CHAPITRE 23 INTÉGRATION

PARTIE 23.1 : CONSTRUCTION DE L'INTÉGRALE RÉELLE

23.1.1 : Algèbre des fonctions en escaliers

REMARQUE 23.1 : Soit dans toute cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a et b deux réels tels que $a < b$.

Définition 23.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $\sigma = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ est une **subdivision** *de $[a;b]$ si on a les inégalités strictes $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$. σ est dite une* **subdivision régulière** *si : $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = a + k\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$.*

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{K}$, f est dite une **fonction en escaliers** *s'il existe une subdivision σ de $[a;b]$ telle que : $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, f est constante sur $]a_k;a_{k+1}[$. On dit alors que σ est une* **subdivision adaptée** *à f.*

On note $\mathrm{Esc}([a;b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escaliers de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$.

REMARQUE 23.2 : L'aspect graphique (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) des fonctions en escaliers est à assimiler.

Définition 23.2

Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a;b]$, on dit que σ' est **plus fine** *que σ si tous les termes de σ se trouvent dans σ' ; on le note $\sigma \preceq \sigma'$. On définit (une fois dans le bon ordre) $\sigma \vee \sigma'$: c'est la subdivision contenant tous les termes de σ et σ' (en quelque sorte une réunion) ; et $\sigma \wedge \sigma'$: c'est la subdivision contenant seulement les termes communs à σ et σ' (en quelque sorte une intersection).*

REMARQUE 23.3 :

- *La relation de finesse est une relation d'ordre partiel sur les subdivisions de $[a;b]$.*
- *Si σ est adaptée à $f \in \mathrm{Esc}([a;b], \mathbb{K})$, alors toute subdivision plus fine que σ est encore adaptée à f.*
- *Il existe une subdivision la moins fine possible adaptée à une fonction en escaliers.*
- *Il est clair que la somme (ou le produit) de deux fonctions en escaliers l'est encore.*

Proposition 23.1

$\mathrm{Esc}([a;b])$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}([a;b], \mathbb{K})$.
De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et f en escaliers sur $[a;b]$, on a $|f|$ aussi en escaliers.
De même, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et f et g en escaliers, alors f^+, f^-, $|f|$, $\sup(f,g)$, $\mathrm{Inf}(f,g)$ aussi en escaliers.

23.1.2 : Intégrale d'une fonction en escaliers

Définition 23.3

Soit $f \in \mathrm{Esc}([a;b], \mathbb{K})$ et $\sigma = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ adaptée à f, alors on définit **l'intégrale de f sur le segment** $[a;b]$ *par :* $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(c_k)$ *avec $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $c_k \in]a_k;a_{k+1}[$.*

REMARQUE 23.4 : On vérifie que cette définition ne dépend ni de la subdivision adaptée à f ni des valeurs de f en ses points de discontinuité. C'est une notion d'aire algébrique quand le corps est $\mathbb{R}$.

Proposition 23.2

Soit $(f,g) \in \mathrm{Esc}([a;b],\mathbb{K})^2$**,** $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$**, alors** $\int_{[a;b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a;b]} f + \mu \int_{[a;b]} g$ **(linéarité de l'intégrale) et** $\left| \int_{[a;b]} f \right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|$ **(par inégalité triangulaire).**

Si $c \in]a;b[$**, alors** $\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$ **(relation de CHASLES). Si de plus** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**, on a :** $f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_{[a;b]} f \geqslant 0$ **(positivité de l'intégrale), et** $f \leqslant g \Longrightarrow \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g$ **(croissance).**

23.1.3 : Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 23.4

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{K}$*, on dit que* f *est une* **fonction continues par morceaux** *s'il existe une subdivision* σ *de* $[a;b]$ *telle que :* $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$*,* f *est continue sur* $]a_k;a_{k+1}[$ *et* f *admet une limite finie à droite en* a_k *et à gauche en* a_{k+1}*. On dit alors que* σ *est une* **subdivision adaptée** *à* f*.*

