CHAPITRE 21 MATRICES

⊙ En mathématiques, la théorie des matrices permet de modéliser l'algèbre linéaire et bilinéaire, le calcul numérique, mais elle s'agrandit pour couvrir des sujets relatifs à la théorie des graphes, à l'algèbre générale, à la combinatoire et aux statistiques, etc... . JORDAN, CAYLEY (Arthur CAYLEY : mathématicien britannique 1821-1895), HAMILTON, GRASSMANN, FROBENIUS (Ferdinand Georg FROBENIUS : mathématicien allemand 1849-1917) et VON NEUMANN (John VON NEUMANN : mathématicien et physicien américain d'origine hongroise ayant été actif en mécanique quantique, en analyse fonctionnelle, en théorie des ensembles, en informatique, en sciences économiques, mais aussi dans le développement des bombes A et H 1903-1957) comptent parmi les mathématiciens célèbres qui ont travaillé sur cette théorie.

REMARQUE 21.1 : Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ sera un corps commutatif, la plupart du temps, ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; mais cela peut aussi être $\mathbb{Q}$, ou un des $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier.

PARTIE 21.1 : MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

21.1.1 : Représentations matricielles

Définition 21.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $p \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$ de vecteurs de E ; on lui associe la **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base** $\mathcal{B}$*, notée $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ définie par les relations vectorielles $\forall j \in [\![1;p]\!]$, $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.*

EXEMPLE 21.1 : Matrice de $\big((1+X)^k\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la base canonique.

Définition 21.2

Soit E (resp. F) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ (resp. $n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors on appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$**, *notée $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(e_1), \cdots, f(e_p)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(\mathcal{B})\big)$.*

EXEMPLE 21.2 : Matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire (admis) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+2y, x+z+y)$.

Définition 21.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors on appelle **matrice de f dans la base** $\mathcal{B}$*, notée $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.*

EXEMPLE 21.3 : Matrice dans $(1, X, X^2, X^3)$ de $f \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}_3[X]\big)$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = P'$.

REMARQUE 21.2 : • L'identité d'un espace E de dimension n admet I_n pour matrice dans toute base.

- *Soit $E = F \oplus G$ et $p = p_{F,G}$, alors dans une base convenablement choisie, la matrice de p est simple.*

21.1.2 : Traductions matricielles

Théorème 21.1

Soit E (resp. F) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ (resp. $n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F alors l'application $\varphi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall f \in \mathcal{L}(E, F),\ \varphi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

REMARQUE 21.3 : • *Comme* $\dim\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\big) = np$, *on retrouve que* $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.
• *Pour* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *on appelle* **application linéaire canoniquement associée** *à* A *l'unique* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f) = A$ *où* $\mathcal{B}_p$ *et* $\mathcal{B}_n$ *sont les bases canoniques de* $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathbb{K}^n$.

Théorème 21.2

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases respectivement de E, F et G, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

REMARQUE 21.4 : On en déduit, grâce à l'isomorphisme du théorème précédent, l'associativité et la bilinéarité du produit matriciel qu'on avait prouvé calculatoirement dans le chapitre sur le calcul matriciel.

Proposition 21.1

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de même dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F : $\big(f$ est un isomorphisme $\big) \iff \big(A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in GL_n(\mathbb{K})\big)$.
Dans ce cas, nous avons de plus : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$.

EXEMPLE 21.4 : On doit trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 21.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E alors $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme d'algèbres. De plus, sa corestriction $\widehat{\varphi} : GL(E) \to GL_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de groupes.

REMARQUE 21.5 :
• *On peut donc tout traduire en termes de matrices : la matrice* A *d'une projection dans une base vérifie* $A^2 = A$ *(et réciproquement), de même pour une symétrie, l'inversibilité, etc....*
• *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace de base* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, *on associe à* $x \in E$ *son* **vecteur colonne** $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *tel que* ${}^tX = (x_1, \cdots, x_n)$ *où* $(x_1, \cdots, x_n)$ *sont les coordonnées de* x *dans la base* $\mathcal{B}$: $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Théorème 21.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F, on se donne aussi $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $x \in E$ dont la matrice colonne dans $\mathcal{B}$ est notée $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on pose $y = f(x)$ auquel on associe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors on a : $Y = AX$.

