



PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2021 / 2022



TABLE DES MATIÈRES

- 1 : intégrales et analyse (8 exercices)	page 3
- 2 : algèbre linéaire et générale (12 exercices)	page 5
- 3 : séries numériques, séries de fonctions, séries entières (23 exercices)	page 7
- 4 : espaces vectoriels normés, courbes, dérivabilité (7 exercices)	page 12
- 5 : réduction des endomorphismes (25 exercices)	page 14
- 6 : théorèmes de domination (13 exercices)	page 20
- 7 : espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens (21 exercices)	page 23
- 8 : probabilités et variables aléatoires (19 exercices)	page 28
- 9 : équations différentielles et calcul différentiel (13 exercices)	page 34

ORAUX 2022 THÈME 1

INTÉGRALE ET ANALYSE

1 Méthode 1 : Comme f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a $ff' = O(f)$ donc, comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que ff' est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction ff' est intégrable aussi sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison. Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)dt$ converge ce qui garantit l'existence d'une limite finie de $\int_0^x f(t)f'(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$. On peut donc poser $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) \geq 0$ car $\int_0^x f(t)f'(t)dt = \left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x = \frac{f^2(x)}{2} - \frac{f^2(0)}{2}$. Comme f est positive, $f(x) = \sqrt{f^2(x)}$ donc, par continuité de la fonction racine, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\ell}$. Mais comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on sait d'après le cours que ceci impose $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ comme attendu.

Méthode 2 : supposons que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$. En niant $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq a, 0 \leq f(x) \leq \varepsilon$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout réel $a \geq 0$, il existe $x > a$ tel que $f(x) > \varepsilon$. On crée une suite de points $(x_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante :

- avec $a = \frac{1}{2}$, il existe $x_0 > \frac{1}{2}$ tel que $f(x_0) > \varepsilon$.
- soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les réels positifs $x_0, \dots, x_n$ soient définis, alors on prend $a = 1 + x_n \geq 0$ et il existe $x_{n+1} > 1 + x_n$ tel que $f(x_{n+1}) > \varepsilon$.

Par construction, on a défini une suite strictement croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n > 1$ et $f(x_n) > \varepsilon$. Par une récurrence simple, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq M$. D'après le théorème des accroissements finis, $|f(x) - f(x_n)| \leq M|x - x_n|$ donc $f(x) = f(x) - f(x_n) + f(x_n) > \varepsilon - M|x - x_n|$ donc $f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $|x - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Posons $\alpha = \min\left(\frac{\varepsilon}{2M}, \frac{1}{2}\right) > 0$, on a donc $\forall x \in [x_n - \alpha; x_n + \alpha], f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$. Par construction,

les segments $[x_n - \alpha; x_n + \alpha]$ ne se chevauchent pas car $\alpha \leq \frac{1}{2}$. On en déduit, puisque f est positive, que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{x_n + \alpha} f(t)dt \geq \sum_{k=0}^n \left(\int_{x_k - \alpha}^{x_k + \alpha} f(t)dt \right) \geq (n+1)(2\alpha)(\varepsilon/2) = (n+1)\alpha\varepsilon$ (I). Or la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est croissante et elle tend vers $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ par hypothèse ce qui est contredit par l'inégalité (I) qui prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{x_n + \alpha} f(t)dt = +\infty$.

On a donc prouvé par l'absurde que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Comme $f_\alpha(t) \sim t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$, la fonction f_α est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $-\alpha < 1 \iff \alpha > -1$ par comparaison et par le critère de RIEMANN (en 0^+).
- Comme $f_\alpha(t) \sim t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, f_α est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $1 - \alpha > 1 \iff \alpha < 0$ par comparaison et par le critère de RIEMANN (en $+\infty$).

Ainsi, f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha \in]-1; 0[$. Et comme f_α est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ converge si et seulement si f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \in]-1; 0[$.

3 a. Si $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t \sin(xt)}{1+t^2}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc y est intégrable et $f(0)$ existe.

L'existence de $f(x)$ et celle de $f(-x)$ sont équivalentes par imparité de la fonction $\sin$ et, en cas de convergence, on aura $f(-x) = -f(x)$ donc f est une fonction impaire sur son ensemble de définition.

Soit $x > 0$, posons $u : t \mapsto -\frac{\cos(xt)}{x}$ et $v : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, comme $u'(t) = \sin(xt)$ et $v'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$ sont de même nature et, en cas de convergence, on aura $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$. Or $g_x : t \mapsto \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ceci montre l'existence de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f est définie et impaire sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$.

b. Pour $x > 0$, puisque $f(x)$ existe, on effectue le changement de variable $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x} \cdot \frac{\sin(u)}{1+\frac{u^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} du = \int_0^{+\infty} \frac{u \sin(u)}{x^2 + u^2} du$.

Ainsi, $f(x) - I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x^2 + u^2} - \frac{1}{u} \right) \sin(u) du = -x^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u(x^2 + u^2)} du$. Comme on sait que $|\sin(u)| \leq u$ et que la fonction $u \mapsto \frac{1}{x^2 + u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut majorer par inégalité de la moyenne et $0 \leq I - f(x) \leq x^2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{x^2 + u^2} = x^2 \left[\frac{1}{x} \operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{x}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi x}{2}$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I$.

