CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

Oral

PSI

Pour traiter ce sujet le candidat est vivement invité à utiliser l'ordinateur à sa disposition, équipé de Python/Pyzo et de Scilab.

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on considère la fonction polynomiale $P_n(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}$ et on s'intéresse ici aux racines de ce polynôme.

1.

   a. Donner à l'écran des représentations graphiques de P_n sur des intervalles adaptés pour n dans $\{2,3,4,5,6,7\}$.

      Que constate-t-on quant aux racines réelles de P_n suivant n ?

   b. Mettre en œuvre la méthode de Newton (ou méthode de la tangente) pour la recherche d'une valeur approchée décimale d'une solution réelle de l'équation $P_n(t) = 0$, et déterminer ainsi les éventuelles racines réelles de cette équation pour n dans $\{2,3,4,5,6,7\}$.

      On pourra d'abord calculer P_n'.

   c. Représenter à l'écran toutes les racines complexes de P_n dans les cas où $n=3$, $n=5$, $n=8$ et $n=15$.

2.

   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, P_n est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples.

   b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, P_n n'a pas de racines dans $\mathbb{R}_+$.

   c. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, P_{2k} n'a pas de racines réelles et P_{2k+1} a une seule racine réelle, notée r_k.

      On pourra commencer par s'intéresser au signe de $P_n'(\alpha)$ pour une éventuelle racine α de P_n et, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, raisonner par l'absurde.

   d. Montrer que pour $k \geqslant 1$, on a : $-(2k+1) < r_k < -1$.

   e. Étudier la monotonie de la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$.