On note $C^0_m([a;b],\mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions continues par morceaux de* $[a;b]$ *dans* $\mathbb{K}$*.*

REMARQUE 23.5 : On s'imprègne de l'aspect graphique de ce type de fonctions (toujours si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*).*

Proposition 23.3

$C^0_m([a;b],\mathbb{K})$ **est une sous-algèbre de** $\mathcal{F}([a;b],\mathbb{K})$**.**
De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ **et** f **continues par morceaux sur** $[a;b]$**, on a** $|f|$ **l'est aussi.**
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **et** f **et** g **continues par morceaux, alors** f^+**,** f^-**,** $|f|$**,** $\sup(f,g)$**,** $\mathrm{Inf}(f,g)$ **le sont aussi.**

REMARQUE 23.6 : • *Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.*
• $\mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K}) + C^0([a,b],\mathbb{K}) = C^0_m([a,b],\mathbb{K})$ *alors que* $\mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K}) \cap C^0([a,b],\mathbb{K}) = \mathrm{Const}([a;b],\mathbb{K})$.

23.1.4 : Intégrale des fonctions continues par morceaux réelle

Proposition 23.4

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ **une fonction continue par morceaux, alors on a l'approximation suivante :**
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists (\varphi,\psi) \in \mathrm{Esc}([a;b],\mathbb{R})^2,\ \varphi \leqslant f \leqslant \psi$ **et** $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$**.**

DÉMONSTRATION : Sur chacun des segments $[a_k;a_{k+1}]$, f "est" continue donc uniformément continue.

Théorème 23.1

Si $f \in C^0_m([a;b],\mathbb{R})$**, on note** $E_- = \{\varphi \in \mathrm{Esc}([a;b],\mathbb{R}) \mid \varphi \leqslant f\}$ **et** $E_+ = \{\psi \in \mathrm{Esc}([a;b],\mathbb{R}) \mid f \leqslant \psi\}$**, alors on a :** $\mathrm{Inf}\left(\int_{[a;b]} \psi \mid \psi \in E_+ \right) = \mathrm{Sup}\left(\int_{[a;b]} \varphi \mid \varphi \in E_- \right)$**.**

DÉMONSTRATION : On utilise la propriété de la borne supérieure (et inférieure) et la proposition 23.4.

Définition 23.5

Soit $f \in C^0_m([a;b], \mathbb{R})$, *on définit donc son* **intégrale sur le segment** $[a;b]$, *notée* $\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} f(t)dt$, *par* $\int_{[a;b]} f = \text{Inf}\left(\int_{[a;b]} \psi \mid \psi \in E_+\right) = \text{Sup}\left(\int_{[a;b]} \varphi \mid \varphi \in E_-\right)$.

REMARQUE 23.7 : Cette nouvelle définition prolonge celle de l'intégrale des fonctions en escaliers.

EXEMPLE 23.1 :

- Calcul de $\int_{[a;b]} xdx$ par cette méthode et les subdivisions régulières.
- La fonction $\chi_{\mathbb{Q}} : [0;1] \to \mathbb{R}$ n'est intégrable en ce sens là (au sens de RIEMANN).

PARTIE 23.2 : PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE RÉELLE

23.2.1 : Propriétés algébriques

Proposition 23.5

Avec les notations précédentes, soit $(f,g) \in C^0_m([a;b], \mathbb{R})^2$**,** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$**, alors encore la linéarité de l'intégrale :** $\int_{[a;b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a;b]} f + \mu \int_{[a;b]} g$**.**

REMARQUE 23.8 : L'ensemble des fonctions intégrables au sens de RIEMANN *(sur un segment) est donc un espace vectoriel qui contient les fonctions continues par morceaux.*

Proposition 23.6

Soit $f \in C^0_m([a;b], \mathbb{R})$ **et** $c \in]a;b[$**, alors** $\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$ **(CHASLES).**

