

CHAPITRE 20

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

PARTIE 20.1 : COMPARAISON LOCALE DES FONCTIONS

20.1.1 : Notations de LANDAU

Pour alléger la présentation des notions qui vont suivre, on va se contenter de considérer (à droite dans les définitions qui vont suivre) les fonctions qui ne s'annulent pas sur leurs ensembles de définition (ou en tout cas au voisinage des points où l'on va calculer des limites).

Définition 20.1

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f, g : A \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ deux fonctions avec g qui ne s'annule pas sur A . On se donne $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ qui est un point "adhérent" à A .

- On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de a , noté $f \underset{a}{=} o(g)$, ou $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ si l'on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, on dit que f est un **"petit O"** de g au voisinage de a .
- On dit que f est **dominée par** g au voisinage de a , noté $f \underset{a}{=} O(g)$, ou $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ si l'on a $\frac{f}{g}$ bornée au voisinage de a , on dit que f est un **"grand O"** de g au voisinage de a .
- On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a , noté $f \underset{a}{\sim} g$, ou $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ si l'on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

REMARQUE 20.1 : Ceci se traduit avec des quantificateurs par exemple si $a \in \mathbb{R}$ (adapter si $a = \pm\infty$) :

- $(f(x) \underset{a}{=} o(g(x))) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|).$
- $(f(x) \underset{a}{=} O(g(x))) \iff (\exists m \geq 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x)| \leq m |g(x)|).$
- $(f(x) \underset{a}{\sim} g(x)) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|).$

EXEMPLE 20.1 :

- $x^{1000} \underset{\infty}{=} o((1, 1)^x)$ et $(\ln(x))^{25} \underset{\infty}{=} o(x^{0,01})$ d'après les croissances comparées.
- $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ d'après les dérivées classiques de ces fonctions en 0.
- $x + \sin(x) \underset{\infty}{=} O(3x)$, $\frac{3x^3 + x^2 + 1}{2x^3 + 6} \underset{\infty}{\sim} \frac{3}{2}$, $x^4 \underset{0}{=} o(x^3)$ et $x^3 \underset{\infty}{=} o(x^4)$.
- $\operatorname{Arccos}(x) \underset{1}{\sim} \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x}$.

REMARQUE 20.2 :

- Pour le petit O ou le grand O , ce ne sont pas des égalités au sens algébrique : il n'y a pas en particulier de transitivité, on a par exemple $2x \underset{\infty}{=} O(x^2)$ et $3x + 1 \underset{\infty}{=} O(x^2)$ et pourtant $2x \neq 3x + 1$. On devrait plutôt noter $f(x) \in O(g(x))$ pour signifier l'appartenance de f à une certaine classe de fonctions dominées par g au voisinage de a ; mais tel est l'usage.
- On peut étudier les propriétés de ces trois relations binaires fraîchement définies : la relation de "petit O" n'est pas réflexive, pas symétrique par contre elle est antisymétrique et transitive ; la relation de "grand O" est réflexive, pas symétrique, pas antisymétrique mais elle est transitive ; enfin la relation d'équivalence est comme il se doit une relation d'équivalence.
- On dispose aussi des notations de HARDY : $f \underset{a}{\ll} g \iff f \underset{a}{=} o(g)$ et $f \underset{a}{\leq} g \iff f \underset{a}{=} O(g)$.

20.1.2 : Toutes les implications

Théorème 20.1

On se donne une partie A de $\mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ qui est un point "adhérent" à A , les fonctions qui suivent seront définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines ne devront pas s'annuler sur A pour pouvoir écrire les implications qui suivent, on prendra aussi des constantes λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{K}$ et une fonction $\varphi : B \rightarrow A$ où B est une partie de $\mathbb{R}$ et b est adhérent à B :

