



PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2021 / 2022



TABLE DES MATIÈRES

- 1 : intégrales et analyse (8 exercices)	page 3
- 2 : algèbre linéaire et générale (12 exercices)	page 5
- 3 : séries numériques, séries de fonctions, séries entières (23 exercices)	page 7
- 4 : espaces vectoriels normés, courbes, dérivabilité (7 exercices)	page 12
- 5 : réduction des endomorphismes (25 exercices)	page 14
- 6 : théorèmes de domination (13 exercices)	page 20
- 7 : espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens (21 exercices)	page 23
- 8 : probabilités et variables aléatoires (19 exercices)	page 28
- 9 : équations différentielles et calcul différentiel (13 exercices)	page 34

ORAUX 2022 THÈME 1

INTÉGRALE ET ANALYSE

1 X PSI 2021 Antoine Greil I

Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, de classe C^1 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

2 ENS Cachan PSI 2021 Baptiste Pozzobon I

Déterminer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha dt}{1+t}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

3 Centrale Maths1 PSI 2021 Clotilde Cantini

On admet la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. On note I sa valeur.

On définit, en cas de convergence, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$.

- a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I$ et calculer la limite de f en $+\infty$.
- c. Montrer que $I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$.
- d. En déduire que f n'est pas continue en 0.

4 Mines PSI 2021 Aloïs Doucet II

a. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge.

Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique.

b. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

5 Mines PSI 2021 Esteban Poupinet I

- a. Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.
- c. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

6 Mines PSI 2021 Adèle Robert I

On pose $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\omega n x} dx$.

a. Calculer I_n . En déduire une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ non nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} g(t) t^n dt = 0$.

b. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue (avec $a < b$ réels) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t) t^n dt = 0$.

Montrer que $f = 0$. Indication : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{C}[X]$, $\forall t \in [a; b]$, $|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon$.

7 Mines PSI 2021 Arthur Sureau II

Soit $m \in \mathbb{R}_+$, calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + m \sin^2(t)}$ en posant $u = \tan(t)$.

8 Mines PSI 2021 Sylvain Vigouroux I

Soit $F : x \mapsto \sin(2x^7 + x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. La fonction F est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

b. L'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x)dx$ est-elle convergente ?

ORAUX 2022 THÈME 2

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

9 X PSI 2021 Julien Gombert I

Soit $(d, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et $E_{d,n} = \{I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d \mid i_1 + \dots + i_d = n\}$.

Pour $I = (i_1, \dots, i_d) \in E_{d,n}$, on définit la fonction $f_I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_I(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d x_k^{i_k}$.

Montrer que $(f_I)_{I \in E_{d,n}}$ est une famille libre.

10 X PSI 2021 Antoine Greil II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère S_A l'ensemble des matrices semblables à A .

Déterminer l'ensemble des matrices A telles que S_A soit fini.

11 X PSI 2021 Clément Lopez III

Soit $n \geq 1$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on suppose semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12 Centrale Maths1 PSI 2021 Antoine Greil I

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

a. Montrer que si $\omega \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors ω^2 l'est aussi.

b. Montrer que toutes les racines $\omega \in \mathbb{C}$ de P vérifient $|\omega| = 1$ ou $\omega = 0$.

c. Montrer que 0 n'est pas racine de P .

d. Déterminer P en le factorisant.

13 Mines PSI 2021 Maxime Brachet II

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E tel qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $u^m = \text{id}_E$. On pose $p = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k$.

a. Montrer que si $v \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, $\text{rang}(v) = \text{Tr}(v)$. La réciproque est-elle vraie ?

b. Montrer que $p^2 = p$.

c. Prouver que $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \text{Tr}(u^k) = \dim(\text{Ker}(u - \text{id}_E))$.

d. Caractériser la projection p .

14 Mines PSI 2021 Robin Gondeau II

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que $A = \{q \in \mathbb{N} \mid (u, u^2, \dots, u^q) \text{ est liée} \}$ est non vide et qu'elle admet un élément minimal.

b. Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2) \iff u \in \bigcup_{k \geq 2} \text{Vect}(u^k)$.

15 Mines PSI 2021 Quentin Granier II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $A_n = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Par exemple, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note d_k le nombre de permutations de $\llbracket 1; k \rrbracket$ (bijections de $\llbracket 1; k \rrbracket$ dans $\llbracket 1; k \rrbracket$) qui n'ont aucun point fixe. Par convention, on pose $d_0 = 1$.

a. Calculer A_n^{-1} . Indication : considérer un endomorphisme bien choisi de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Montrer que $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, p! = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} d_k$.

c. Trouver une relation entre ${}^t A_n$ et les matrices colonnes $\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$.

d. En déduire une expression de d_n sous forme de somme.

e. Si on note p_n la probabilité, en choisissant une permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ au hasard, d'obtenir une permutation sans point fixe, quelle est la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$?

16 Mines PSI 2021 Antoine Greil II

Déterminer les couples $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $X^n - 1$ et $(X+1)^p - 1$ admettent au moins une racine commune.

17 Mines PSI 2021 Adrien Guyot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)^2$ tel que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \text{GL}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) = n$.

18 Mines PSI 2021 Johan Haramboure I

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $A \neq 0$, B nilpotente et $AB = BA$, montrer que $\text{rang}(AB) < \text{rang}(A)$.

b. Soit $A_1, \dots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent 2 à 2, montrer que $A_1 \cdots A_n = 0$.

c. La propriété de b. est-elle encore vraie si on ne suppose plus que les matrices commutent deux à deux ?

19 Mines PSI 2021 Yuan Le Guennic I

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne des fonctions $f_1, \dots, f_n$ de E .

Pour une famille $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la matrice $A_x = (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si $\det(A_x) \neq 0$, alors la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans E .

b. Réciproquement, montrer par récurrence que si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans E , alors il existe une famille de réels $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\det(A_x) \neq 0$.

20 CCINP PSI 2021 Thomas Boudaud II

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

a. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$.

b. Soit un vecteur non nul $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$, montrer que $(x, f(x))$ est libre.

c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Montrer que $\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$.

ORAUX 2022 THÈME 3

SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

21 X PSI 2021 Julien Gombert II

Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 0} |u_n| \text{ converge et } \forall k \geq 1, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 2^{-kn} = 0\}$.

Chercher les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E .

22 ENS Cachan PSI 2021 Tinaël Gelpe et Arthur Riché

Soit $a : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive et ρ un réel strictement positif.

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ par $\forall x \in [0; 1], f_0(x) = 0$ et $f_{n+1}(x) = \frac{\rho}{\rho + a(x) - \int_0^1 a(y) f_n(y) dy}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 a(x) f_n(x) dx$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; \rho]$ et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

b. On suppose dans cette question qu'il existe un réel $c > 0$ tel que $\forall x \in [0; 1], a(x) \geq c$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément et déterminer sa limite.

Indication : on pourra distinguer les cas $\rho \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx \leq 1$ et $\rho \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx > 1$.

c. Dans cette question, on pose $a(x) = \sqrt{x}$. Pour quels $\rho > 0$ a-t-on convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Et convergence pour la norme $\|\cdot\|_1$ telle que $\|h\|_1 = \int_0^1 |h(t)| dt$?

23 ENS Cachan PSI 2021 Yuan Le Guennic

Soit $K : [a; b]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ continue et telle que $K(x, y) = 0$ si $y \geq x$.

Soit $T_K : C^0([a; b], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([a; b], \mathbb{R})$ telle que $\forall u \in C^0([a; b], \mathbb{R}), \forall x \in [a; b], T_K(u)(x) = \int_a^b K(x, y) u(y) dy$.