Comme $|\cos(xt)| \leq 1$ et que la fonction $t \mapsto \frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, encore une fois par inégalité de la moyenne, avec l'expression vue en **a.**, on a $|f(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2} dt$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge d'après l'énoncé, on peut utiliser CHASLES pour l'écrire sous la forme $I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on effectue le changement de variable $t = u + k\pi = \varphi_k(u)$ dans $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ avec φ_k de classe C^1 sur le segment $[0; \pi]$ pour avoir $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u + k\pi)}{u + k\pi} du$. Or $\sin(u + k\pi) = (-1)^k \sin(u)$ ce qui donne bien $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$. Finalement, on a bien une expression de I sous forme de somme de série numérique : $I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$.

d. Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$. Alors $u_k > 0$ car $\sin$ est strictement positif sur $]0; \pi[$ et que $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u + k\pi}$ est continue sur $[0; \pi]$. Comme $\forall u \in [0; \pi]$, $\frac{\sin(u)}{u + (k+1)\pi} \leq \frac{\sin(u)}{u + k\pi}$, on obtient $u_{k+1} \leq u_k$ par croissance de l'intégrale. De plus, si $k \geq 1$, il vient $0 \leq u_k \leq \int_0^\pi \frac{1}{k\pi} du$ en majorant $\sin(u)$ par 1 et en minorant $u + k\pi$ par $k\pi$. Ainsi, $0 \leq u_k \leq \frac{1}{k}$ donc, par encadrement, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$. Comme la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, le critère spécial des séries alternées montre que $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ converge. On le savait déjà d'après la question précédente. Mais il dit aussi que les sommes partielles consécutives constituent un encadrement de la somme I . Ainsi, pour tout entier n , en notant $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$, on a

la double inégalité $S_{2n+1} \leq I \leq S_{2n}$. En particulier, $u_0 - u_1 \leq I \leq u_0$ donc $I \geq u_0 - u_1$. Or, en écrivant $u_0 - u_1 = \int_0^\pi \sin(u) \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+\pi} \right) du = \int_0^\pi \frac{\pi \sin(u)}{u(u+\pi)} du$, comme $u \mapsto \frac{\pi \sin(u)}{u(u+\pi)}$ est continue, positive et non nulle sur $[0; \pi]$, on a $u_0 - u_1 > 0$ donc $I > 0$.

Comme $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I > 0$, la fonction f n'est pas continue en 0. On sait que l'intégrale de DIRICHLET vaut $I = \frac{\pi}{2}$ mais c'est une autre histoire.

- ④ a. Les fonctions $u : t \mapsto \lambda t + \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lambda$ donc, par intégration par parties, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t + \cos(t)}{t^2} dt$. Or $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et $\frac{\cos(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est absolument convergente et, même si $t \mapsto \frac{\lambda t}{t^2} = \frac{\lambda}{t}$ est continue sur $[1; +\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t} dt$ ne converge que si $\lambda = 0$ d'après RIEMANN. Ainsi, par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge si et seulement si $\lambda = 0$.

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet au moins une primitive, on note F celle qui s'annule en 0. De plus, f est continue sur le segment $[0; T]$ donc elle y est bornée, et étant périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Méthode 1 : notons $M = \|f\|_{\infty, \mathbb{R}}$. Soit $t \geq 0$ et $n = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor$ de sorte que $n \leq \frac{t}{T} < n+1$ donc $nT \leq t < (n+1)T$.

Par CHASLES, $F(t) = \int_0^t f(u) du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(u) du + \int_{nT}^t f(u) du$. Posons $I = \int_0^T f(u) du$, ce qui donne $F(t) = nI + \int_{nT}^t f(u) du$. Par inégalité de la moyenne, on a $\left| \int_{nT}^t f(u) du \right| \leq \int_{nT}^t M du = M(t - nT) \leq MT$ et on a donc $F(t) = nI + O(1)$. L'inégalité $nT \leq t < (n+1)T$ montre que $t - nT = O(1)$ donc $n = \frac{t}{T} + O(1)$. Posons $m = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du = \frac{I}{T}$ qui représente la moyenne de la fonction f sur une période, de sorte que ce qui précède s'énonce $F(t) = \frac{1}{T}t + O(1) = mt + O(1)$.

Méthode 2 : posons $m = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du = \frac{F(T)}{T}$, $g : x \mapsto F(x) - mx$ et $h : x \mapsto g(x+T) - g(x)$. Comme F est dérivable par le théorème fondamental de l'intégration, g et h le sont aussi et on a $h'(x) = g'(x+T) - g'(x)$ donc $h'(x) = F'(x+T) - m - F'(x) + m = f(x+T) - f(x) = 0$ par hypothèse. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est constante et $h(0) = g(T) - g(0) = F(T) - F(0) = 0$ donc h est nulle sur $\mathbb{R}$. g est donc T -périodique et, comme avant puisque g est continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $F(x) \underset{+\infty}{\sim} mx + O(1)$.

Les fonctions $u : t \mapsto \lambda t - F(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ car $u(t)v(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$. Par intégration par parties, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t - F(t)}{t^2} dt$. La fonction $t \mapsto \frac{\lambda t - F(t)}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et, comme $\frac{\lambda t - F(t)}{t^2} = \frac{(\lambda - m)}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après ce qui précède, il vient $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge si et seulement si $\lambda = m$.

- ⑤ a. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geq 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $a < b$ tels que $h(a) = h(b)$ et on aurait $\forall x \in [a; b]$, $h'(x) = 0$, ce qui est impossible car f' ne s'annule qu'en

les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c \in]0; 1[$ tel que $h(c) = 0$ donc un unique point fixe c de $\cos$ sur $\mathbb{R}$. On trouve numériquement $c \sim 0,74$.

b. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. En appliquant f , on obtient $f \circ f \circ f = f \circ \cos$ donc $\cos \circ f = f \circ \cos$ ce qui, en c , devient $f(c) = \cos(f(c))$. D'après l'unicité montrée à la question **a.**, on en déduit que $f(c) = c$. Si on dérive $f \circ f = \cos$, on obtient $f' \times (f' \circ f) = -\sin$ ce qui, en c , devient $f'(c)^2 = -\sin(c) < 0$ car, comme $c \in]0; 1[\subset]0; \pi[$, on a $\sin(c) > 0$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$. Comme en **b.**, on a $f(c) = c$. Si f n'était pas injective sur $[0; 1]$, alors il existerait deux réels x et y tels que $0 \leq x < y \leq 1$ et $f(x) = f(y)$ et on aurait $f \circ f(x) = f \circ f(y) = \cos(x) = \cos(y)$ et la fonction $\cos$ ne serait pas injective sur $[0; 1]$. NON !