- (i) $f \underset{a}{=} O(f)$ et $f \underset{a}{\sim} f$.
- (ii) $f \underset{a}{=} o(g) \implies f \underset{a}{=} O(g)$, $f \underset{a}{\sim} g \implies f \underset{a}{=} O(g)$ et $f \underset{a}{\sim} g \iff g \underset{a}{\sim} f$.
- (iii) $(f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } g \underset{a}{=} O(h)) \implies f \underset{a}{=} O(h)$ et $(f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g \underset{a}{\sim} h) \implies f \underset{a}{\sim} h$.
- (iv) $(f \underset{a}{=} o(g) \text{ et } g \underset{a}{=} O(h)) \implies f \underset{a}{=} o(h)$ et $(f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } g \underset{a}{=} o(h)) \implies f \underset{a}{=} o(h)$.
- (v) $(f_1 \underset{a}{=} O(g) \text{ et } f_2 \underset{a}{=} O(g)) \implies \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{=} O(g)$ et $(f_1 \underset{a}{=} o(g) \text{ et } f_2 \underset{a}{=} o(g)) \implies \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
- (vi) $(f_1 \underset{a}{=} O(g_1) \text{ et } f_2 \underset{a}{=} O(g_2)) \implies f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$ et $(f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{a}{\sim} g_2) \implies f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.
- (vii) $(f_1 \underset{a}{=} o(g_1) \text{ et } f_2 \underset{a}{=} O(g_2)) \implies f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$ et $(f_1 \underset{a}{=} O(g_1) \text{ et } f_2 \underset{a}{=} o(g_2)) \implies f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.
- (viii) $f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$ et $(f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{a}{\sim} g_2) \implies \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.
- (ix) $(f \underset{a}{=} o(g) \text{ et } \lim_b \varphi = a) \implies f \circ \varphi \underset{b}{=} o(g \circ \varphi)$.
- (x) $(f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } \lim_b \varphi = a) \implies f \circ \varphi \underset{b}{=} O(g \circ \varphi)$.
- (xi) $(f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \lim_b \varphi = a) \implies f \circ \varphi \underset{b}{\sim} g \circ \varphi$.
- (xii) $(f \underset{a}{=} o(g) \text{ et } g \underset{a}{\sim} h) \implies f \underset{a}{=} o(h)$ et $(f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } g \underset{a}{\sim} h) \implies f \underset{a}{=} O(h)$.
- (xiii) $(f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g \underset{a}{=} o(h)) \implies f \underset{a}{=} o(h)$ et $(f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g \underset{a}{=} O(h)) \implies f \underset{a}{=} O(h)$.
- (xiv) $f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} o(f) \iff g - f \underset{a}{=} o(g)$.

Si f et g sont des fonctions strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}$:

- (xv) Si $\alpha > 0$, $f \underset{a}{\sim} g \iff f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$, $f \underset{a}{=} O(g) \iff f^\alpha \underset{a}{=} O(g^\alpha)$ et $f \underset{a}{=} o(g) \iff f^\alpha \underset{a}{=} o(g^\alpha)$.
- (xvi) Si $\alpha < 0$, $f \underset{a}{\sim} g \iff f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$, $f \underset{a}{=} O(g) \iff g^\alpha \underset{a}{=} O(f^\alpha)$ et $f \underset{a}{=} o(g) \iff g^\alpha \underset{a}{=} o(f^\alpha)$.
- (xvii) $(f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \lim_a f = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+} \setminus \{1\}) \implies \ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.

Si f et g sont des fonctions réelles :

- (xviii) $\lim_a (f - g) = 0 \iff e^f \underset{a}{\sim} e^g$.

REMARQUE 20.3 :

- Il est clair que $f(x) \underset{a}{=} O(1)$ signifie que la fonction f est bornée au voisinage de a et que $f(x) \underset{a}{=} o(1)$ veut dire que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. De plus, si l'on a $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ alors on a aussi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.
- La propriété (v) nous dit que l'ensemble des fonctions dominées par une fonction fixe g au voisinage de a est un espace vectoriel ; même chose pour les fonctions négligeables devant g au voisinage de a .
- Abus de notations usuels $o(o(f)) \underset{a}{=} o(f)$ où ce $=$ ne se lit que dans un sens et pas dans l'autre ; de même $o(f) - o(f) = o(f)$, $o(f) \times o(g) = o(fg)$, etc....
- On ne peut pas sommer les équivalents en général, passer un équivalent au $\ln$ ou à l'exponentielle.

PARTIE 20.2 : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

20.2.1 : Définitions et propriétés

Définition 20.2

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ adhérent à A et un entier $n \in \mathbb{N}$. On dit que f possède un **développement limité à l'ordre n en a** s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n tel que $f(x) - P(x - a) = o_a((x - a)^n)$.

REMARQUE 20.4 : On peut toujours se ramener en 0 quand on calcule des développements limités car il est clair que $f(x) - P(x - a) = o_a((x - a)^n) \iff f(a + h) - P(h) = o_0(h^n)$. Et on fera l'abus de notation suivant : $f(x) = P(x - a) + o_a((x - a)^n) \iff f(a + h) = P(h) + o_0(h^n)$ au lieu de ce qui est ci-dessus.

Proposition 20.1

Il y a unicité du polynôme P tel que $\deg(P) \leq n$ tel que $f(x) - P(x - a) = o_a((x - a)^n)$.

Définition 20.3

On appelle **partie régulière** du développement limité d'ordre n de f en a (noté $DL_n(a)$) cet unique P .

Proposition 20.2

Soit $n \in \mathbb{N}$, le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-x}$ est $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$.

Proposition 20.3

Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et que $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, alors f admet un $DL_p(0)$ de partie régulière $a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ (troncature).