On note, pour tout entier n , l'application $T_K^n = \underbrace{T_K \circ \dots \circ T_K}_{n \text{ fois}}$.

a. Construire une suite de fonctions $(K_n)_{n \geq 1}$ telle que $\forall n \geq 1, K_n(x, y) = 0$ si $y \geq x$ et telle que l'on ait $\forall u \in C^0([a; b], \mathbb{R}), \forall x \in [a; b], T_K^n(x) = \int_a^x K_n(x, y) u(y) dy = \int_a^b K_n(x, y) u(y) dy$.

b. Montrer que $\forall (x, y) \in [a; b]^2, |K_2(x, y)| \leq \|K\|_\infty^2 |x - y|$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $w \in C^0([a; b], \mathbb{R})$, montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{T_K^n(w)}{\lambda^n}$ converge uniformément sur $[a; b]$.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $v \in C^0([a; b], \mathbb{R})$, montrer qu'il existe une unique $u \in C^0([a; b], \mathbb{R})$ telle que $T_K(u) - \lambda u = v$.

e. Soit (1) le problème $\begin{cases} u'' + a_0 u' + a_1 u = 0 \\ u(a) = \alpha \text{ et } u'(a) = \beta \end{cases}$. Montrer que l'équation $u'' + a_0 u' + a_1 u = 0$ peut s'écrire $(pu')' - qu = f$ avec $p \in C^1([a; b], \mathbb{R}_+^*)$ et $(q, f) \in (C^0([a; b], \mathbb{R}))^2$ à déterminer.

f. Donner $K : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $g \in C^0([a; b], \mathbb{R})$ telles que $K(x, y) = 0$ si $y \geq x$ et u est solution de (1) si et seulement si $T_K(u) - u = g$.

24 Centrale Maths1 PSI 2021 Mathilde Arnaud

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = xe^x$.

a. Tracer le graphe de f . Montrer que f est bijective. Tracer le graphe de f^{-1} .

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(a)e^{u_{n+1}(a)} = u_n(a)$.

b. Étudier la convergence de la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$.

c. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n(a)$.

Question de cours : Rappeler la formule de TAYLOR reste intégral.

25 Centrale Maths1 PSI 2021 Sylvain Vigouroux

Soit $n \in \mathbb{N}$ et la famille $(P_0, \dots, P_n)$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, $P_k = X(X-1) \cdots (X-k+1)$.

a. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $S(n, k)$ les coefficients de X^n dans la base $(P_0, \dots, P_n)$: $X^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)P_k$.

b. Déterminer les valeurs de $S(n, 0)$ et $S(n, n)$ si $n \geq 0$ et de $S(n, 1)$ si $n \geq 1$.

c. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $XP_k = P_{k+1} + kP_k$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$.

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $0 \leq S(n, k) \leq 2^{n-1}k^n$.

e. Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{S(n, k)}{n!} x^n$.

f. En notant $h_p(x) = \sum_{n=0}^p \frac{S(n, k)}{n!} x^n$, résoudre le système (E) : $y' - 2y = h_p$ avec $y(0) = 0$.

26 Mines PSI 2021 Maëva Berland II On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(x+n)}$.

a. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

c. Trouver un polynôme P tel que $f(x) - \frac{P(x)}{???} = ???$.

27 Mines PSI 2021 Clotilde Cantini II

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$.

28 Mines PSI 2021 Robin De Truchis II

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k!}{n!}$.

a. Supposons que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge pour un réel a , montrer alors que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge pour tout valeur de a vers une limite à déterminer.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge pour $a = 1$.

c. Montrer que $(s_n)_{n \geq 1}$ converge.

d. Déterminer le rayon et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} s_n x^n$.

29 Mines PSI 2021 Robin Gondeau I

On admet que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ où γ est une constante réelle.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$.

a. Montrer qu'il existe une suite convergente $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = -\frac{3}{2}\ln(n) + w_n$.

b. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

c. Montrer que $\forall n \geq 0$, $2 \sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2 \sum_{k=0}^n ku_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k$.

d. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

30 Mines PSI 2021 Quentin Granier I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

a. Montrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers une fonction g qu'on déterminera.

b. Montrer que cette convergence est en fait uniforme sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ mais que g ne l'est pas.

Qu'en déduire vis-à-vis d'un théorème du cours ?

31 Mines PSI 2021 Pierre-Issa Lacourte I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \mapsto \ln(1 + e^{-nx})$ et, en cas de convergence, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition I de f .

b. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I .

c. Montrer que f admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ et la déterminer.

d. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

32 Mines PSI 2021 Yuan Le Guennic III

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} e^{\frac{nz}{z-2}}$ selon la valeur de z .

33 Mines PSI 2021 Alexandre Marque I

On appelle involution d'un ensemble E toute application $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = \text{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ et $I_n = \text{card}(A_n)$ avec la convention $I_0 = 1$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geq 1$.

On définit $\varphi :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

c. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[$, $\varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$.

d. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

e. En déduire une expression de I_n sous forme de somme.

34 Mines PSI 2021 Raffi Sarkissian II

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$.

- a. Trouver $\alpha > 0$ maximal tel que f soit définie sur $] -\alpha; \alpha[$.
- b. Montrer que f est développable en série entière et en déduire une expression simplifiée de f .

35 Mines PSI 2021 Guillaume Touly III

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, que dire de la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n^\alpha}$?

36 Mines PSI 2021 Antonio Treilhou II

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$.

- a. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.
- b. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$.
- c. Donner le développement en série entière de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}$.
- d. Majorer le reste de la série entière de la question précédente.
- e. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (4n+1)}$.

37 CCINP PSI 2021 Mathilde Arnaud I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

- a. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la fonction somme de cette série de fonctions.

- b. S est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?
- c. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- d. Trouver une expression de $S(x)$ avec des fonctions usuelles.
- e. En déduire la valeur de $S(0)$.

38 CCINP PSI 2021 Maëva Berland I

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} (u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2})$.

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}$.
- b. En déduire que la convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n$ implique la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- c. La réciproque est-elle vraie ? Indication : on pourra considérer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \frac{n}{n+1}$.

39 CCINP PSI 2021 Thomas Boudaud I

Soit $\varphi : I = [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leq c|x|$.
On cherche les fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que (P) : $f(0) = 0$ et $\forall x \in I, f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$.

- Montrer que $\sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ converge pour $x \in I$ et que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est continue sur I .
- Montrer que S est solution de (P).
- Montrer que la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle.
- En déduire l'ensemble des solutions de (P).
- Si on suppose φ de classe C^1 sur I , montrer que S est aussi de classe C^1 sur I .

40 CCINP PSI 2021 Johan Haramboure I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geq 0$ et $f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

- Montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer la convergence simple de $(f'_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}$.
- Justifier que $(f'_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément sur $[-1; 1]$.

41 CCINP PSI 2021 Clément Léroü I

Soit $F : x \mapsto -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ et $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. On rappelle que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Déterminer le domaine de définition D de F .
- Montrer que $\forall x \in [-1; 1], F(x) = S(x)$.
- Montrer que $\forall x \in]0; 1[, F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x)$.

42 CCINP PSI 2021 Juliette Maricourt I

Pour $n \geq 2$, soit $u_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

- Déterminer l'ensemble de définition D de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.
- Montrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D .
- Montrer que $\forall x \in D, \forall n \geq 2, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.
- En déduire que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur D .
- La fonction S est-elle intégrable sur D ?