Ainsi, f est injective sur $[0; 1]$ donc, par continuité, elle y est strictement croissante ou strictement décroissante. Comme f est continue en c , il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [c - \alpha; c + \alpha]$, $0 \leq f(x) \leq 1$ (il suffit de prendre $\varepsilon = \min(c, 1 - c) \sim 0,26 > 0$ dans $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$). On aurait donc, comme f est strictement monotone sur $[c - \alpha; c + \alpha]$ et que $f([c - \alpha; c + \alpha]) \subset [0; 1]$, intervalle sur lequel f est aussi strictement monotone (la même monotonie) et, par composée, la fonction $f \circ f = \cos$ serait strictement croissante sur $[c - \alpha; c + \alpha]$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

6

7 La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1 + m \sin^2(t)}$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + m \sin^2(t)}$ existe.

Soit maintenant f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et, puisque $\sin^2(t) = \frac{\tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}$, on en déduit que, pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(t) = \frac{1}{1 + m \sin^2(t)} = \frac{1}{1 + m \frac{\tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}} = \frac{1 + \tan^2(t)}{1 + (m + 1) \tan^2(t)}$. Or $\varphi : t \mapsto \tan(t)$ est une bijection

strictement croissante et C^1 de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(t) = 1 + \tan^2(t)$, donc par changement de variable,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (m + 1)u^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{m + 1}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{m + 1} u) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{m + 1}}. \text{ Il y avait d'autres questions.}$$

8

ORAUX 2022 THÈME 2

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

- 9 L'ensemble $E_{d,n}$ est fini car $E_{d,n} \subset \llbracket 0;n \rrbracket^d$ qui est lui-même un ensemble fini. En associant à un d -uplet $I = (i_1, \dots, i_d) \in E_{d,n}$ la suite de symboles $1111 + 1 + 11 + \dots + 111$ où on a remplacé i_1 par i_1 fois le symbole 1 (par exemple on associe la suite $111 + 1 + 11 + 1111$ à $(3, 1, 2, 4) \in E_{4,10}$), on crée une bijection (le vérifier) entre $E_{d,n}$ et ces suites de symboles. Mais une telle suite de $n + d - 1$ symboles contient n fois 1 et $d - 1$ fois +, donc il y en a $\binom{n+d-1}{d-1}$, ce qui prouve que $\text{card}(E_{d,n}) = \binom{n+d-1}{d-1}$.

Nous allons montrer, à d fixé et par récurrence sur l'entier n , que $(f_I)_{I \in E_{d,n}}$ est libre dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Initialisation : si on prend $n = 0$, $E_{d,n}$ ne contient que le d -uplet $I_0 = (0, \dots, 0)$ donc, comme la fonction $f_{I_0} : (x_1, \dots, x_d) \mapsto \prod_{k=1}^d x_k^{i_k} = 1$ n'est pas nulle, la famille (f_{I_0}) est libre.

Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons $(f_I)_{I \in E_{d,n}}$ est libre. Soit $(\lambda_I)_{I \in E_{d,n+1}}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{I \in E_{d,n+1}} \lambda_I f_I = 0$. Ceci signifie que $\forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{I \in E_{d,n+1}} \lambda_I \prod_{k=1}^d x_k^{i_k} = 0$ (1). Pour tout $m \in \llbracket 1;d \rrbracket$, on

dérive (1) partiellement par rapport à x_m pour avoir $\forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{\substack{I \in E_{d,n+1} \\ i_m \geq 1}} i_m \lambda_I x_m^{i_m-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^d x_k^{i_k} = 0$.

Or, si $I = (i_1, \dots, i_d) \in E_{d,n+1}$ avec $i_m \geq 1$, on a $(i_1, \dots, i_{m-1}, i_m - 1, i_{m+1}, \dots, i_d) \in E_{d,n}$ donc, par hypothèse de récurrence, $\lambda_I = 0$ car $(f_I)_{I \in E_{d,n}}$ est libre et que toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Si $I = (i_1, \dots, i_d) \in E_{d,n+1}$, comme $i_1 + \dots + i_d = n + 1 \geq 1$, il existe un entier $m \in \llbracket 1;d \rrbracket$ tel que $i_m \geq 1$, d'après ce qui précède, $\lambda_I = 0$. Ainsi, $\forall I = (i_1, \dots, i_d) \in E_{d,n+1}$, $\lambda_I = 0$ donc $(f_I)_{I \in E_{d,n+1}}$ est libre.

Par principe de récurrence, $\forall (d, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $(f_I)_{I \in E_{d,n}}$ est une famille libre. Il devait y avoir une suite.

- 10 Analyse : soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice telle que S_A soit fini. Soit, pour $(u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, la matrice inversible $P = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$, alors la matrice $M = PAP^{-1} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans S_A et, par calcul, on a $m_{i,j} = \frac{u_i}{u_j} a_{i,j}$. S'il existe un couple $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ et $a_{i,j} \neq 0$, alors en prenant $u_i = \lambda$ et $u_j = 1$, quelles que soient les valeurs des autres coefficients diagonaux de P , on a $m_{i,j} = \lambda a_{i,j}$ qui pourrait prendre n'importe quelle valeur réelle (à part 0) quand λ parcourt $\mathbb{R}^*$. Puisque S_A est fini, on en déduit que $\forall i \neq j$, $a_{i,j} = 0$, donc A est diagonale.

Soit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, la matrice de transvection $P = T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, alors P est inversible et $P^{-1} = T_{i,j}(-\lambda) = I_n - \lambda E_{i,j}$. En posant $M = PAP^{-1} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $m_{i,i} = a_{i,i} + \lambda(a_{j,j} - a_{i,i})$. Si on avait $a_{i,i} \neq a_{j,j}$, alors $m_{i,i}$ pourrait prendre toutes les valeurs réelles quand $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui contredit le fait que S_A est fini. Ainsi, $\forall i \neq j$, $a_{i,i} = a_{j,j}$ donc on a $A = a_{1,1} I_n$.

Synthèse : réciproquement, soit $A = \lambda I_n$ pour un réel λ , alors pour toute matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $P^{-1}AP = \lambda P^{-1}I_n P = \lambda I_n = A$ donc $S_A = \{A\}$ est bien fini.

Par analyse-synthèse, les seules matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que S_A est fini sont les matrices d'homothéties

de la forme $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (on les appelle aussi matrices scalaires).