REMARQUE 20.5 : Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ une fonction définie au voisinage de 0.

- Si $0 \notin A$ et si f vérifie $f(x) = \ell + o_0(1)$, alors f se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = \ell$.
- Si $0 \in A$ alors : f admet un $DL_0(0) \iff f$ est continue en 0.

Proposition 20.4

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ une fonction définie au voisinage de 0 alors :
 f admet un $DL_1(0) \iff f$ est dérivable en 0. De plus, nous avons alors : $f(h) = f(0) + f'(0)h + o_0(h)$.

REMARQUE 20.6 : C'est faux pour les rangs supérieurs avec l'exemple classique $f : x \mapsto x^3 \sin(1/x^2)$. Cette fonction possède un $DL_2(0)$ mais n'est pourtant pas dérivable deux fois dérivables en 0.

20.2.2 : Composition à droite, intégration et dérivation terme à terme

REMARQUE 20.7 : Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, on peut composer à droite (en utilisant le (ix) du théorème 20.1) les développements limités. Par exemple : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$,
 $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + o(x^{2n})$ et $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$.

Proposition 20.5

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ avec $A \in \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et qui possède un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de partie régulière P , alors on dispose des deux implications suivantes :

- f est paire $\implies P$ est pair (les coefficients de degrés impairs sont nuls).
- f est impaire $\implies P$ est impair (les coefficients de degrés pairs sont nuls).

Théorème 20.2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continue avec $A \subset \mathbb{R}$ et 0 adhérent à A , on suppose que f possède un $DL_n(0)$ donné par : $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ alors en notant $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ une primitive de f , celle-ci possède un $DL_{n+1}(0)$: $F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$.

DÉMONSTRATION : On traduit l'énoncé : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, |t| \leq \alpha \implies |f(t) - P(t)| \leq \varepsilon |t|^n$.

Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé et $\alpha > 0$ associé, on sait que si on note $Q = F(0) + a_0x + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ un des

polynômes "primitive" de P , alors on a d'après l'inégalité des accroissements finis (et même si $x = 0$) :

$$\forall x \in A \cap [-\alpha; \alpha], |F(x) - Q(x) - (F(0) - Q(0))| \leq |x| \sup_{t \in A \cap [0; x]} |f(t) - P(t)| \leq \varepsilon |x|^{n+1}.$$

REMARQUE 20.8 : On ne peut pas en général déduire de l'existence du $DL_n(0)$ de f (pour $n \in \mathbb{N}^*$) l'existence du $DL_{n-1}(0)$ de f' comme le montre la fonction de la remarque 20.6. Mais c'est différent si on sait au préalable que cette fonction dérivée possède un $DL_{n-1}(0)$:

Proposition 20.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable avec $A \subset \mathbb{R}$ et 0 adhérent à A , on suppose que f possède un $DL_n(0)$ donné par : $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ alors si f' est continue et possède un $DL_{n-1}(0)$, on l'a en dérivant : $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1})$.

Proposition 20.7

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a les développements limités archi-classiques suivants :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ \operatorname{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n) \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) &= -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ \operatorname{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\ \operatorname{Argth}(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

20.2.3 : Opérations algébriques sur les développements limités

Proposition 20.8

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions avec $A \subset \mathbb{R}$ et 0 adhérent à A , on suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$ de partie régulière P et Q respectivement. Alors λf admet un $DL_n(0)$ de partie régulière λP , $f + g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P + Q$ et $f \times g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière R obtenue en ne gardant dans $P \times Q$ que les termes de degrés inférieurs ou égaux à n . Ainsi, si $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ et $g(x) \underset{0}{=} b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)$:

$$\begin{aligned}\lambda f(x) &\underset{0}{=} \lambda a_0 + \lambda a_1x + \dots + \lambda a_nx^n + o(x^n) \\ f(x) + g(x) &\underset{0}{=} a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n) \\ f(x) \times g(x) &\underset{0}{=} a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + (a_0b_n + \dots + a_nb_0)x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

EXEMPLE 20.2 : Calculons le $DL_5(0)$ de $2 \sin(x) \cos(x)$.

REMARQUE 20.9 : Il est possible de gagner des rangs. On se base sur le fait que si $f(x) \underset{0}{=} o(x^i)$ alors $x^j f(x) \underset{0}{=} o(x^{i+j})$ et réciproquement, si $g(x) \underset{0}{=} o(x^{i+j})$ alors en posant $f(x) = \frac{g(x)}{x^j}$, on a $g(x) = x^j f(x)$ avec $f(x) \underset{0}{=} o(x^i)$. On abrège : $x^j o(x^i) \underset{0}{=} o(x^{i+j})$ qui peut exceptionnellement se lire dans les deux sens.