43 CCINP PSI 2021 Alexandre Marque et Adèle Robert II

Déterminer la nature des séries suivantes :

- $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
- $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \int_0^n e^{-t^2 n^2} dt$.

ORAUX 2022 THÈME 4

ESPACES VECTORIELS NORMÉS, GÉOMÉTRIE ET DÉRIVABILITÉ

44 X PSI 2021 Clément Lopez II

- a. Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

45 X PSI 2021 Arthur Riché II

- Soit $a \in \mathbb{C}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2$.
Trouver les valeurs de a telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Indication : traiter d'abord le cas réel.

46 ENS Cachan PSI 2021 Titouan Nguyen

- Pour une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on pose $V(f) = \sup_{n \geq 1} \left(\sup_{0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1} \left(\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \right) \right)$. On note aussi $BV = \{f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid V(f) < +\infty\}$. Pour une fonction $f \in BV$, on dit que f est à variations bornées.
- a. Une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne appartient-elle à BV ?
 - b. Une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone appartient-elle à BV ?
 - c. Donner un exemple de fonction continue $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \notin BV$.
 - d. Soit $f \in BV$, la fonction f est-elle bornée ?
 - e. L'application $N : BV \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $N(f) = |f(0)| + V(f)$ fait-elle de BV un espace vectoriel normé ?
 - f. Si $(f, g) \in BV^2$ a-t-on nécessairement $fg \in BV$?
 - g. Soit $(f, g) \in BV^2$ avec $g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ monotone, montrer que $f \circ g \in BV$.
 - h. Soit $(f, g) \in BV^2$ avec $g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, la condition f monotone implique-t-elle que $f \circ g \in BV$?

47 Centrale Maths1 PSI 2021 Quentin Granier et Arthur Riché et Adèle Robert

On pose $f_1(t) = \int_0^t \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$ et $f_2(t) = \int_0^t \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$.

- a. Montrer que f_1 est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b. Montrer que f_1 admet une limite finie en $+\infty$.

On admet que f_2 est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet une limite finie en $+\infty$.

- c. Soit $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $t_1 < t_2$, quelle est la longueur de l'arc paramétré $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ entre les points de paramètres t_1 et t_2 ?

On pose $F(t) = \left(\int_t^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du \right)^2 + \left(\int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du \right)^2$.

- d. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(t) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{t^2 + tu}} du$.
- e. Soit a et t deux réels strictement positifs, montrer que $\int_0^\pi \frac{\cos(u)}{\sqrt{a + tu}} du > 0$.
- f. Montrer que F est strictement décroissante.

48 Mines PSI 2021 Tinaël Gelpe II

Trouver toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijective vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, x = \frac{\varphi(x) + \varphi^{-1}(x)}{2}$.

49 Mines PSI 2021 Paul Jaïs I

On considère l'arc paramétré Γ par $x(t) = \cos(3t)$, $y(t) = \sin(2t)$.

- a. Étudier les symétries, périodicité de cette courbe.
- b. Quels sont ses points stationnaires, ses tangentes horizontales, verticales ?
- c. Tracer la courbe Γ .

50 Mines PSI 2021 Esteban Poupinet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\exp_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$.

- a. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E . Montrer que F est fermé.
- b. Montrer que la suite $(\exp_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge. On note $\exp(A)$ sa limite.
- c. Montrer que $\exp(A) \in \bigcup_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \text{Vect}(A^k)$.

ORAUX 2022 THÈME 5

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

51 *X PSI 2021* Arthur Riché I

Soit $n \geq 1$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $E \setminus \text{GL}_n(\mathbb{C}) = \{0\}$.

Quelles sont les dimensions possibles pour E ? Indication : tester pour les petites valeurs de $d = \dim(E)$.

52 *ENS Cachan PSI 2021* Antoine Greil

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit surjectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit injectif sur $\mathbb{R}$.
- Supposons $\deg(P) \geq 2$. Montrer que $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = P(M)$ n'est pas injective.
- Supposons que la fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective. Montrer que la restriction de la fonction f de la question précédente est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

53 *ENS Cachan PSI 2021* Adrien Guyot

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite une matrice de HESSENBERG supérieure si elle vérifie $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, i > j + 1 \implies a_{i,j} = 0$. On dit de plus que A est irréductible si $\forall i \in \llbracket 1;n-1 \rrbracket, a_{i+1,i} \neq 0$.

- Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de HESSENBERG.
 - Soit A une matrice de HESSENBERG irréductible, montrer que A est diagonalisable si et seulement si ses valeurs propres sont simples.
 - On se donne $3n-2$ complexes $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}, c_2, \dots, c_n$, montrer que les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$ sont les mêmes que celles de $B = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & c_3 b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_n b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$.
- Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1;n-1 \rrbracket, c_{i+1} b_i \neq 0$.
- Trouver une condition nécessaire et suffisante pour diagonaliser une matrice de HESSENBERG.
 - Le résultat précédent est-il toujours valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

54 *Centrale Maths1 PSI 2021* Maxime Brachet

- Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\text{Tr}(A) = 0$ et $\text{Tr}(A^2) \neq 0$, montrer que A est diagonalisable.
- Soit maintenant $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{Tr}(A) = \dots = \text{Tr}(A^{n-1}) = 0$ et $\text{Tr}(A^n) \neq 0$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A avec leurs multiplicités algébriques respectives $n_1, \dots, n_r$.
- Montrer qu'il existe au moins une valeur propre non nulle de A .
 - Montrer que $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix}$ appartient au noyau d'une matrice de VANDERMONDE à déterminer sous une condition à déterminer.
 - En déduire que A est diagonalisable.

55 Centrale Maths1 PSI 2021 Tinaël Gelpe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ avec $p \geq 2$.

On suppose de plus que $\forall i \in \llbracket 2; p \rrbracket, |\lambda_i| < |\lambda_1|$ (*).

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Tr}(A^k) \neq 0$, on pose $t_k = \frac{\text{Tr}(A^{k+1})}{\text{Tr}(A^k)}$.

- a. Montrer que les t_k sont définis à partir d'un rang k_0 et que $(t_k)_{k \geq k_0}$ converge vers une limite à déterminer.
b. Les résultats de la question a. sont-ils encore vérifiés si (*) ne l'est plus ?

c. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k}{k}$.

56 Centrale Maths1 PSI 2021 Clément Lérout

Soit $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P(X+1)$.

- a. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
b. Déterminer $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ si $g : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
c. Déterminer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Ker}(g^k)$ et $\text{Im}(g^k)$.

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de la restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique.

On pose aussi la matrice $B = A^t A$.

- d. Déterminer A et $\det(A)$. A est-elle diagonalisable ?
e. Trouver l'inverse de B .

Questions de cours :

- Donner l'inégalité de MARKOV.
- Donner l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.
- Énoncer le théorème spectral version vectorielle.

57 Mines PSI 2021 Mathilde Arnaud I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $C = \{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M^T) = f(M)^T\}$. On note traditionnellement $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques.

- a. Montrer que C est un sous-espace vectoriels de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
b. Montrer que $f \in C$ si et seulement si $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par f .
c. En déduire la dimension de C .
d. Exhiber un endomorphisme non diagonalisable de C .

58 Mines PSI 2021 Thomas Boudaud II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A .
b. Quelle est la structure de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$? Déterminer sa dimension.
c. Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) telles que $M^2 = A$?

59 Mines PSI 2021 Aloïs Doucet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $B = A^3 + A + I_n$.

- a. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, exprimer A comme un polynôme en B .
- b. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, peut-on exprimer A comme un polynôme en B ?