23.2.2 : Propriétés relatives à l'ordre et cas d'égalité

Proposition 23.7

Soit $(f,g) \in C^0_m([a;b], \mathbb{R})^2$**, on a de nouveau :**

$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_{[a;b]} f \geqslant 0$ **(positivité) et** $f \leqslant g \Longrightarrow \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g$ **(croissance de l'intégrale).**

On a aussi, en notant $||f||_\infty = \underset{t\in[a;b]}{\text{Sup}} |f(t)|$ **:** $\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f| \leqslant (b-a)||f||_\infty$**.**

Plus généralement : $\left|\int_{[a;b]} fg\right| \leqslant ||f||_\infty \int_{[a;b]} |g|$**.**

REMARQUE 23.9 : • *On définit la* **valeur moyenne** *de* f *sur* $[a;b]$, *c'est* $m = \dfrac{1}{b-a} \int_{[a;b]} f$.

- *En général, si* $g \in C^0_m([a;b], \mathbb{R})$ *et* $g \geqslant 0$ *:* $\underset{[a;b]}{\text{Inf}}(f) \times \int_{[a;b]} g \leqslant \int_{[a;b]} fg \leqslant \underset{[a;b]}{\text{Sup}}(f) \times \int_{[a;b]} g$.
- *Si* g *garde un signe constant sur* $[a;b]$ *et si* f *est continue sur* $[a,b]$ *alors* $\exists c \in [a,b]$, $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.
- *On en déduit que si* f *est continue :* $\exists c \in [a;b],\ m = f(c)$.

Proposition 23.8

Soit $f \in C^0([a;b],\mathbb{R})$ **telle que** $f \geqslant 0$**, alors :** $f = 0 \iff \int_{[a;b]} f = 0$.

Proposition 23.9

Soit $(f,g) \in C^0_m([a;b],\mathbb{R})^2$**, alors :** $\left|\int_{[a;b]} fg\right| \leqslant \sqrt{\int_{[a;b]} f^2}\sqrt{\int_{[a;b]} g^2}$ **(inégalité de** CAUCHY-SCHWARZ**).**

REMARQUE 23.10 : Si f, g *sont continues :* $\left(\left|\int_{[a;b]} fg\right| = \sqrt{\int_{[a;b]} f^2}\sqrt{\int_{[a;b]} g^2}\right) \iff \big(f$ *et* g *colinéaires*$\big)$.

23.2.3 : Intégrales à bornes

Définition 23.6

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $f \in C^0_m(\widetilde{[a;b]},\mathbb{R})$*, on définit l'***intégrale de** f **de** a **à** b*, notée* $\int_a^b f$ *ou* $\int_a^b f(x)dx$ *par :*

$\int_a^b f = \int_{[a;b]} f$ *si* $a < b$, $\int_a^b f = -\int_{[b;a]} f$ *si* $a > b$ *et* $\int_a^b f = 0$ *si* $a = b$.

REMARQUE 23.11 : On peut visualiser le signe de cette intégrale si on dessine (et qu'on oriente) la zone dont on veut calculer l'intégrale, ceci dépendant du signe de f *et de l'ordre entre* a *et* b*. Les théorèmes et propriétés précédentes se traduisent avec cette nouvelle notation (mais en faisant attention aux histoires de signe).*

Théorème 23.2

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ **(**$\alpha < \beta$**),** $(f,g) \in C^0_m([\alpha;\beta],\mathbb{R})^2$**,** $(a,b,c) \in [\alpha,\beta]^3$**,** $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ **:**

$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ **(linéarité) ;** $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$ **;** $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ **(**CHASLES**) ;** $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Si $a < b$**,** $f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant 0$ **(positivité) et** $f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ **(croissance).**

Si $a > b$**,** $f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant 0$ **("négativité") et** $f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant \int_a^b g$ **(décroissance).**

Toujours en notant $||f||_\infty = \underset{t\in\widetilde{[a;b]}}{\operatorname{Sup}} |f(t)|$ **:** $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right| \leqslant |b-a|\,||f||_\infty$.