11 Par définition, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$ ce qui se traduit aussi par $AP = PB$. On décompose $P = P_1 + iP_2$ avec $(P_1, P_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et on a donc $AP_1 - BP_1 + i(AP_2 - BP_2) = 0$ d'où, en séparant partie réelle et imaginaire, $AP_1 - BP_1 = AP_2 - BP_2 = 0$. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{C}$, $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$. Mais on a vu dans le cours que $f : x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ est polynomiale en x (et de degré maximum n) donc elle est continue sur $\mathbb{C}$. Or, $f(i) = \det(P) \neq 0$ car P est inversible donc f n'est pas identiquement nulle. Ainsi, il existe un réel x tel que $\det(P_1 + xP_2) \neq 0$; en effet, si f s'annulait en tous les réels x , cette fonction polynomiale aurait une infinité de racines donc le polynôme associé serait nul et f le serait aussi ce qui est absurde. En posant $Q = P_1 + xP_2$, on a $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et $AQ = QB$ donc A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12 **a.** Si ω est racine de P , alors $P(\omega) = 0$ donc $P(\omega^2) = P(\omega)P(\omega - 1) = 0$ et ω^2 est aussi racine de P .
b. Si ω est racine de P , d'après la question précédente, ω^2 est racine de P , donc $\omega^4 = (\omega^2)^2$ aussi, $\omega^8 = (\omega^4)^2$ aussi, etc... Par une récurrence simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ω^{2^n} est racine de P . Si $\omega \neq 0$ et si $|\omega| \neq 1$, alors la suite $(|\omega|^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante (si $|\omega| > 1$) ou strictement décroissante (si $|\omega| < 1$) donc injective. Ainsi, l'infinité des termes de la suite $(\omega^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ serait racine de P ce qui est absurde. Par conséquent, toutes les racines $\omega \in \mathbb{C}$ de P vérifient $|\omega| = 1$ ou $\omega = 0$. Plus précisément, la suite $(\omega^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ ne contient qu'un nombre fini de termes si et seulement si $\omega = 0$ ou si ω est une racine de l'unité et elles sont toutes de module 1.

c. Si 0 est racine de P , $P(1) = P(1^2) = P(1)P(0) = 0$ donc 1 est racine de P puis $P(4) = P(2^2) = P(2)P(1) = 0$ donc 4 est racine de P ce qui est absurde avec la question **a.**. Ainsi, 0 n'est pas racine de P donc toutes les racines ω de P sont de module 1.

d. Comme à la question précédente, si ω est racine de P , $P((\omega + 1)^2) = P(\omega + 1)P(\omega)0$ donc $(\omega + 1)^2$ est racine de P donc $|(\omega + 1)^2| = |\omega + 1|^2 = 1$ donc $|\omega + 1| = 1$. Ainsi, si ω est racine de P , $|\omega| = |\omega + 1| = 1$ ce qui donne, comme $|\omega|^2 = \omega\bar{\omega}$, la relation $\omega\bar{\omega} = \omega\bar{\omega} + \omega + \bar{\omega} + 1 = 1$ donc $2\operatorname{Re}(\omega) = -1$. Or les seuls complexes de module 1 et de partie réelle $-\frac{1}{2}$ sont j et j^2 . Les seules racines possibles de P sont donc j et j^2 .

De plus, comme $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$ le coefficient dominant λ de P (qui existe car $P \neq 0$) vérifie $\lambda = \lambda^2$ donc $\lambda = 1$. Comme P est scindé dans $\mathbb{C}$ par D'ALEMBERT-GAUSS, on peut écrire $P = (X - j)^n(X - j^2)^m$ avec n et m les ordres de multiplicité respectifs de j et j^2 dans le polynôme P .

En reportant dans $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$, on a $(X^2 - j)^n(X^2 - j^2)^m = (X - j)^n(X - j^2)^m(X - j - 1)^n(X - j^2 - 1)^m$ donc, comme $j = j^4$ et $1 + j + j^2 = 0$, $(X - j^2)^n(X + j^2)^n(X - j)^m(X + j)^m = (X - j)^n(X - j^2)^m(X + j^2)^n(X + j)^m$ d'où $n = m$ par unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles (à ordre près). Enfin, on obtient $P = (X - j)^n(X - j^2)^n = (X^2 + X + 1)^n$.

Réciproquement, si on pose $P = (X^2 + X + 1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a bien $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$ car on a $P(X^2) = (X^4 + X^2 + 1)^n = (X^2 + X + 1)^n(X^2 - X + 1)^n = (X^2 + X + 1)^n((X - 1)^2 - (X - 1) + 1)^n$.

Les solutions non nulles de $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$ sont tous les polynômes $(X^2 + X + 1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

13 **a.** Soit v un projecteur de E , il existe donc deux sous-espaces F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et tel que

$v = p_{F,G}$ est la projection sur F parallèlement à G . Si on prend une base $\mathcal{B} = (v_1, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire que $(v_1, \dots, v_r)$ est une base de F et $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ une base de G), alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = A = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & O_r \end{pmatrix}$ donc $\text{Tr}(v) = \text{Tr}(A) = r = \text{rang}(v)$ car $\text{Im}(v) = F$ et $\dim(F) = r$.

Bien sûr, la réciproque est fautive. En effet, si $v : (x, y) \mapsto (3x, -y)$, on a $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $\text{rang}(v) = 2$ et $\text{Tr}(v) = 3 - 1 = 2$ alors que v n'est pas un projecteur.

b. $p^2 = \frac{1}{m^2} \left(\sum_{k=0}^{m-1} u^k \right)^2 = \frac{1}{m^2} \left(\sum_{i=0}^{m-1} u^i \right) \circ \left(\sum_{j=0}^{m-1} u^j \right)$ donc $p^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{0 \leq i, j \leq m-1} u^{i+j}$. Or $u^{i+j} = u^k$ si $k \equiv i+j \pmod{m}$ car $u^m = \text{id}_E$. Pour $k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket$, il existe m couples $(i, j) \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket^2$ tels que $u^{i+j} = u^k$:

- Si $k = 0$, ces m couples sont tous les couples $(i, m-i)$ avec $i \in \llbracket 1; m-1 \rrbracket$ et le couple $(0, 0)$.
- Si $k = 1$, ce sont les couples $(i, m+1-i)$ avec $i \in \llbracket 2; m-1 \rrbracket$ et les couples $(0, 1)$ et $(1, 0)$.
- Si $k \in \llbracket 2; m-1 \rrbracket$, ce sont les couples $(i, m+k-i)$ avec $i \in \llbracket k+1; m-1 \rrbracket$ et les $(i, k-i)$ avec $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$.