60 Mines PSI 2021 Tinaël Gelpe I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de n .

61 Mines PSI 2021 Pierre-Issa Lacourte II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur.

Soit $u, v, w : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définis par $u(M) = MA$, $v(M) = AM$ et $w(M) = AM - MA$.

- a. u, v sont-ils diagonalisables ?
- b. Quelles peuvent-être les valeurs propres de w ?
- c. w est-il diagonalisable ?

62 Mines PSI 2021 Clément Lopez I

Soit $E = C^\infty([0; 1], \mathbb{R})$ et T définie sur E par $T(f) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme de E .
- b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0; 1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.
- c. Déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(0)$.
- d. Trouver de même, pour $x \in [0; 1]$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(x)$.
- e. Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.
- f. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?
- g. Pour $f \in E$, calculer $(T(f))'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.

63 Mines PSI 2021 Baptiste Pozzobon I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et H un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$. On pose $r = \text{rang}(f)$.

- a. Montrer que $g : H \rightarrow \text{Im}(f)$ définie par $g(x) = f(x)$ est un isomorphisme.
- b. Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et $\mathbb{C}^n$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$.
- c. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{rang}(C) = r$. Montrer qu'il existe $(P, Q) \in (\text{GL}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $C = PJ_rQ$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r telle que $AC = CB$.

- d. Montrer que les matrices A et B admettent au moins r valeurs propres en commun (comptées avec leurs ordres de multiplicité).
- e. Donner un argument plus rapide pour montrer que si C est inversible, alors A et B admettent au moins n valeurs propres en commun (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

64 *Mines PSI 2021* Arthur Riché II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Trouver le spectre de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Justifier l'existence de $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et de $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.
- Donner une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminer l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $TN = NT$.
- En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

65 *Mines PSI 2021* Adèle Robert II

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

- La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
 - La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- On généralise $J = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\alpha_{i,j} = 1$ si $j \equiv i + 1 [n]$ et $\alpha_{i,j} = 0$ sinon.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose alors $M = P(J)$.
- La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
 - La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

66 *Mines PSI 2021* Arthur Sureau I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = ((\alpha X + \beta)P)'$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .
- Soit $n \in \mathbb{N}$, diagonaliser l'application φ_n induite par φ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

67 *Mines PSI 2021* Guillaume Touly II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = \chi_M$ son polynôme caractéristique.

Montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(M)$, $|\lambda| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$.

68 *CCINP PSI 2021* Mathilde Arnaud II

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n v_k = 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = x - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) v$.

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
- Pour $y \in \mathbb{R}^n$, montrer que $y \in \text{Im}(f) \iff f(y) = y$.
- Justifier que $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$. Qu'en déduire ?
- Expliciter les sous-espaces propres de f .

69 CCINP PSI 2021 Maëva Berland II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.

- a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule M , les valeurs propres de M sont des racines de P .
- b. On suppose que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable et que $\text{Tr}(M) \times \det(M) \neq 0$.
- c. On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est toujours diagonalisable.
- d. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M .

70 CCINP PSI 2021 Julie Coheleach II

Soit E un espace de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de f .

- a. Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

- b. Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g .
- c. Montrer qu'il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à f et g .
- d. Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
- e. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

71 CCINP PSI 2021 Johan Haramboure II

- a. Énoncer le théorème de CAYLEY-HAMILTON pour une matrice carrée.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Soit, dans la suite de cet exercice, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- c. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire une expression par blocs de $P(M)$ si $P \in \mathbb{R}[X]$.
- d. Montrer que si M est diagonalisable alors A l'est aussi.
- e. Montrer que si M est diagonalisable alors $A = 0$.

72 CCINP PSI 2021 Clément Lérout II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le rang de B en fonction de celui de A .
- Exprimer χ_B en fonction de χ_A .
- Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A et B ?
- Montrer que A est inversible si et seulement si B l'est.
- Montrer que B est diagonalisable si on suppose A inversible.
- Est-ce que B est diagonalisable si A n'est plus supposée inversible ?
- Si B est diagonalisable, montrer que A l'est aussi.
- Si A est diagonalisable, montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible.

73 CCINP PSI 2021 Antonio Treilhou II

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $R(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Tr}(M^n)$ et $v_n = \text{Tr}(R(a, b)^n)$.

- Montrer que M est diagonalisable.
- Exprimer $R(a, b)$ en fonction de M et I_3 .
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite divergente à valeurs entières.
- Montrer qu'on peut choisir a et b de sorte que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

74 CCINP PSI 2021 Adeline Vaudrey II

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f a la même matrice A dans toutes les bases de E .

- Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, montrer que $PA = AP$.
- Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que $BA = AB$.
- En déduire la forme de la matrice A . Comment appelle-t-on l'endomorphisme f ?

75 Mines-Télécom PSI 2021 Juliette Maricourt II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice $A = (C_1 \quad \cdots \quad C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par ses colonnes et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Que dire de X si $\sum_{j=1}^n x_j C_j = 0$?

- Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sans calculer son polynôme caractéristique.

ORAUX 2022 THÈME 6

THÉORÈMES DE DOMINATION

76 Centrale Maths1 PSI 2021 Pierre-Issa Lacourte

Soit la fonction β définie par $\beta(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x dt$.

- a. Déterminer le domaine de définition I de β .
- b. Montrer que β est de classe C^1 sur I .
- c. Déterminer les limites de β aux bornes de I .

Questions de cours :

- Énoncer la formule de TAYLOR reste intégral.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , sans justifier sa dérivabilité, calculer la dérivée de $g : t \mapsto f(t^2, 2^t)$.

77 Centrale Maths1 PSI 2021 Yuan Le Guennic

- a. Montrer que $\forall u \in]-\infty; 1[, \ln(1-u) \leq -u$.
- b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

On admet que $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t) dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$ (intégrales de WALLIS).

- c. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

78 Mines PSI 2021 Mathilde Arnaud II

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t} dt$.

- a. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- b. Calculer $F'(x)$ et en déduire une expression simple de $F(x)$.

79 Mines PSI 2021 Thomas Boudaud I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$ et $Q_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{2n+1}{2p} X^p$.

- a. Déterminer les racines de P_n et Q_n .
- b. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$.
- c. Montrer que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\tan^2(x)} + 1$.
- d. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
- e. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ existe.
- f. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.
- g. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

80 Mines PSI 2021 Quentin Granier IV et Baptiste Pozzobon III et Raffi Sarkissian III

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

81 Mines PSI 2021 Adrien Guyot I

On considère $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$.

- Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
- Montrer que $F(0)$ existe et que F est continue en 0.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

82 Mines PSI 2021 Johan Haramboure II

On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ et $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- Montrer que f et g sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
- En déduire la valeur de l'intégrale de GAUSS $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

83 Mines PSI 2021 Alexandre Marque II

a. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt$ converge.

b. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1 + (2n+1)^2}$.

84 CCINP PSI 2021 Maxime Brachet II

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

- Trouver le domaine de définition D de F .
- Montrer que F est continue sur D .
- Montrer que F est de classe C^1 sur un intervalle I à préciser et donner une expression de $F'(x)$.
- À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\forall x \in I, F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt$.
- En déduire le sens de variations de F .
- Trouver la limite de F en $+\infty$.
- Étudier la limite de F en 1.

85 CCINP PSI 2021 Laurine Texier II

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{\text{ch}^n(t)}$.

- Montrer que la fonction I_n est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite à déterminer.
- La suite de fonctions $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?
- Donner une relation entre $I_{n+2}(x)$ et $I_n(x)$.
- En déduire la valeur, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}^n(t)}$.