Plus généralement : $\left|\int_a^b fg\right| \leqslant ||f||_\infty \int_a^b |g|$**. Si** $a \neq b$ **et** f **continue, on a :** $f = 0 \iff \int_a^b f = 0$.

$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\left|\int_a^b f^2\right|}\sqrt{\left|\int_a^b g^2\right|}$ **(inégalité de** CAUCHY-SCHWARZ**).**

REMARQUE 23.12 : La valeur moyenne (si $a \neq b$ *tout de même) vaut* $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

PARTIE 23.3 : PRIMITIVES ET INTÉGRALES

23.3.1 : Primitives à l'aide d'intégrales

<u>*REMARQUE 23.13*</u> *: Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *où* I *est un intervalle réel, si* F_0 *est une primitive de* f *sur* I*, alors pour une fonction dérivable* $F : I \to \mathbb{R}$*, on a :* $(F' = f) \iff (\exists k \in \mathbb{R},\ F = F_0 + k)$.

Proposition 23.10

Soit $a \in I$ **et** $f : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux (sur chaque segment inclus dans** I**), alors la fonction** $F : I \to \mathbb{R}$ **définie par :** $\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f$ **est localement lipschitzienne sur** I **et dérivable en tout** $x_0 \in I$ **en lequel** f **est continue.**

Théorème 23.3

Soit $a \in I$ **et** $f : I \to \mathbb{R}$ **continue, alors** $F : I \to \mathbb{R}$ **définie par la relation** $\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f$ **est la primitive de** f **(sur** I**) qui s'annule en** a**.**

<u>*REMARQUE 23.14*</u> *: On a deux expressions des primitives de* $f : I \to \mathbb{R}$ *continues (avec* $a \in I$ *fixé) :*

- *Les fonctions* $F : I \to \mathbb{R}$ *définies par :* $\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + k$ *où* $k \in \mathbb{R}$ *sont* **les** *primitives de* f.
- *Les fonctions* $G : I \to \mathbb{R}$ *définies par :* $\forall x \in I,\ G(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ *où* $\alpha \in I$ *sont* **des** *primitives de* f.

<u>***EXEMPLE 23.2***</u> ***:*** La fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = x^2 + 1$ est une primitive de $f : x \to 2x$ et pourtant il n'existe aucun $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x 2tdt$.

<u>*REMARQUE 23.15*</u> *: Si* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue et* $u, v : J \to I$ *dérivables, alors* $G : J \to \mathbb{R}$ *définie par :* $\forall x \in J,\ G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ *est dérivable et on a :* $\forall x \in J,\ G'(x) = v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big)$.

<u>***EXEMPLE 23.3***</u> ***:*** Calcul pour $a > 0$ de $\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$.

23.3.2 : Intégrales à l'aide de primitives

Théorème 23.4

Soit $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{R}$ **continue et** F **une des primitives de** f **sur** $\widetilde{[a;b]}$**, alors on a la formule :**

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

⊙ Ce qui rend essentiel le polycopié avec les dizaines de primitives usuelles.

<u>***EXEMPLE 23.4***</u> ***:*** Calcul de $\int_0^1 \frac{2t-3}{(t+1)(t^2+4)}dt$.

23.3.3 : Intégration par parties

Théorème 23.5

Soit $u, v : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1**, alors :** $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

EXEMPLE 23.5 **:** • Calcul pour $a > 0$ de $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$.

• On constate que l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 vaut $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

REMARQUE 23.16 : On définit les **intégrales de** WALLIS *par :* $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \big(\sin(t)\big)^n dt$.

- *On constate d'abord que* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante positive.*
- *On obtient une relation de récurrence liant, pour* $n \in \mathbb{N}$, I_n *et* I_{n+2} *par intégration par parties.*
- *On en déduit un équivalent de* I_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.
- *On trouve par la relation de récurrence et le calcul de* I_0 *une forme compacte de* I_{2p} *pour* $p \in \mathbb{N}$.
- *On en déduit la constante mystère de l'équivalent de* STIRLING.