EXEMPLE 20.3 : Calculons le $DL_5(0)$ de $\sin(x) \ln(1 + x^2)$.

REMARQUE 20.10 : La **partie principale** d'un $DL_n(0)$ d'une fonction f est le premier terme non nul dans la partie régulière, si l'on a $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_{r-1}x^{r-1} + a_r x^r + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ avec $a_0 = a_1 = \dots = a_{r-1} = 0$ alors cette partie principale est $a_r x^r$. On obtient facilement $f(x) \underset{0}{\sim} a_r x^r$.

Proposition 20.9

Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions définies au voisinage de 0 telles que $f(x) \underset{0}{=} O(x^p)$, f admet un $DL_{np}(0)$ de partie régulière P , g admet un $DL_n(0)$ de partie régulière Q , alors $g \circ f$ possède un $DL_{np}(0)$ de partie régulière obtenue en ne gardant dans le polynôme $Q \circ P$ que les termes de degré inférieurs ou égaux à np .

DÉMONSTRATION : On compose à droite le $DL_n(0)$ de g par f (qui tend vers 0 quand x tend vers 0 car $p \geq 1$), on se sert ensuite de la proposition 20.8 et du fait que $o(f(x)^n) = o(x^{np})$.

EXEMPLE 20.4 : Calculons le $DL_4(0)$ de $\ln(e^x)$.

Proposition 20.10

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ admettant un $DL_n(0)$ qui commence par une constante a_0 non nulle ; alors $\frac{1}{f}$ (définie au voisinage de 0) possède un $DL_n(0)$ qui s'obtient en composant avec

$$x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ en écrivant (pour } x \text{ assez proche de 0) } \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1 + \frac{f(x) - a_0}{a_0}}.$$

EXEMPLE 20.5 : Calculons le $DL_5(0)$ de $\frac{1}{e^{-x}}$.

Proposition 20.11

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7) \text{ et } \operatorname{th}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^7).$$

PARTIE 20.3 : TAYLOR ET APPLICATIONS

20.3.1 : Théorème de TAYLOR-YOUNG

Théorème 20.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie sur A qui contient 0 , si $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet un $DL_n(0) : f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$ (formule de TAYLOR-YOUNG).

Proposition 20.12

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, en posant pour $k \in \mathbb{N}$, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ appelé coefficient binomial généralisé, on a : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n)$.

REMARQUE 20.11 : En prenant $\alpha = \frac{1}{2}$ puis $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans la proposition précédente, puis en composant à droite par $\pm x^2$ et en intégrant, on obtient les nouveaux développements limités :

Proposition 20.13

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\text{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^8) \quad \text{et} \quad \text{Argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + o(x^8).$$

REMARQUE 20.12 : Pour connaître un équivalent d'une fonction, il suffit d'aller suffisamment loin dans les développements limités, donc d'en trouver la partie principale à laquelle la fonction sera équivalente. Si c'est en $+\infty$ que ça se passe, on effectue un développement limité (quand c'est possible) en $\frac{1}{x}$.

EXEMPLE 20.6 : Déterminer un équivalent en 0 de $f(x) = x(\sin x - \tan x)$.

REMARQUE 20.13 : Supposons par exemple qu'une fonction soit définie sur $\mathbb{R}^*$, en calculant un $DL_2(0)$ de cette fonction (s'il existe), on obtient $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ ce qui donne le prolongement par continuité de f en 0 en posant $f(0) = a_0$, la dérivée $f'(0) = a_1$ et la position locale (au voisinage de 0) de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0 (au dessus si $a_2 > 0$ et en dessous si $a_2 < 0$).

EXEMPLE 20.7 : Étude locale de la fonction f au voisinage de 0 si $f(x) = (\text{ch } x)^{1/x}$.

REMARQUE 20.14 : On peut faire de même pour une asymptote avec un $DL_2(0)$ (ou plus) de $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

EXEMPLE 20.8 : Déterminer l'équation de l'asymptote $\mathcal{D}$ au graphe de f et la position locale de la courbe de f par rapport à $\mathcal{D}$ quand $f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$.

REMARQUE 20.15 :

- Quand on dispose d'expression explicite des solutions d'une équation différentielle linéaire sur des intervalles où elle est résolue, on peut chercher à prolonger ces fonctions en des solutions de l'équation sur des intervalles plus grands où le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ ne s'applique plus forcément.
- Si une fonction réelle f en a possède un $DL_p(a)$ de la forme $f(x) = f(a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $a_p \neq 0$, alors f n'admet pas en a d'extremum local si p est impair ; par contre si p est pair f admet en a un maximum local si $a_p < 0$ et un minimum local en a si $a_p > 0$.