Ainsi, en regroupant les termes, on a $p^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{k=0}^{m-1} m u^k = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k = p$.

Plus simplement, on pouvait écrire $p^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p$. Or $u^k \circ p = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} u^{i+k}$ et la suite $(u^q)_{q \geq 0}$ est m -périodique car $u^m = \text{id}_E$ donc $u^k \circ p = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} u^i = p$ et on retrouve $p^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} p = p$.

c. Par linéarité de la trace, $\text{Tr}(p) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \text{Tr}(u^k) = \text{rang}(p)$ d'après la question **a.**. Or, on sait que

$\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ car p est un projecteur. Ainsi, $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \text{Tr}(u^k) = \dim(\text{Ker}(p - \text{id}_E))$. Il semble qu'il faille établir que $\text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$.

- Si $x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$, alors $u(x) = x$ donc, par une simple récurrence, on obtient $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = x$ d'où $p(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} x = x$ et $x \in \text{Ker}(p - \text{id}_E)$.
- Si $x \in \text{Ker}(p - \text{id}_E)$, alors $p(x) = x$. Comme $u \circ p = p$ d'après **b.**, $u(x) = x$ donc $x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$.

Par double inclusion, $\text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ donc, avec (1), $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \text{Tr}(u^k) = \dim(\text{Ker}(u - \text{id}_E))$.

d. On vient de voir que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$. Si $x \in \text{Im}(u - \text{id}_E)$, alors il existe un vecteur $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$ donc $p(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(u(y) - y)$ et, après télescopage, il ne reste que $p(x) = \frac{u^m(x) - x}{m} = 0_E$. On aurait aussi pu écrire que $p(x) = p(u(y) - y) = p \circ u(y) - p(y)$ et on sait d'après

la question **b.** que $p \circ u^k = u^k \circ p = p$ (des polynômes en u commutent) pour tout k donc en particulier $p \circ u = p$ ce qui donne bien $p(x) = p(y) - p(y) = 0_E$. On a donc l'inclusion $\text{Im}(u - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(p)$.

Par la formule du rang, $\dim(E) = \text{rang}(p) + \dim(\text{Ker}(p)) = \dim(\text{Im}(u - \text{id}_E)) + \dim(\text{Ker}(u - \text{id}_E))$ si on l'applique à p et $u - \text{id}_E$. Or, d'après **c.**, $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ donc il ne reste que $\dim(\text{Im}(u - \text{id}_E)) = \dim(\text{Ker}(p))$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc $\text{Im}(u - \text{id}_E) = \text{Ker}(p)$.

Alors, p est la projection sur $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - \text{id}_E)$.

14 a. Posons $n = \dim(E)$, alors on sait que $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$. Ainsi, dès que $q \geq n^2 + 1$, la famille $(u, u^2, \dots, u^q)$

est une famille d'endomorphismes possédant strictement plus de vecteurs que la dimension de $\mathcal{L}(E)$, elle est donc liée. Par conséquent $n^2 + 1 \in A$ qui est donc non vide, le théorème fondamental de la relation d'ordre sur

les entiers montre alors que cette partie A de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Bien sûr, comme $\chi_u = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de u par le théorème de CAYLEY-HAMILTON, il suffit de composer par u pour avoir $u \circ \chi_u(u) = 0 = u^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{k+1}$ ce qui prouve qu'on a beaucoup mieux, à savoir $n+1 \in A$.

b. ($\implies$) Supposons $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$. Prenons $m = \text{Min}(A)$, alors par définition $(u, u^2, \dots, u^m)$ est liée. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^m$ tel que $\sum_{k=1}^m \lambda_k u^k = 0$. Si on avait $\lambda_1 = 0$, on aurait $u^2 \circ v = 0$ avec $v = \sum_{k=2}^m \lambda_k u^{k-2}$. Or, avec la formule du rang, comme $\text{rang}(u) = \text{rang}(u^2)$, on en déduit que $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Ker}(u^2))$. Mais on a toujours l'inclusion $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$, et elle nous donne ici l'égalité $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$. Comme $u^2 \circ v$ se traduit par $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u^2)$, on a donc aussi $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$ donc $u \circ v = 0$ ce qui montre que $\sum_{k=2}^m \lambda_k u^{k-1} = 0$ avec $(\lambda_2, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$, ce qui contredit la minimalité de m . Par l'absurde, $\lambda_1 \neq 0$ donc $u = \sum_{k=2}^m \mu_k u^k \in \text{Vect}(\{u^k \mid k \geq 2\})$ en posant $\mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_1}$.

($\impliedby$) On suppose qu'il existe $p \geq 2$ et $(\lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$ tels que $u = \sum_{k=2}^p \lambda_k u^k$. On sait déjà qu'on a l'inclusion $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$. Soit $y \in \text{Im}(u)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On en déduit donc que $y = u(x) = \sum_{k=2}^p \lambda_k u^k(x) = u^2 \left(\sum_{k=2}^p \lambda_k u^{k-2}(x) \right) \in \text{Im}(u^2)$ et on a l'inclusion $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(u^2)$.

Par double inclusion, on a établi que $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

Conclusion, par double implication, $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2) \iff u \in \text{Vect}(\{u^k \mid k \geq 2\})$.