Théorème 23.6

Formule de TAYLOR **reste intégral avec** $f : \widetilde{[a,b]} \to \mathbb{R}$ **de classe** C^{n+1}**, on a alors :**

$$f(b) = f(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

EXEMPLE 23.6 **:** On déduit de ceci, par exemple, que : $\forall x \in]-1;1],\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$.

23.3.4 : Changement de variables

Théorème 23.7

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **et** $\varphi : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1 **et** $f : I \to \mathbb{R}$ **continue (avec** $\widehat{\varphi}(\widetilde{[a;b]}) \subset I$**), alors par changement de variables** $(u = \varphi(t))$ **:** $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b \varphi'(t) \times f\big(\varphi(t)\big)dt$.

EXEMPLE 23.7 **:** • Calcul de $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$ pour la troisième fois.

• Calcul de l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 pour la seconde fois.

23.3.5 : Primitives usuelles

REMARQUE 23.17 : Les fonctions rationnelles réelles se décomposent en éléments simples qu'on sait intégrer ; d'abord ce qui concerne la partie entière et les polynômes de degré 1, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *:*

- $\displaystyle\int_a^b (a_px^p + \cdots + a_0)dx = \left[\frac{a_p}{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_0x\right]_a^b$.
- $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-\alpha)^n}dx = \left[-\frac{1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}\right]_a^b$ *si* $n \geqslant 2$ *et* $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x-\alpha}dx = \big[\ln|x-\alpha|\big]_a^b$ *si* $\alpha \notin \widetilde{[a,b]}$.

<u>*REMARQUE 23.18*</u> *: Pour les termes de la décomposition en éléments simples qui correspondent aux polynômes de degré 2, c'est plus dur :* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\beta \in \mathbb{R}$ *et* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $\Delta = u^2 - 4v < 0$, $\delta = \sqrt{-\Delta}$ *:*

- $\displaystyle\int_a^b \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ux+v}dx = \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{(2x+u)}{x^2+ux+v}dx + \big(\beta - \frac{\alpha u}{2}\big)\int_a^b \frac{1}{\big(x-\frac{u}{2}\big)^2 - \frac{-\Delta}{4}}$ *ce qui amène le calcul* $\displaystyle\int_a^b \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ux+v}dx = \frac{\alpha}{2}\Big[\ln\big(x^2+ux+v\big)\Big]_a^b + \big(\frac{2\beta-\alpha u}{\delta}\big)\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-\frac{u}{2}}{\frac{\delta}{2}}\right)\right]_a^b$.
- *Pour le calcul de* $\displaystyle\int_a^b \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ux+v)^n}dx = \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{(2x+u)}{(x^2+ux+v)^n}dx + \big(\beta - \frac{\alpha u}{2}\big)\int_a^b \frac{1}{\Big(\big(x-\frac{u}{2}\big)^2 - \frac{-\Delta}{4}\Big)^n}$ *avec* $n \geqslant 2$*, on effectue dans la seconde partie le changement de variables* $t = \dfrac{2x-u}{\delta}$ *pour se ramener au calcul de* $J_n = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t^2+1)^n}dt$ *(la première partie vaut simplement* $\displaystyle\frac{\alpha}{2}\Big[-\frac{1}{(n-1)(x^2+ux+v)^{n-1}}\Big]_a^b$*).*
- *Par intégration par parties, si* $n \geqslant 1$*, on a :* $\displaystyle J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}J_n + \frac{1}{2n}\Big[\frac{t}{(t^2+1)^n}\Big]_a^b$.

<u>EXEMPLE 23.8</u> : On sait que $J_1 = \mathrm{Arctan}(b) - \mathrm{Arctan}(a)$, donc, d'après la formule de récurrence précédente : $\displaystyle J_2 = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Arctan}(b) - \mathrm{Arctan}(a)\big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{b}{(1+b^2)^2} - \frac{a}{(1+a^2)^2}\Big)$.

