Mathématiques 2

Oral

PSI

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Soit n un entier naturel. On dispose de $n+1$ urnes $U_0, \ldots, U_n$. Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, l'urne U_j contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j. On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne U_n ;
- à l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro j ($j \in [\![0,n]\!]$), le second tirage s'effectue dans l'urne U_j ;
- on continue alors les tirages selon la même règle : pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on tire une boule avec remise au k-ième tirage et on note le numéro j de la boule tirée. Le $(k+1)$-ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne U_j.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tirée lors du k-ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne U_n, on pose $X_0 = n$.

Pour tout entier naturel k, on considère la matrice W_k dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} P\{X_k = 0\} \\ P\{X_k = 1\} \\ \vdots \\ P\{X_k = n\} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel k, on note $E(X_k)$ l'espérance de X_k.

1. a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

   b. Déduire du résultat précédent que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite P dont on précisera brièvement la nature géométrique.

   c. Écrire une fonction `matriceA(n)` qui prend en paramètre un entier n et renvoie la matrice A correspondante.

   d. En utilisant la fonction `linalg.eig` de `numpy` déterminer le vecteur propre associé à la valeur propre 1 de A.

2. Écrire une fonction qui prend en paramètres deux entiers k et n et renvoie une liste contenant le résultat de k tirages (on pourra utiliser la fonction `randint` du module `random` de Python).

   Tester plusieurs fois avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 50$.

3. a. Pour tout j dans $[\![0,n]\!]$, écrire $P(X_{k+1} = j)$ en fonction de certains des nombres $P(X_k = i)$ pour i dans $[\![0,n]\!]$.

   b. En déduire la relation : $W_{k+1} = A\,W_k$ puis une expression de W_k en fonction de A et de W_0.

   c. Écrire une fonction en Python qui prend en paramètres deux entiers k et n qui engendre le vecteur W_0, calcule A^k (en utilisant `matriceA(n)`) et renvoie le vecteur W_k correspondant.

   Tester le programme avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 20$.

4. a. Déterminer la matrice B dans $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $B\,W_k = E(X_k)$.

   b. Calculer le produit $B\,A$ en fonction de B.

   c. Pour tout entier naturel k, exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$.

   d. En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de k et n.

   Ce résultat est-il en accord avec les résultats théoriques et empiriques précédents ?