15 a. Par le binôme de NEWTON, $\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $(X+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i$, la matrice A_n est la matrice dans la base

canonique $\mathcal{B}_n = (1, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme $f_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f_n(P) = P(X+1)$ (clairement linéaire et allant de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$). Si on définit $g_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ par $g_n(P) = P(X-1)$, alors $f_n \circ g_n = g_n \circ f_n = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $g_n = f_n^{-1}$. Par conséquent,

$A_n^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(g_n)$ et, comme $\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $(X-1)^j = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i$, $A_n^{-1} = B_n = \left((-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$.

b. Pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note S_p l'ensemble de toutes les permutations de $\llbracket 1; p \rrbracket$. On sait que $\text{card}(S_p) = p!$. On partitionne (ou plutôt on partage) S_p selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{p,i}$

l'ensemble des permutations de S_p qui ont exactement i points fixes. Alors $S_p = \bigcup_{i=0}^p S_{p,i}$ (réunion disjointe)

avec $S_{p,p-1} = \emptyset$ car si une permutation de S_p a au moins $p-1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait p points fixes. On a donc $\text{card}(S_p) = p! = \sum_{i=0}^p \text{card}(S_{p,i})$. Pour dénombrer $S_{p,i}$, on choisit les i

points fixes parmi les éléments de $\llbracket 1; p \rrbracket$ ce qui fait $\binom{p}{i}$ choix ; ensuite on choisit une permutation des $p-i$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de d_{p-i} par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{p,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on "dérange").

On obtient donc $\text{card}(S_{p,i}) = \binom{p}{i} d_{p-i}$. Par conséquent, on a $p! = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} d_{p-i}$ et le changement d'indice

$k = p - i$ donne bien le résultat attendu, à savoir $p! = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} d_k$ car $\binom{p}{p-k} = \binom{p}{k}$.

c. Les $n + 1$ relations trouvées à la question précédente s'écrivent matriciellement ${}^tA_n \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$.

d. Comme A_n est inversible et que $({}^tA_n)^{-1} = {}^t(A_n^{-1}) = {}^tB_n$, on a donc $\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = {}^tB_n \begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$. On en déduit donc, en regardant la dernière ligne de ce produit, que $d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$.

e. Comme la loi sur S_n est la loi uniforme par hypothèse ("au hasard"), on a $p_n = \frac{\text{card}(S_{n,0})}{\text{card}(S_n)} = \frac{d_n}{n!}$ donc $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$ en posant $j = n - k$. Classiquement, avec la fonction exponentielle écrite sous forme de série entière, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = e^{-1} \sim 0,36$.

- 16** Analyse : soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $X^n - 1$ et $(X + 1)^p - 1$ admettent au moins une racine commune. Les racines de $X^n - 1$ sont les $\alpha_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ (racines n -ièmes de l'unité) et celles de $(X + 1)^p - 1$ sont, en translatant, les $\beta_m = e^{\frac{2im\pi}{p}} - 1$ avec $m \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$. Il existe donc $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et $m \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ tels que $\alpha_k = \beta_m$ donc $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2im\pi}{p}} - 1 = 2ie^{\frac{im\pi}{p}} \sin\left(\frac{m\pi}{p}\right)$ qui est de module 1. Ainsi, $\sin\left(\frac{m\pi}{p}\right) = \pm \frac{1}{2}$ donc $\frac{m\pi}{p} \equiv \pm \frac{\pi}{6} [\pi]$ ce qui, en multipliant par $\frac{6p}{\pi}$, revient à $6m \equiv \pm p [6p]$ donc p est un multiple de 6.
- Si $\frac{m\pi}{p} \equiv \frac{\pi}{6} [\pi]$, on a $\frac{2m\pi}{p} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ donc $e^{\frac{2im\pi}{p}} - 1 = e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ donc $\frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ ce qui montre, en multipliant par $\frac{3n}{2\pi}$, que $3k \equiv n [3n]$ donc n est un multiple de 3.
 - Si $\frac{m\pi}{p} \equiv -\frac{\pi}{6} [\pi]$, on a $\frac{2m\pi}{p} \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$ donc $e^{\frac{2im\pi}{p}} - 1 = e^{-\frac{i\pi}{3}} - 1 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ donc $\frac{2k\pi}{n} \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$ ce qui montre, en multipliant par $\frac{3n}{2\pi}$, que $3k \equiv -n [3n]$ donc n est un multiple de 3.

Synthèse : si $n = 3a$ est un multiple de 3 et $p = 6b$ est un multiple de 6, alors j est racine de $X^n - 1$ car $j^3 = 1$ et $j^{3a} = 1^a = 1$ et j est racine de $(X + 1)^p - 1$ car $j + 1 = -j^2$ et que $(-j^2)^{6b} = (-1)^{6b} j^{12b} = 1$.

En conclusion, $X^n - 1$ et $(X + 1)^p - 1$ admettent au moins une racine commune $\iff (n \equiv 0 [3] \text{ et } p \equiv 0 [6])$.

- 17** Comme $f \circ g = 0$, on a $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$ donc, par croissance de la dimension et la formule du rang appliquée à f , $\text{rang}(g) = \dim(\text{Im}(g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) = n - \text{rang}(f)$ donc $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) \leq n$.
- De plus, comme on sait que $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$, comme $\text{Im}(f+g) = \mathbb{C}^n$ puisque $f+g \in \text{GL}(\mathbb{C}^n)$, on a $\mathbb{C}^n \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ donc $n \leq \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g))$ par la formule de GRASSMANN et $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) = \text{rang}(f) + \text{rang}(g) \geq n$ car $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) \geq 0$. Par double inégalité, on parvient comme attendu à $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) = n$.
- 18** a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $A \neq 0$, B nilpotente et $AB = BA$. On sait d'après le cours que $\text{Im}(AB) \subset \text{Im}(A)$. Si on avait $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)$, par inclusion et égalité des dimensions, on aurait $\text{Im}(AB) = \text{Im}(A)$. Comme $A \neq 0$, il existe $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX_1 \neq 0 \in \text{Im}(A)$. On a donc $AX_1 \in \text{Im}(AB)$ d'où l'existence de X_2 tel que $AX_1 = ABX_2 = BAX_2$ car $AB = BA$. De même, comme $AX_2 \in \text{Im}(A) = \text{Im}(AB)$ il existe X_3 tel que $AX_2 = ABX_3 = BAX_3$ donc $AX_1 = B^2AX_3$. Si $B^r = 0$, on continue comme ceci pour avoir l'existence de $X_{r+1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX_1 = B^rAX_{r+1}$ ce qui fournit une

contradiction car $B^r A X_{r+1} = 0$ alors que $A X_1 \neq 0$.