<u>*REMARQUE 23.19*</u> *: Soit* $I = \displaystyle\int_a^b F\big(\sin(\theta),\cos(\theta)\big)d\theta$ *l'intégrale d'une "fraction rationnelle" en* $\sin$ *et* $\cos$*. On a les règles de* BIOCHE *qui transforment* I *en l'intégrale d'une simple fraction rationnelle :*

- *si* $F\big(\sin(\theta),\cos(\theta)\big)d\theta$ *est invariant si on change* θ *en* $-\theta$ *(*$F\big(-\sin(\theta),\cos(\theta)\big) = -F\big(\sin(\theta),\cos(\theta)\big)$*), on pose* $x = \cos(\theta)$ *(*$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$*). Calcul :* $I = \displaystyle\int_a^b g\big(\cos(\theta)\big) \times \big(-\sin(\theta)\big)d\theta = \int_{\cos(a)}^{\cos(b)} g(x)dx$.
- *si* $F\big(\sin(\theta),\cos(\theta)\big)d\theta$ *est invariant si on change* θ *en* $\pi-\theta$ *(*$F\big(\sin(\theta),-\cos(\theta)\big) = -F\big(\sin(\theta),\cos(\theta)\big)$*), on pose* $x = \sin(\theta)$ *(*$\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$*). Calcul :* $I = \displaystyle\int_a^b g\big(\sin(\theta)\big) \times \big(\cos(\theta)\big)d\theta = \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} g(x)dx$.
- *si* $F\big(\sin(\theta),\cos(\theta)\big)d\theta$ *est invariant si on change* θ *en* $\pi+\theta$ *(*$F\big(-\sin(\theta),-\cos(\theta)\big) = F\big(\sin(\theta),\cos(\theta)\big)$*), on pose* $x = \tan(\theta)$ *(*$\tan(\pi+\theta) = \tan(\theta)$*). Calcul :* $I = \displaystyle\int_a^b g\big(\tan(\theta)\big) \times \big(1+\tan^2(\theta)\big)d\theta = \int_{\tan(a)}^{\tan(b)} g(x)dx$.
- *si rien ne marche, alors on pose* $x = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ *(on se rappelle de* $\cos(\theta) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $\sin(\theta) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ *et* $\tan(\theta) = \dfrac{2x}{1-x^2}$*). Calcul :* $I = \displaystyle\int_a^b g\Big(\tan\big(\frac{\theta}{2}\big)\Big) \times \frac{1}{2}\Big(1+\tan^2\big(\frac{\theta}{2}\big)\Big)d\theta = \int_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} g(x)dx$.

<u>EXEMPLE 23.9</u> : • Calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)}d\theta$ avec ces règles.

- Calcul de la primitive sur $\Big]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big[$ qui s'annule en 0 de $\theta \mapsto \dfrac{1}{\cos(\theta)}$.

REMARQUE 23.20 :

- *Soit* $I = \int_a^b F\big(\operatorname{sh}(t), \operatorname{ch}(t)\big)dt$ *l'intégrale d'une "fraction" en* sh *et* ch. BIOCHE *marche encore.*
- *Soit* $I = \int_a^b F\big(e^t\big)dt$ *l'intégrale d'une "fraction" en* e^t *(les précédentes peuvent se mettre sous cette forme), on peut poser* $x = e^t$. *Calcul :* $I = \int_a^b e^{-t}F\big(e^t\big)e^t dt = \int_{e^a}^{e^b} \frac{F(x)}{x}dx$.
- *Soit* $I = \int_a^b F(t, \sqrt{\alpha t + \beta})dt$ *l'intégrale d'une fraction avec racine de degré 1, on se ramène à une simple fraction rationnelle en posant le changement* $x = \sqrt{\alpha t + \beta}$.

EXEMPLE 23.10 : Calcul de $\int_0^1 \frac{1}{2t - 3\sqrt{t+1}}dt$.