86 CCINP PSI 2021 Antonio Treilhou I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$.

- a. Trouver le domaine de définition D de f .
- b. Montrer que f est continue sur D .
- c. Montrer que si $x \in D$, alors $1-x \in D$ et $f(1-x) = f(x)$.
- d. Déterminer des équivalents de f aux bornes de D .

87 CCINP PSI 2021 Adeline Vaudrey I

On considère $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$.

- a. Montrer que f est définie sur $[0; +\infty[$.
- b. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
- c. Montrer que $\forall x \geq 1$, $f(x) = xf(x-1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_{n-1}^n \ln(f(u)) du$. On souhaite étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$. On définit la fonction $\varphi : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \int_{x-1}^x \ln(f(u)) du$.

- d. Montrer que φ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.
- e. En déduire la limite de φ en $+\infty$. Conclure.

88 Mines-Télécom PSI 2021 Juliette Maricourt I

Pour $x \geq 0$, soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

- a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} dt$.
- b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- c. Montrer que f est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à déterminer.

ORAUX 2022 THÈME 7

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

89 X PSI 2021 Clément Lopez I

Soit $n \geq 1$ et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note H_k l'hyperplan d'équation $x_k = 0$ (k -ième coordonnée nulle dans la base canonique) et p_k la projection orthogonale sur H_k .

- a. Montrer que $\dim \left(\bigcap_{1 \leq i, j \leq n} \text{Vect}(v_i - v_j) \right) \leq n - 1$.
- b. Montrer qu'il existe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $p_k(v_1), \dots, p_k(v_n)$ sont eux aussi deux à deux distincts.

90 ENS Cachan PSI 2021 Robin De Truchis

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

On dit que A admet un pseudo-inverse s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

- $AB = BA$.
- $A = ABA$.
- $B = BAB$.

a. Supposons que $r = \text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$. Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$. En déduire qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$ telles que $A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

b. Montrer que A admet un pseudo-inverse si et seulement si $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$.

On suppose dans la suite que A admet un pseudo-inverse et que B est un "pseudo-inverse" de A . On note b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B .

- c. Montrer que $a \circ b$ est un projecteur dont on déterminera les sous-espaces caractéristiques.
- d. Montrer l'unicité de B .
- e. Montrer que B est un polynôme en A .

On suppose de plus que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont orthogonaux et on se donne un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$.

f. Montrer que le vecteur $v = b(y)$ est tel que :

- $f : x \mapsto \|a(x) - y\|$ est minimale en v .
- Si $w \neq v \in \mathbb{R}^n$ vérifie $f(w) = f(v)$, alors $\|w\| > \|v\|$.

91 *ENS Cachan PSI 2021* Antoine Faivre-Duboz

Soit un entier $n \geq 2$.

a. On pose dans cette question $B = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le spectre de B avec

les ordres de multiplicité de chacune des valeurs propres.

Soit dans la suite de l'exercice une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que l'on ait les conditions $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, i \neq j \implies a_{i,j} > 0$ et $\forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 0$.

b. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}), (AX|X) \leq 0$.

d. En déduire la plus grande valeur propre de A , qu'on note λ_1 , et donner son ordre de multiplicité.

e. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, on a $\|AX\|^2 \leq \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \right) \|X\|^2$.

f. En déduire une majoration de la valeur absolue des valeurs propres de A .

92 *Centrale Maths1 PSI 2021* Antoine Faivre-Duboz

Soit $n \in \mathbb{N}^*, d \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, a_{i,j} \in \{0,1\}$.
- A est symétrique et $\text{Tr}(A) = 0$.
- $A^2 - A + (d-1)I_n = J = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Soit a et b les deux racines de $X^2 - X + d - 1$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tV = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)$.

a. Montrer que les termes diagonaux de A sont nuls.

b. Montrer que $AV = dV$.

c. Trouver une relation donnant n en fonction de d .

d. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \{a, b, d\}$.

93 *Centrale Maths1 PSI 2021* Robin Gondeau

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et de sa norme associée.

Pour $\mu > 0$, on dit qu'une famille $(X_1, \dots, X_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ est μ -presque orthogonale si :

- $\forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, \|X_i\| = 1$.
- $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i X_i \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n a_i^2$.

a. Montrer que $(X_1, \dots, X_n)$ est orthonormée $\iff (X_1, \dots, X_n)$ est une famille 1-presque orthogonale.

b. Montrer que si $(X_1, \dots, X_n)$ est μ -presque orthogonale, alors $(X_1, \dots, X_n)$ est libre.

Soit $\mathcal{B} = (V_1, \dots, V_n)$ une famille libre. On note Q la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ et

$G = {}^tQQ$. On se donne un vecteur colonne $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $W = \sum_{i=1}^n a_i V_i$ et $B = PA$.

c. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $G = {}^tP\Delta P$ avec Δ diagonale à coefficients strictement positifs.

d. Déterminer un encadrement de $\|W\|^2$ en fonction des valeurs propres de G et de $\|B\|^2$.

e. En déduire que $\mathcal{B}$ est μ -presque orthogonale pour une valeur μ à déterminer.

94 Centrale Maths1 PSI 2021 Adrien Guyot

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.

- a. Montrer qu'il existe $R \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tRR$.
- b. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.
- c. Montrer que $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.

95 Centrale Maths1 PSI 2021 Paul Jaïs

Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = e^{-x^2}$.

On définit le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbb{R}[X]$ par $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$.

- a. Montrer que Φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier n , il existe un polynôme réel P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi^{(n)}(x) = P_n(x)\Phi(x)$. Quel est le degré de P_n ?
- b. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- c. Montrer que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.
- d. Montrer que P_n n'admet que des racines simples pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

96 Centrale Maths1 PSI 2021 Esteban Poupinet

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique avec sa base canonique $\mathcal{B}_0$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

On définit les deux endomorphismes p et q de E tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)$ et ${}^tA = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q)$.

- a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, (p(x)|y) = (x|q(y))$.
- b. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de E . Montrer que $\text{Tr}(q \circ p) = \sum_{k=1}^n \|p(v_k)\|^2$.
- c. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p)$.
- d. Dans le cas général, montrer que $\text{Tr}(q \circ p) \geq \text{Tr}(p)$.
- e. Montrer que $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p) \iff p$ est orthogonal.

97 Centrale Maths1 PSI 2021 Raffi Sarkissian

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est :

- orthodiagonalisable (ODZ) s'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O(n)$ telles que $M = PD{}^tP$.
- orthotrigonalisable (OTZ) s'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire et $P \in O(n)$ telles que $M = PT{}^tP$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $N(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

- a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit ODZ.
- b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que $N(\theta)$ soit OTZ.
- c. Montrer que M est OTZ si et seulement si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

98 Mines PSI 2021 Robin De Truchis I

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale p sur le plan $P : x+y+z = 0$.

99 Mines PSI 2021 Antoine Faivre-Duboz II

Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 3$ et $2 \leq p < n$.

Soit aussi une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\text{rang}(A) = p$. On pose alors $B = {}^tAA$.

- a. Montrer que B est une matrice inversible.
- b. Montrer que $P = AB^{-1}{}^tA$ est la matrice d'une projection de rang p .

100 *Mines PSI 2021* Antonio Treilhou I

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on considère une droite vectorielle D et un plan vectoriel P .

On note r une rotation d'angle $\theta \in]0; 2\pi[$ autour de la droite D et s la réflexion de plan P .

- a. On suppose dans cette question que $D \perp P$, montrer que $s \circ r = r \circ s$.
- b. Que peut-on dire si $s \circ r = r \circ s$?

101 *Mines PSI 2021* Sylvain Vigouroux II

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un vecteur unitaire de E .