REMARQUE 21.6 : • *On en déduit, si* $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$: $(A = B) \iff (\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX)$.
• *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on a :* $\big(A \in GL_n(\mathbb{K})\big) \iff \big(\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y = AX\big)$ *car si* f *canoniquement associée à* A : $f \in GL(\mathbb{K}^n) \iff A \in GL_n(\mathbb{K})$. *Ceci consiste à résoudre un système linéaire* n *lignes et* n *colonnes. Dans ce cas, on trouve la matrice* A^{-1} *car* $Y = AX \iff X = A^{-1}Y$.

21.1.3 : Changement de bases

Définition 21.4

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *et* $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ *deux bases de* E*, on appelle* **matrice de passage de la base** $\mathcal{B}$ **à la base** $\mathcal{B}'$ *la matrice de la famille* $\mathcal{B}'$ *écrite dans la base* $\mathcal{B}$ *:* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

EXEMPLE 21.5 : On pose $(S)\ :\ y'' - y = 0$, alors on sait que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ et $\mathcal{B}' = (\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ sont deux bases de l'espace E des solutions de (S) définies sur $\mathbb{R}$ (avec $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto e^{-x}$).

Proposition 21.2

Avec les notations ci-dessus, on a $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$**.**
P **est donc inversible et** P^{-1} **est la matrice de passage de la base** $\mathcal{B}'$ **à la base** $\mathcal{B}$**.**

REMARQUE 21.7 :

- *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace de dimension finie et* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ *trois bases de* E*, si on note* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *et* Q *celle de* $\mathcal{B}'$ *à* $\mathcal{B}''$ *alors la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}''$ *est* PQ.
- *Ceci nous fournit un algorithme de recherche de l'inverse d'une matrice carrée par les vecteurs : soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *qu'on interprète comme la matrice d'une famille* $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ *dans la base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *de* $\mathbb{K}^n$ *(par exemple), si on parvient à écrire les vecteurs* $e_1, \cdots, e_n$ *en fonction des vecteurs* $v_1, \cdots, v_n$*, c'est que la famille* $\mathcal{F}$ *est génératrice donc c'est une base de* $\mathbb{K}^n$ *et* A *est alors la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{F}$*, ainsi* A^{-1} *est la matrice de passage de* $\mathcal{F}$ *à* $\mathcal{B}$ *et on a ses coefficients.*

Proposition 21.3

Soit E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel et** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ **et** $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ **deux bases de** E**,** P **la matrice de passage de** $\mathcal{B}$ **à** $\mathcal{B}'$**,** x **un vecteur de** E **auquel on associe ses vecteurs colonne** X **(ses coordonnées dans** $\mathcal{B}$**) et** X' **(celles dans** $\mathcal{B}'$**), alors :** $X = PX'$**.**

Théorème 21.5

Soit E **et** F **deux** $\mathbb{K}$**-espaces vectoriels de dimensions finies et de bases** $\mathcal{B}_1$ **et** $\mathcal{B}'_1$ **pour** E **et** $\mathcal{B}_2$ **et** $\mathcal{B}'_2$ **pour** F**,** $f \in \mathcal{L}(E, F)$**,** $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ **et** $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(f)$**. On appelle** P **(resp.** Q**) la matrice de passage de** $\mathcal{B}_1$ **à** $\mathcal{B}'_1$ **(resp. de** $\mathcal{B}_2$ **à** $\mathcal{B}'_2$**), alors on a :** $A' = Q^{-1}AP$ **ou** $A = QA'P^{-1}$**.**

DÉMONSTRATION : On déduit de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(\mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E)$ avec le théorème 21.2 que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2}(\mathrm{id}_F)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}_1}(\mathrm{id}_E)$ et on conclut avec la proposition 21.2.