REMARQUE 23.21 : Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ *continue, on choisit* $a \in I$ *et on sait que les primitives de* f *sur* I *sont les* $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt + k$ *avec* $k \in \mathbb{R}$. *Ceci ramène donc la problème du calcul de primitives à un calcul d'intégrales de fonctions continues sur un segment avec tous les théorèmes classiques.*

PARTIE 23.4 : SOMMES DE RIEMANN

23.4.1 : Convergence

Définition 23.7

Soit $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{R}$, $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$ *une subdivision de* $\widetilde{[a;b]}$ *et une famille* $c = (c_0, \cdots, c_{n-1})$ *de réels telle que* $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $c_k \in [a_k; a_{k+1}]$.
On appelle **somme de** RIEMANN *associée à* f, σ *et* c *la quantité* $S_{f,\sigma,c} = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(c_k)$.
On appelle **pas de la subdivision** σ *la quantité* $p(\sigma) = \underset{0 \leqslant k \leqslant n-1}{\operatorname{Max}}(a_{k+1} - a_k)$.

Théorème 23.8

Soit $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{R}$ **continue, une suite** $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **de subdivisions de** $\widetilde{[a;b]}$ **telle que** $\lim_{n\to+\infty} p(\sigma_n) = 0$ **et des familles de réels** $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **comme ci-dessus :** $\lim_{n\to+\infty} S(f, \sigma_n, c_n) = \int_a^b f(t)dt$.

REMARQUE 23.22 : En découpant aux points de discontinuité, ce théorème est bien sûr vrai si f *n'est que continue par morceaux sur* $\widetilde{[a;b]}$.

Proposition 23.11

Si $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{R}$ **est continue alors avec les subdivisions régulières :**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\big(\frac{b-a}{n}\big)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\big(\frac{b-a}{n}\big)\Big) = \int_a^b f(t)dt.$$

EXEMPLE 23.11 : Calcul de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

REMARQUE 23.23 : Si f *est supposée de classe* C^1*, en notant* $M_1 = \underset{x\in\widetilde{[a;b]}}{\mathrm{Sup}} |f'(x)|$*, on a la majoration de l'erreur* $\left|\dfrac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+k\big(\dfrac{b-a}{n}\big)\Big) - \displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \dfrac{M_1(b-a)^2}{2n}$.

23.4.2 : Méthode des trapèzes et de Simson

⊙ Maintenant on approche la fonction f par des fonctions affines par morceaux sur $\widetilde{[a;b]}$.

Proposition 23.12

Si $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{R}$ **est continue alors on a la convergence :**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(a+k\big(\frac{b-a}{n}\big)\Big) + f(b)\right) = \int_a^b f(t)dt.$$

REMARQUE 23.24 :

- *Si* f *est supposée de classe* C^2*, en notant* $M_2 = \underset{x\in\widetilde{[a;b]}}{\mathrm{Sup}} |f''(x)|$*, on a la majoration de l'erreur suivante :*

$$\left|\frac{(b-a)}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(a+k\big(\frac{b-a}{n}\big)\Big) + f(b)\right) - \int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \frac{M_2|b-a|^3}{12n^2}.$$

- *Avec la méthode du milieu :* $\left|\dfrac{(b-a)}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+(2k+1)\big(\dfrac{b-a}{2n}\big)\Big)\right) - \displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \dfrac{M_2|b-a|^3}{24n^2}$.

⊙ Dorénavant, ce sont des paraboles qui "interpolent" la fonction en les points de la subdivision régulière :

Proposition 23.13

Si $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{R}$ **est continue alors en notant** $a_k = a + k\big(\frac{b-a}{n}\big)$ **:**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{6n} \times \sum_{k=0}^{n-1}\left(f(a_k) + 4f\Big(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\Big) + f(a_{k+1})\right) = \int_a^b f(t)dt.$$