On définit l'application $f : E \rightarrow E$ par $f(x) = (x|u)u + x \wedge u$.

- a. Montrer que f est une isométrie et la caractériser.
- b. Déterminer les endomorphismes g de E qui vérifient $g^2 = f$.

102 *CCINP PSI 2021* Maxime Brachet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M({}^tMM)^2 = I_n$.

- a. À l'aide du déterminant, montrer que la matrice M est inversible.
- b. Montrer que M est symétrique.
- c. En déduire que $M = I_n$.

103 *CCINP PSI 2021* Mehdi Hamdaoui II

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Sp}(M) = \{m_{1,1}, \dots, m_{n,n}\}$ (valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité).

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Les matrices A et B sont-elles dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$?
- b. L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- c. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) \lambda^2$. En déduire $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n$.
- d. Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$.

104 *CCINP PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -{}^tC \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

- a. Calculer tMM . En déduire que M est inversible.
- b. Montrer que $N = M^{-1}{}^tM$ est une matrice orthogonale.

105 CCINP PSI 2021 Juliette Maricourt II

Soit E un espace euclidien, $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes symétriques de E tels que $\sum_{k=1}^n \text{rang}(u_k) = \dim(E)$

et tels que $\forall x \in E, \sum_{k=1}^n (u_k(x)|x) = \|x\|^2$.

a. Montrer que l'endomorphisme $\left(\sum_{k=1}^n u_k\right) - \text{id}_E$ est diagonalisable.

b. En déduire que $\sum_{k=1}^n u_k = \text{id}_E$.

c. Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^n \text{Im}(u_k)$.

d. Montrer que $u_1, \dots, u_n$ sont des projecteurs orthogonaux.

106 CCINP PSI 2021 Esteban Poupinet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

a. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.

b. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

c. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

d. Si n est impair, montrer que A n'est pas inversible.

e. Montrer qu'il n'existe aucune matrice symétrique réelle non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

107 CCINP PSI 2021 Margot Reungoat II

Soit E un espace préhilbertien et p un projecteur de E .

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

108 CCINP PSI 2021 Laurine Texier I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A . On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x|f(y)) = -(f(x)|y)$.

b. Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(A)$. Qu'en déduit-on ?

c. Montrer que f induit sur $\text{Im}(f)$ un endomorphisme injectif. Qu'en déduit-on sur la dimension de $\text{Ker}(f)$?

d. On suppose dans cette question que $n = 3$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$

de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

109 Mines-Télécom PSI 2021 Margot Reungoat I (sur 6 points)

a. Soit E un espace euclidien, x un vecteur de E et F un sous-espace vectoriel de E . Rappeler la définition de la distance de x à F et exprimer sa valeur avec une projection orthogonale.

Dans la suite de cet exercice, on prend $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$ et $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

b. Donner une base orthonormale de F .

c. On prend $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $d(M, F)$.

ORAUX 2022 THÈME 8

PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

110 *ENS Cachan PSI 2021* Aloïs Doucet

On note G un graphe non orienté, S l'ensemble de ses sommets (numérotés de 1 à n). Chaque sommet peut être relié aux autres, la probabilité d'une liaison est $p \in]0; 1[$.

Soit x et y deux sommets distincts de ce graphe, on note $T_{x,y} = 1$ si une arête existe entre x et y et $T_{x,y} = 0$ sinon : la variable aléatoire $T_{x,y}$ suit donc une loi de BERNOULLI de paramètre p .

On note Z le nombre de sommets isolés (aucune arête ne part de ce sommet).

- a. On a n sommets, combien a-t-on d'arêtes ?
- b. On prend un sommet, quelle est la loi régissant le nombre d'arêtes issues de ce sommet ?
- c. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = n(1-p)^{n-1}$.
- d. Montrer que $\mathbb{P}(Z=0) \leq \frac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2}$. Indication : on pourra utiliser $\tilde{Z} = Z - \mathbb{E}(Z)$.

On suppose dorénavant que $p = c \frac{\ln(n)}{n}$ avec $c > 0$.

- e. Comportement asymptotique de $\mathbb{E}(Z)$ quand n tend vers $+\infty$ en fonction de c .
- f. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(Z=0)$ si $c > 1$ quand n tend vers $+\infty$?
- g. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(Z=0)$ si $c < 1$ quand n tend vers $+\infty$?

111 *ENS Cachan PSI 2021* Robin Gondeau

On dit qu'une matrice carrée est simple lorsque toutes les multiplicités de ses valeurs propres valent 1.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle que l'on écrit $M = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que si M n'est pas simple, alors b est orthogonal à un vecteur propre de A . On suppose dans la suite de l'exercice que M n'est pas simple.

- a. Montrer qu'il existe une valeur propre λ de M et un vecteur propre $v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ de M associé à λ tel que $v_{n+1} = 0$.
- b. Montrer que cette valeur propre λ de M appartient aussi au spectre de A .

Soit $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & -1 & X_5 & X_2 \\ 0 & X_5 & 1 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ où X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes

qui suivent la loi de BERNOULLI de paramètre $p \in]0; 1[$.

On note aussi B l'évènement $B = "N \text{ est simple}"$.

- c. Montrer que $\mathbb{P}(B) \geq 3p^3 - 2p^4$.

112 *ENS Cachan PSI 2021* Paul Jaïs et Pierre-Issa Lacourte

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n le groupe des permutations de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ (les bijections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$). On définit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $d_0 = 1$ et, si $n \geq 1$, d_n est le nombre de permutations σ de S_n n'ayant aucun point fixe.

a. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe, on pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_{n-k}$.

Trouver u_n en fonctions des termes de la suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$. Indication : commencer par $n = 2$, $n = 3$.

b. Calculer d_n en fonction de n .

On considère une urne avec n boules numérotées de 1 à n et on effectue n tirages sans remise en notant $a_1, \dots, a_n$ les numéros des boules dans l'ordre. Soit $\sigma : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$ la permutation définie par $\sigma(k) = a_k$ associée à cette expérience aléatoire.

c. Montrer que σ suit la loi uniforme sur S_n .

d. Soit Q une partie de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on pose $\mathbb{1}_Q$ la fonction indicatrice de Q , c'est-à-dire $\mathbb{1}_Q : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\mathbb{1}_Q(\omega) = 1$ si $\forall i \in Q, \sigma(\omega)(i) = i$ et $\sigma(\omega)(i) = 0$ sinon. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_Q$.

Soit F la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes de σ . On note f sa fonction génératrice.

e. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\binom{F}{j}$ pour $j \in \mathbb{N}$.

f. Déterminer complètement f .

g. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(F = k)$.

113 *ENS Rennes PSI 2021* Raffi Sarkissian

Soit $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc...) et, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

a. Soit $s > 1$, pour quels valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\lambda n^{-s})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ par l'intermédiaire de $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(\{n\}) = \lambda n^{-s}$?

b. Soit $s > 1$, pour λ trouvé à la question a., soit X une variable aléatoire suivant la loi Q_s précédente : c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = n) = \lambda n^{-s}$. Pour quelles valeurs de s la variable X admet-elle une espérance finie ?

c. Pour p nombre premier, on pose $A_p = p \mathbb{N}^*$. Montrer que les $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité précédente.

d. En déduire que $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-s}}$ qu'on note $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$.

e. Est-ce que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge ?

114 ENS Cachan PSI 2021 Guillaume Touly

On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui suivent toutes une loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$ et qui sont mutuellement indépendantes.

