CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

Oral

PSI

Pour traiter ce sujet le candidat est vivement invité à utiliser l'ordinateur à sa disposition, équipé de Python/Pyzo et de Scilab.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $c(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture de n en base 10. Par exemple : $c(1)=1$, $c(9)=1$, $c(10)=2$, $c(99)=2$, $c(2015)=4$.

1. Un entier k dans $\mathbb{N}^*$ étant donné, combien y-a-t-il d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $c(n)=k$?

2.

   a. Écrire une fonction permettant de calculer $c(n)$. Tester avec $c(100!)$.

   b. Écrire une fonction `Couples(k)` permettant de compter le nombre de couples (a,b) d'entiers à k chiffres tels que le produit $a\,b$ comporte $2k$ chiffres.

   c. Pour $k=1$, 2 et 3, calculer $\dfrac{\texttt{Couples}(k)}{81\times 10^{2k-2}}$.

3. On note p_n la probabilité pour que deux nombres entiers à n chiffres choisis indépendamment, aient un produit ayant $2n$ chiffres.

   a. Exprimer p_n à l'aide de la fonction `Couples(n)`.

   b. On note $\lfloor x\rfloor$ la partie entière d'un réel x. Montrer que
   $$1-p_n=\frac{1}{81\times 10^{2n-2}}\sum_{k=10^{n-1}}^{10^n-1}\left(\left\lfloor\frac{10^{2n-1}-1}{k}\right\rfloor-10^{n-1}+1\right)$$

4.

   a. Calculer $A_n=\displaystyle\sum_{k=10^{n-1}}^{10^n-1}(10^{n-1}-1)$.

   Donner un équivalent de A_n en l'infini.

   b. Déterminer un équivalent de $B_n=\displaystyle\sum_{k=10^{n-1}}^{10^n-1}\left\lfloor\frac{10^{2n-1}-1}{k}\right\rfloor$ en l'infini.

   On pourra comparer à une intégrale.

   c. En déduire que la suite $(p_n)_n$ est convergente.

   Déterminer sa limite ; en donner une valeur approchée décimale raisonnable.