CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

Oral

PSI

Pour traiter ce sujet le candidat est vivement invité à utiliser l'ordinateur à sa disposition, équipé de Python/Pyzo et de Scilab.

1. Avec le logiciel, créer un tableau b tel que pour tout (i,j) de $[\![0,12]\!]^2$ on ait

$$\begin{cases} b_{i,j} = \binom{i}{j} & \text{si } j \leqslant i \\ b_{i,j} = 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

2. On note $\mathrm{e} = \exp(1)$ et pour tout (n,k) de $\mathbb{N}^2$, on pose $u_{n,k} = \dfrac{k^n}{k!}$.

   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, la série de terme général $u_{n,k}$, pour k de $\mathbb{N}$, est convergente.

   On note $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}$ sa somme.

   b. Donner la valeur exacte de A_0 et A_1.

   c. Exprimer pour tout $n \geqslant 1$, A_{n+1} en fonction de $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

   d. En déduire les valeurs exactes de A_n pour n dans $[\![0,12]\!]$.

3. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

   a. Montrer que cette série entière est de rayon de convergence R non nul, au moins égal à 1.

   Pour tout x de $I = \left]-R, R\right[$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

   b. Donner une représentation à l'écran de f sur un intervalle convenable.

   c. Montrer que f est solution sur I d'une équation différentielle linéaire homogène que l'on précisera.

   d. En déduire une expression de $f(x)$ sans le signe de sommation et une nouvelle représentation à l'écran de f sur un intervalle convenable.

   e. Avec cette expression donner une nouvelle méthode pour calculer les A_n et vérifier pour n de $[\![0,12]\!]$.

   f. Préciser le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.