- On définit T tel que $T = n$ si n est le plus petit entier tel que $X_n = 0$ et $T = +\infty$ s'il n'existe aucun entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $X_p = 0$.
 - On définit T' tel que $T' = n$ si n est le plus petit entier strictement positif tel que $X_n = X_{n-1} = 1$ et $T' = +\infty$ s'il n'existe aucun entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_p = X_{p-1} = 1$.
- a. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(T = n)$ et $\mathbb{P}(T > n)$.
 - b. Calculer $\mathbb{P}(T = +\infty)$.
 - c. Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.
 - d. Calculer $\mathbb{P}(T' = k)$ pour $k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$.
 - e. Montrer, pour $n \geq 2$, que $\mathbb{P}(T' > n) \leq \frac{3\mathbb{P}(T' > n-2)}{4}$.
 - f. Montrer que T' est presque sûrement finie ; c'est-à-dire que $\mathbb{P}(T' = +\infty) = 0$.
 - g. Montrer, pour $n \geq 2$, que $\mathbb{P}(T' = n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T' = n-1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(T' = n-2)$.
 - h. Montrer que T' est d'espérance finie et calculer cette espérance (sans calculer $\mathbb{P}(T' = n)$).

115 Centrale Maths1 PSI 2021 Antoine Greil II

- a. Énoncer puis démontrer l'inégalité de MARKOV.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, majorer la quantité $\mathbb{P}\left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right)$.

116 Mines PSI 2021 Maëva Berland I

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi de BERNOULLI de paramètre $p \in]0; 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_{n-1}X_n$ et $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

- a. Donner la loi de Y_n .
- b. Exprimer la covariance $Y_i Y_j$ si $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Les Y_n sont-ils deux à deux indépendants ?
- c. Donner une majoration de $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.
- d. La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ vérifie-t-elle les hypothèses de la loi des grands nombres ? Satisfait-elle ses résultats ?

117 Mines PSI 2021 Maxime Brachet I

Pierre et Marie jouent à un jeu. Ils effectuent une série de parties indépendantes. Pierre gagne avec une probabilité p et Marie avec une probabilité $q = 1 - p$. À l'issue de la partie, il y a forcément un gagnant.

On note a_{2n} la probabilité pour qu'il y ait égalité des parties gagnées à l'issue de la $2n$ -ième partie.

Et b_{2n} la probabilité pour que la première égalité arrive à la $2n$ -ième partie.

On note $A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n}x^{2n}$.

- a. Exprimer a_{2n} en fonction de n .
- b. Quel est le rayon R_a de $\sum_{n \geq 0} a_{2n}x^{2n}$?
- c. Donner une condition sur p pour que $A(1)$ existe.
- d. Montrer que $A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1$.
- e. Relier A et B . En déduire $B(x)$.
- f. Donner la probabilité η pour qu'il n'y ait jamais égalité du nombre de parties gagnées.

118 *Mines PSI 2021* Clotilde Cantini I

On appelle au téléphone n personnes (numérotées de 1 à n) par vague de façon indépendante sachant qu'une personne répond avec une probabilité $p \in]0; 1[$. On définit les variables aléatoires suivantes :

- X_1 représente le nombre de personnes ayant répondu pendant la première vague.
 - X_2 est le nombre de personnes ayant répondu parmi les $n - X_1$ contactées lors de la deuxième vague.
 - En général, si $k \geq 3$, X_k correspond au nombre de personnes parmi les $n - X_1 - X_2 - \dots - X_{k-1}$ ayant été appelées lors de la k -ième vague d'appels.
 - Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note Y_i le numéro de la vague pendant laquelle la personne numéro i a répondu.
 - Pour $k \geq 1$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$ est le nombre de personnes ayant répondu lors des k premières vagues.
 - N est le nombre de vagues d'appels nécessaires à ce que toutes les personnes décrochent.
- a. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
- b. Donner les lois de X_1 et X_2 et la loi de Y_k .
- c. Donner la loi de X_k pour tout entier $k \geq 3$.
- d. Donner la loi de S_k .
- e. Donner la loi de N . En déduire l'espérance de N .

119 *Mines PSI 2021* Quentin Granier III

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

On choisit de manière équiprobable une permutation dans S_n et on note F son nombre de points fixes.

Calculer l'espérance de F et sa variance.

120 *Mines PSI 2021* Antoine Greil I

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > n - 1) > 0$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \mathbb{P}(X = n | X > n - 1)$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0; 1[$ et $\mathbb{P}(X > n - 1) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - u_k)$.

b. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Réciproquement, soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \in [0; 1[$ et telle que $\sum_{n \geq 1} v_n$ diverge.

c. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait la relation $\mathbb{P}(Y > n - 1) > 0$ et $\mathbb{P}(Y = n | Y > n - 1) = v_n$.

121 *Mines PSI 2021* Clément Lopez II

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui vérifient $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Si $A = \{n \in \mathbb{N}^* | S_n = 0\}$ est vide, on pose $R = +\infty$, sinon on pose $R = \min(A)$.

On pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n$ et $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n)x^n$ en cas de convergence.

a. Montrer que F et G sont de classe C^∞ sur $] -1; 1[$ et que G est continue sur $[-1; 1]$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, montrer que $\mathbb{P}(S_n = 0, R = k) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0) \mathbb{P}(R = k)$.

En déduire que $\forall x \in] -1; 1[$, $F(x)G(x) = F(x) - G(x)$.

c. Montrer que $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

d. En déduire que $\forall x \in] -1; 1[$, $G(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

e. Calculer $\mathbb{P}(R = +\infty)$.

122 Mines PSI 2021 Arthur Riché I

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur effectue 5 tirages dans cette urne.

On compte les points comme suit :

- une boule blanche tirée rapporte 2 points (+2 points).
- une boule noire tirée fait perdre 3 points (−3 points).

On définit les variables aléatoires X et Y comme suit :

- X qui est le nombre de boules blanches tirées.
- Y qui est le nombre de points obtenus (somme de +2 et de −3).

Dans les deux prochaines questions, les cinq tirages se font avec remise.

- Trouver la loi de X , son espérance et sa variance.
- Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

Dans les deux questions suivantes, les cinq tirages s'effectuent sans remise.

- Trouver la loi de X , son espérance et sa variance.
- Déterminer la loi de Y .

123 Mines PSI 2021 Raffi Sarkissian I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de

BERNOULLI de paramètre $p \in]0; 1[$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $M = U^t U$ et $S = {}^t V M V$.

- Quelles lois suivent les variables aléatoires $\text{rang}(M)$ et $\text{Tr}(M)$?
- Quelle est la probabilité que M soit un projecteur ?
- Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$. Indication : on pourra commencer par le cas $n = 2$.

124 CCINP PSI 2021 Julie Coheleach I

Le nombre d'enfants N suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$. La probabilité qu'un enfant soit une fille est $p \in]0; 1[$. On note X le nombre de filles.

- Donner la loi de probabilité du couple (N, X) .
- Donner la loi de X .

125 CCINP PSI 2021 Mehdi Hamdaoui I

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui suivent la même loi, qui admettent une espérance et une variance finies, et telles que $Z = X + Y + 1$ suive la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

- Déterminer, en fonction de p , l'espérance et la variance de X .
- Trouver la fonction génératrice de X .
- Déterminer la loi de X .

126 CCINP PSI 2021 Pierre-Issa Lacourte I

On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3. On effectue des tirages mutuellement indépendants avec remise d'un seul jeton à la fois. On note :

- Y le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois deux numéros différents.
- Z le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois les trois numéros.

- Déterminer la loi de Y .
- Identifier la loi de $Y - 1$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
- Déterminer la loi du couple (Y, Z) .
- En déduire la loi de Z ainsi que $\mathbb{E}(Z)$.

