la* **longueur du cycle***) s'il existe* $c_1, \cdots, c_p$ *dans* $[\![1;n]\!]$ *distincts deux à deux tels que :*

$$\forall k \in [\![1;p-1]\!],\ \sigma(c_k) = c_{k+1} \text{ et } \sigma(c_p) = c_1 \text{ et enfin } \forall i \in [\![1;n]\!] \setminus \{c_1, \cdots, c_p\},\ \sigma(i) = i.$$

Ce cycle est noté spécialement $\sigma = (c_1, c_2, \cdots, c_{p-1}, c_p)$*. Chaque terme de cette "liste" est envoyé sur celui qui se trouve juste à droite sauf le dernier qui est envoyé sur le premier.*

EXEMPLE 19.3 : La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{\sigma}_6$ est un 4-cycle.

REMARQUE 19.5 : Le nombre de p*-cycles est* $(p-1)!\binom{n}{p} = \dfrac{1}{p} A_n^p$.

Proposition 19.4

Un cycle de longueur p a une signature de $(-1)^{p-1}$ et est d'ordre p.

DÉMONSTRATION : Pour la signature : $\sigma = (c_1, c_2, \cdots, c_{p-1}, c_p) = \tau_{c_1,c_2} \circ \tau_{c_2,c_3} \circ \cdots \circ \tau_{c_{p-1},c_p}$.

Théorème 19.2

Toute permutation de $\boldsymbol{\sigma}_n$ se décompose d'une manière unique (à l'ordre près) en composée de cycles à support disjoints.

DÉMONSTRATION : Une autre récurrence en considérant le cycle "orbite de n" : $\sigma' = \big(n, \sigma(n), \cdots, \sigma^k(n)\big)$.

Proposition 19.5

Si $\sigma \in \boldsymbol{\sigma}_n$ s'écrit $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_r$ où $c_1, \cdots, c_r$ sont des cycles à supports disjoints de longueur $l_1, \cdots, l_r$ respectivement, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{l_1 + \cdots + l_r - r}$ et l'ordre m de σ vaut $\operatorname{ppcm}(l_1, \cdots, l_r)$.

EXEMPLE 19.4 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 4 & 9 & 7 & 11 & 3 & 1 & 8 & 10 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{\sigma}_{12}$ est d'ordre 20.