REMARQUE 23.25 : Si f *est supposée de classe* C^4*, en notant* $M_4 = \underset{x\in\widetilde{[a;b]}}{\mathrm{Sup}} |f^{(4)}(x)|$*, on a :*

$$\left|\frac{(b-a)}{6n} \times \sum_{k=0}^{n-1}\left(f(a_k) + 4f\Big(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\Big) + f(a_{k+1})\right) - \int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \frac{M_4|b-a|^5}{2880n^4}.$$

PARTIE 23.5 : DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE COMPLEXE

23.5.1 : Définition et propriétés

Définition 23.8

Soit $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{C}$ *continue par morceaux, alors on définit* **l'intégrale de** f *"de* a *à* b*", notée* $\displaystyle\int_a^b f$ *; elle est définie par :* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)$.

REMARQUE 23.26 : Cette nouvelle définition prolonge celle de l'intégrale réelle.

EXEMPLE 23.12 **:** Si $a = a_1 + ia_2$ avec $a_2 \neq 0$, alors on a l'intégrale classique suivante :

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{x-a}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left((x-a_1)^2 + a_2^2\right) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a_1}{a_2}\right)\right]_\alpha^\beta.$$

⊙ Les propriétés valables pour les fonctions à valeurs réelles le sont aussi pour celles à valeurs complexes.

Théorème 23.9

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ **(**$\alpha < \beta$**),** $(f,g) \in C_m^0([\alpha;\beta],\mathbb{C})^2$**,** $(a,b,c) \in [\alpha,\beta]^3$**,** $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ **:**

$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ **(linéarité) ;** $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$ **;** $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (Chasles) **;** $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

En notant $||f||_\infty = \underset{t\in\widetilde{[a;b]}}{\mathrm{Sup}} |f(t)|$ **:** $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right| \leqslant |b-a|\,||f||_\infty$ **et** $\left|\int_a^b fg\right| \leqslant ||f||_\infty \left|\int_a^b |g|\right|$.

$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\left|\int_a^b |f|^2\right|}\sqrt{\left|\int_a^b |g|^2\right|}$ **(inégalité de** Cauchy-Schwarz**).**

Démonstration : On pose $\int_a^b f = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0)$ et $h = e^{-i\theta} f$ de sorte que $|h| = |f|$ et $\int_a^b h = \rho = \int_a^b \mathrm{Re}(h)$.

23.5.2 : Intégrales et primitives

Théorème 23.10

Soit $a \in I$ **et** $f : I \to \mathbb{C}$ **continue, alors** $F : I \to \mathbb{C}$ **définie par la relation** $\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f$ **est la primitive de** f **(sur** I**) qui s'annule en** a**.**

Soit $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{C}$ **continue et** F **une de ses primitives sur** $\widetilde{[a;b]}$ **:** $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Soit $u, v : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{C}$ **deux fonctions de classe** C^1 **:** $\int_a^b u'(t)v(t)dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Soit $f : \widetilde{[a,b]} \to \mathbb{C}$ **de classe** C^{n+1} **:** $f(b) = f(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **et** $\varphi : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1 **et** $f : I \to \mathbb{C}$ **continue (avec** $\widehat{\varphi}(\widetilde{[a;b]}) \subset I$**), alors par changement de variables (**$u = \varphi(t)$**) :** $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b \varphi'(t) \times f\big(\varphi(t)\big)dt$.

REMARQUE 23.27 : • *On admet* ($a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *et* $n \geqslant 2$) *que* $\left(-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}\right)' = \frac{1}{(x-a)^n}$ *sur* $\mathbb{R}$.

• *Si* $f : I \to \mathbb{C}$ *continue et* $u, v : J \to I$ *dérivables, alors* $G : J \to \mathbb{C}$ *définie par :* $\forall x \in J,\ G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ *est dérivable et on a :* $\forall x \in J,\ G'(x) = v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big)$.

Proposition 23.14

Si $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{C}$ **est continue alors avec les subdivisions régulières :**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\big(\frac{b-a}{n}\big)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\big(\frac{b-a}{n}\big)\Big) = \int_a^b f(t)dt.$$