127 CCINP PSI 2021 Alexandre Marque et Adèle Robert I

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = J - I_3$.

On note A, B, C trois points distincts du plan sur lesquels une puce peut se déplacer selon la règle suivante :

- La puce est initialement en A (à l'instant 0).
- À chaque tour, elle change de point de manière équiprobable.

On pose $A_n = \text{“la puce est en A au temps } n\text{”}$, $B_n = \text{“la puce est en B au temps } n\text{”}$, $C_n = \text{“la puce est en C au temps } n\text{”}$. On pose enfin, pour tout entier n , le vecteur colonne $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}$.

- Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .
- Montrer que M est diagonalisable. Donner ses sous-espaces propres. En déduire M^n .
- Trouver un polynôme annulateur P de J . Trouver le reste de la division euclidienne de $(X - 1)^n$ par P . En déduire la valeur de M^n d'une autre manière que celle de la question précédente.
- Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- Que dire de cette limite si on ne connaît pas U_0 ?

128 CCINP PSI 2021 Margot Reungoat I

On dispose de $n \geq 2$ urnes numérotées de 1 à n . Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, dans l'urne numérotée k , on a k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard et une boule dans cette urne. On définit :

- X_n le numéro de l'urne choisie.
- Y_n le numéro de la boule obtenue.

- Déterminer la loi du couple (X_n, Y_n) .
- En déduire la loi de Y_n (sous forme de somme).
- Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$.
- Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

ORAUX 2022 THÈME 9

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

129 *ENS Cachan PSI 2021* Julien Gombert et Quentin Granier

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, une fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et une fonction $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\forall x \in [a; b]$, $v(x) = (x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in \mathcal{U}$. Soit aussi une fonction $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(a) = g(b) = 0$. On pose, pour un réel t et $x \in [a; b]$, $\varphi_t(x) = \varphi(x) + tg(x)$ et $v_t(x) = (x, \varphi_t(x), \varphi'_t(x))$. On pose aussi $I_{\varphi_t} = \int_a^b f(v_t(x)) dx$.

- a. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [-\alpha; \alpha]$, $v_t(x) \in \mathcal{U}$.
- b. Montrer que $h : t \mapsto I_{\varphi_t}$ est dérivable en 0 et que $h'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(v(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x)) \right) \right] g(x) dx$.
- c. On suppose que pour toute $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses précédentes, l'application $h : t \mapsto I_{\varphi_t}$ admet un extremum local en 0. Montrer que φ est solution d'une équation différentielle à déterminer.

130 *ENS Cachan PSI 2021* Baptiste Pozzobon II

Soit l'équation différentielle (E) : $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$. On cherche les solutions y de (E) développables en série entière sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et qui vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

- a. Déterminer les coefficients a_n .
- b. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
- c. Donner le développement en série entière de Arctan .
- d. Exprimer y vérifiant les hypothèses à l'aide de fonctions usuelles.
- e. Quel est le domaine de validité de y en tant que solution de (E) ?
- f. Y a-t-il unicité de y vérifiant les hypothèses ?

131 *Centrale Maths1 PSI 2021* Julie Coheleach

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base orthonormée directe canonique dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique.

Soit S la surface d'équation $z = g(x, y)$ avec $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On considère aussi l'équation aux dérivées partielles (E) : $2 \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

On dit que $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifie la propriété (P) si, au niveau des points réguliers de S , la normale à la surface S est orthogonale au vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

- a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour qu'elle vérifie la propriété (P).
- b. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (x - 2y, y)$ est inversible et donner son inverse ψ .
- c. Pour $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on pose $h = g \circ \psi$. Montrer que h est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
- d. Résoudre (E).

132 *Centrale Maths1 PSI 2021* Robin De Truchis

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On définit $f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_A(X) = (X|AX)$.

Pour $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit $g_Z : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $g_Z(X) = {}^tZAX - f_A(X)$.

a. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \iff (\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0)$.

b. Montrer que g_Z admet un extremum absolu atteint en $A^{-1}Z$.

133 *Centrale Maths1 PSI 2021* Yohan Haramboure

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite harmonique sur $D \subset \mathbb{R}^2$ si $\forall (x, y) \in D, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

Soit $u : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $u_n(x, y) = \frac{(-1)^n (x + iy)^n}{(2n)!}$.

a. Trouver u pour que $g : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = u(x^2 + y^2)$ soit harmonique sur U .

b. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, y)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

c. Montrer que $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

134 *Centrale Maths1 PSI 2021* Clément Lopez

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et l'équation différentielle $(E_n) : x^2 y'' + xy' - n^2 y = 0$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$. On définit $\tilde{f} : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{g} : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et $\tilde{g}(r, \theta) = g(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $r > 0$, on pose $c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$.

a. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelles sont les fonctions $u : t \mapsto t^\alpha$ qui sont solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$?

En déduire la résolution complète de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver une relation entre $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}$ d'une part, et entre $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}$ d'autre part.

c. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall r > 0, c_n(r) = a_n r^{|n|}$.

135 *Mines PSI 2021* Antoine Faivre-Duboz I

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt$ si $x \neq y$ et $g(x, x) = f(x)$.

On définit aussi la partie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que g est de classe C^1 sur D et donner ses dérivées partielles.

b. Montrer que g admet des dérivées partielles d'ordre 1 au point (a, a) et que $\frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{\partial g}{\partial y}(a, a) = \frac{f'(a)}{2}$.

c. Montrer que $\forall (x, y) \in D, \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt$.

d. En déduire que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

136 *Mines PSI 2021* Paul Jaïs II

a. Résoudre $(E) : x^2 y'' - 6xy' + (12 + x^2)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indication : on pourra chercher des solutions y de (E) développables en série entière sur $]0; r[$.

b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

137 Mines PSI 2021 Yuan Le Guennic II

Soit $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une solution sur $\mathbb{R}_+$ de (E) : $y'' + (1+u)y = 0$.

On définit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)dt$.

- a. Trouver une équation différentielle vérifiée par g .
- b. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq c + \int_0^x |u(t)| |f(t)| dt$.
- c. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

138 Mines PSI 2021 Baptiste Pozzobon II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $x \neq y$ et $f(0, 0) = 0$.

- a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- c. Calculer les dérivées partielles seconde de f en $(0, 0)$.
- d. Qu'en déduire sur la fonction f ?

139 Mines PSI 2021 Guillaume Touly I

- a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

Résoudre (E) : $y' + fy = g$ avec $y(a) = b$. Y a-t-il unicité de la solution ?

- b. Soit $\alpha > 0$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Résoudre (E) : $y' - \alpha y = h$. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) qui soit bornée sur $\mathbb{R}_+$.

140 CCINP PSI 2021 Esteban Poupinet I

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et telle que f soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.

- a. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f' et f'' sont développables en série entière.
- b. Montrer qu'il existe $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$.
- c. En déduire une solution de (E) sur $] -1; 1[$.
- d. Puis toutes les solutions de (E) sur $] -\infty; 0[$, $] 0; 1[$ et $] 1; +\infty[$.

141 Mines-Télécom PSI 2021 Margot Reungoat II (sur 14 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$.

- a. Montrer que $y_0 : x \mapsto \sin(x) \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

- b. Montrer que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}dt$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- c. Montrer que $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- d. Soit deux fonctions $a, b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ayant des limites finies ℓ_a et ℓ_b respectivement en $+\infty$. Montrer que $f : x \mapsto a(x) \cos(x) + b(x) \sin(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\ell_a = \ell_b = 0$.

- e. En déduire la solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie en $+\infty$.