Théorème 21.6

Soit E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension finie de bases** $\mathcal{B}$ **et** $\mathcal{B}'$**,** $f \in \mathcal{L}(E)$**,** $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ **et** $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$**, on appelle** P **la matrice de passage de** $\mathcal{B}$ **à** $\mathcal{B}'$**, alors :** $A' = P^{-1}AP$ **ou** $A = PA'P^{-1}$**.**

EXEMPLE 21.6 : Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 12 & -3 & -8 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2 et en déduire D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

Définition 21.5

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et* $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$*, on dit que* A **et** B **sont équivalentes** *s'il existe deux matrices* $P \in GL_p(\mathbb{K})$ *et* $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ *telles que* $A = QBP^{-1}$.

REMARQUE 21.8 : On montre facilement que ceci est une relation d'équivalence sur les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire entre* E *et* F *de bonnes dimensions dans des bases différentes d'après le théorème 21.5.*

Définition 21.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, *on dit que* A **et** B **sont semblables** *si :* $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = PBP^{-1}$.

REMARQUE 21.9 : On montre encore que c'est une relation d'équivalence sur les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de* E *de bonne dimension dans des bases différentes d'après le théorème 21.6. Deux matrices semblables ont même trace.*

21.1.4 : Diagonalisation d'un endomorphisme (HP)

Définition 21.7

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*, on dit que* λ *est une* **valeur propre de** f *s'il existe un vecteur non nul* $x \in E$ *tel que* $f(x) = \lambda x$*. Un tel vecteur non nul* x *est appelé un* **vecteur propre associé à la valeur propre** λ*. De plus, si* λ *est une valeur propre de* f*, on appelle* **sous-espace propre associé à la valeur propre** λ *le sous-espace* $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E)$.

EXEMPLE 21.7 : Si $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \mapsto f'$ alors tout réel α est valeur propre de D et le sous-espace propre est la droite engendré par la fonction $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$.

REMARQUE 21.10 : • Les vecteurs propres associés à λ *sont les vecteurs non nuls de* E_λ.
• *Quand* E *est de dimension finie et s'il existe une base* $\mathcal{B}' = (v_1, \cdots, v_n)$ *de* E *composée de vecteurs propres de* f *associés aux valeurs propres* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$*,* f *est dite* **diagonalisable** *car la matrice de* f *dans* $\mathcal{B}'$ *est* D *diagonale avec* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *sur la diagonale.*

EXEMPLE 21.8 : Soit à diagonaliser $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Commencer par calculer A^2 pour trouver un polynôme annulateur P de degré 2 de A.

PARTIE 21.2 : RANG DES MATRICES

Définition 21.8

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, on définit* **le rang de la matrice** A*, noté* $\mathrm{rg}(A)$*, c'est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à* A.

Proposition 21.4

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$**, deux** $\mathbb{K}$**-espaces vectoriels** E **et** F **de dimension** p **et** n **et de bases** $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ **respectivement,** $f \in \mathcal{L}(E, F)$**, on pose** $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$**, alors** $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$**.**

Proposition 21.5

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$**,** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **et** $r = \mathrm{rg}(A)$**, en notant** $J_{n,p,r}$ **la matrice de** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **qui contient des** 0 **partout sauf** $j_{1,1} = \cdots = j_{r,r} = 1$**, alors** A **et** $J_{n,p,r}$ **sont équivalentes.**

REMARQUE 21.11 : A *et* B *de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

Proposition 21.6

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ **et** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**, alors** A **et** ${}^tA$ **ont le même rang.**

REMARQUE 21.12 : Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, on sait que composer une application linéaire par des isomorphismes ne change pas son rang ; par analogie, multiplier une matrice par une matrice inversible ne modifie pas son rang. Or les matrices de* GAUSS *sont toutes inversibles et la multiplication à gauche ou à droite par celles-ci code les opérations élémentaires de* GAUSS *(qui ne modifient donc pas le rang). Le but est de se ramener à la forme déjà vue au sujet des rangs des systèmes de vecteurs.*