On a donc montré que si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ vérifie $A \neq 0$, B nilpotente et $AB = BA$, alors $\text{rang}(AB) < \text{rang}(A)$.

b. Soit $A_1, \dots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent 2 à 2.

• Si $A_1 \cdots A_{n-1} = 0$, alors on a bien $A_1 \cdots A_n = 0$.

• Si $A_1 \cdots A_{n-1} \neq 0$, comme A_n est nilpotente et commute avec $A_1 \cdots A_{n-1}$ par hypothèse, on a l'inégalité $\text{rang}(A_1 \cdots A_n) < \text{rang}(A_1 \cdots A_{n-1})$. Comme $A_1 \cdots A_{n-2} \neq 0$ car $A_1 \cdots A_{n-1} \neq 0$, que A_{n-1} commute avec $A_1 \cdots A_{n-2}$ et que A_{n-2} est nilpotente, on a encore $\text{rang}(A_1 \cdots A_{n-1}) < \text{rang}(A_1 \cdots A_{n-2})$. On continue ainsi de suite pour avoir $\text{rang}(A_1 \cdots A_n) < \text{rang}(A_1 \cdots A_{n-1}) < \dots < \text{rang}(A_1 A_2) < \text{rang}(A_1)$. Mais comme A_1 est nilpotente, $\text{rang}(A_1) < n$ car A_1 est non inversible et on montre par une simple récurrence à partir des inégalités ci-dessus que $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\text{rang}(A_1 \cdots A_{n-k}) < k+1$. En prenant $k=0$, on a donc $\text{rang}(A_1 \cdots A_n) < 1$ donc $\text{rang}(A_1 \cdots A_n) = 0$ et $A_1 \cdots A_n = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, on a $A_1 \cdots A_n = 0$.

c. Soit $n=2$ et posons $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$. A_1 et A_2 sont nilpotentes. On a $A_1 A_2 = E_{2,2}$ et $A_2 A_1 = E_{1,1}$. Les matrices A_1 et A_2 ne commutent pas et $A_1 A_2 \neq 0$.

On peut généraliser avec $n \geq 3$ en prenant $A_1 = E_{2,1}$, $A_2 = E_{2,3}, \dots, A_n = E_{n,1}$ car $A_1 \cdots A_n = E_{1,1} \neq 0$ alors que toutes les matrices A_k sont nilpotentes.

19 a. Méthode 1 : supposons que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. En notant L_i la ligne i de A_x , on a donc par construction $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$ ce qui rend les lignes de A_x liée, donc $\det(A_x) = 0$. Par contre-apposée, si $\det(A_x) \neq 0$, $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans E .

Méthode 2 : soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. On a donc $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = 0$ en évaluant

en les $x_1, \dots, x_n$, ce qui se traduit par ${}^t A_x \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ car, puisque A_x

est inversible par hypothèse, ${}^t A_x$ l'est aussi. Ceci assure directement la liberté de $(f_1, \dots, f_n)$ dans E .

b. Initialisation : si $n=1$, $f_1 \in E$ telle que (f_1) est libre, alors on sait que $f_1 \neq 0$ ce qui prouve l'existence d'un réel x_1 tel que $f_1(x_1) \neq 0$. Ainsi, en prenant $x = (x_1) \in \mathbb{R}$ et $A_x = (f_1(x_1)) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on a bien $\det(A_x) = f_1(x_1) \neq 0$.

Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que pour toute famille libre $(f_1, \dots, f_{n-1}) \in E^{n-1}$, il existe une famille de réels $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\det(A'_x) \neq 0$ en notant $A'_x = (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Soit maintenant $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de E , alors la sous-famille $(f_1, \dots, f_{n-1})$ est libre donc, par hypothèse de récurrence, il existe $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel qu'en notant $A'_{x'} = (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, on ait $\det(A'_{x'}) \neq 0$. Pour $x_n \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, on pose $A_x = (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on développe par rapport à la dernière colonne pour avoir $\det(A_x) = \alpha_1 f_1(x_n) + \dots + \alpha_n f_n(x_n)$ avec $\alpha_n = \det(A'_{x'}) \neq 0$. Or la fonction $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ est non nulle car $(f_1, \dots, f_n)$ est libre donc il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 f_1(x_n) + \dots + \alpha_n f_n(x_n) = \det(A_x) \neq 0$ ce qui clôt les débats.

Par principe de récurrence, si $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, il existe $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\det(A_x) \neq 0$.

20 a. Méthode 1 : soit $x \in \mathbb{R}^3$, comme $f^3 + f = 0$ par hypothèse, $f^3(x) + f(x) = 0$. Procédons par analyse/synthèse.

Analyse : si $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(f)$ et $z \in \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$, alors $f(y) = 0$ donc $f^2(y) = 0$ et $f^2(z) + z = 0$. Ainsi, $f^2(x) = f^2(y) + f^2(z) = -z$ d'où $y = x - z = x + f^2(x)$. Ceci montre déjà l'unicité d'une décomposition, donc le fait que la somme de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ est directe.

Synthèse : réciproquement, si $y = x + f^2(x)$ et $z = -f^2(x)$, on a bien $y + z = x$, $y \in \text{Ker}(f)$ car $f^3(x) + f(x) = 0$ et $z \in \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ car $f^4(x) + f^2(x) = f(f^3(x) + f(x)) = 0$. Ceci assure $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.

On conclut donc que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Méthode 2 : soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$, alors $f(x) = 0$ et $f^2(x) + x = 0$. Comme $f(x) = 0$, en composant par f , on a aussi $f^2(x) = f(0) = 0$ par linéarité de f donc $0 + x = 0$ d'où $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}$. Comme $(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \circ f = f^3 + f = 0$, on en déduit que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ donc $\text{rang}(f) \leq \dim(\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}))$. Or, d'après la formule du rang, on a $\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rang}(f) = 3$ donc $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})) \geq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Comme on sait déjà que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ sont en somme directe, cette minoration assure que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

La première méthode a l'avantage de marcher même en dimension infinie.

Comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ puisque $f \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$. On pouvait aussi dire que si on avait $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}$, comme $f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un endomorphisme en dimension finie, on aurait $f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3} \in \text{GL}(\mathbb{R}^3)$ donc $f^3 + f = f \circ (f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$ impliquerait $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Par l'absurde, on a $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$.

b. Soit $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ tel que $x \neq 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ax + bf(x) = 0$ (1). On a aussi $af(x) + bf^2(x) = 0$ donc, puisque $f^2(x) + x = 0$, on a $af(x) - bx = 0$ (2). En effectuant $a(1) - b(2)$, on parvient à $(a^2 + b^2)x = 0$ donc $a^2 + b^2 = 0$ car $x \neq 0$. Ainsi, $a = b = 0$ car a et b sont réels donc $(x, f(x))$ est libre.

c. Si f était injective, $f \in \text{GL}(\mathbb{R}^3)$ et $f^3 + f = f \circ (f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$ impliquerait $f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3} = 0 = 0$ donc $f^2 = -\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ et, en passant au déterminant, on aurait $\det(f)^2 = (-1)^3 = -1$. NON ! Ainsi, $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc on peut prendre un vecteur non nul v_1 dans $\text{Ker}(f)$. On a vu en question **a.** que $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$ donc on peut prendre un vecteur non nul v_2 dans $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$. On sait d'après la question **b.** qu'en notant $v_3 = f(v_2)$ la famille (v_2, v_3) est libre. De plus, $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ est stable par f donc $v_3 \in \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$. Comme $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ sont en somme directe, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est donc libre et, puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par construction, $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_3$ et $f(v_3) = f^2(v_2) = -v_2$ donc $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$, alors on a $g \circ f = f \circ g \iff AB = BA$. Or, après calculs, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b_{3,1} & -b_{3,2} & -b_{3,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & b_{1,3} & -b_{1,2} \\ 0 & b_{2,3} & -b_{2,2} \\ 0 & b_{3,3} & -b_{3,2} \end{pmatrix}$. On dispose donc de l'équivalence $AB = BA \iff (b_{1,2} = b_{1,3} = b_{2,1} = b_{3,1} = 0, b_{2,2} = b_{3,3}, b_{2,3} = -b_{3,2})$. Les matrices B vérifiant $AB = BA$

sont donc de la forme $B = b_{1,1}I_3 + b_{3,2}A + (b_{1,1} - b_{2,2})A^2$ car $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ce qui montre que si g commute avec f , alors $g = b_{1,1}\text{id}_{\mathbb{R}^3} + b_{3,2}f + (b_{1,1} - b_{2,2})f^2 \in \text{Vect}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$. Comme les polynômes en f commutent avec f , on a l'autre inclusion $\text{Vect}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2) \subset \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\}$. Par double inclusion, on a donc $\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$.

On aurait pu, si $g \circ f = f \circ g$, dire que les deux sous-espaces $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ étaient stables par g donc la matrice $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est de la forme $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$. Or $f(v_2) = v_3$ donc $g(v_3) = g(f(v_2))$ devient $g(v_3) = f(g(v_2)) = f(b_{2,2}v_2 + b_{3,2}v_3) = -b_{3,2}v_2 + b_{2,2}v_3$ et on arrive à la même forme de B .

ORAUX 2022 THÈME 3

SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

- 21** L'ensemble E contient la suite nulle et, si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de E , comme $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$, la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge absolument par comparaison et, par linéarité de la somme de séries convergentes, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)2^{-kn} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 2^{-kn} + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n 2^{-kn} = 0 + 0$ donc $u + v \in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (et même de $\ell^1(\mathbb{C})$) donc E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , comme la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument, la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ est de rayon $R \geq 1$ car il y a convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ au moins sur le disque $B_f(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ par comparaison. Posons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ quand il y a convergence. Par hypothèse, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$. Comme f est continue sur $] -1; 1[$ car elle y est développable en série entière, on a $f(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$ donc $f(0) = u_0 = 0$. Soit un entier $p \in \mathbb{N}$, supposons qu'on ait déjà montré que $u_0 = \dots = u_p = 0$. Alors, on obtient $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n 2^{-kn} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n 2^{-kn} = \frac{1}{2^{k(p+1)}} \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n 2^{-kn+k(p+1)} = 0$ donc, en changeant d'indice, $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n 2^{-kn+k(p+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+p+1} 2^{-kn} = 0$. Par conséquent, en posant $f_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+p+1} z^n$, le rayon de convergence de cette série entière est à nouveau supérieur ou égal à 1 car $\forall z \in B_f(0, 1)$, $f(z) = z^p f_p(z)$. Ce qui précède montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_p\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$ et, avec les mêmes arguments que précédemment, le terme constant de f_p est nul ce qui montre que $u_{p+1} = 0$ et l'hérédité est établie. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Ainsi, E est réduit à la suite nulle !

- 22** a. Procédons par récurrence sur n . Initialisation : par hypothèse, $\forall x \in [0; 1]$, $f_0(x) = 0$ donc $u_0 = 0 \in [0; \rho[$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f_n est continue et positive sur $[0; 1]$ et $u_n \in [0; \rho[$. Pour $x \in [0; 1]$, on a $0 < \rho - u_n \leq \rho + a(x) - u_n \leq \rho + a(x)$ par hypothèse de récurrence donc f_{n+1} est bien définie et continue par opérations sur le segment $[0; 1]$ ce qui justifie l'existence de u_{n+1} . De plus, on peut encadrer

$$0 \leq f_{n+1}(x) = \frac{\rho}{\rho + a(x) - \int_0^1 a(y) f_n(y) dy} = \frac{\rho}{\rho + a(x) - u_n} \leq \frac{\rho}{\rho + a(x)} \text{ ce qui montre le nouvel encadrement}$$

$$0 \leq a(x) f_{n+1}(x) = \frac{\rho a(x)}{\rho + a(x)} < \frac{\rho a(x) + \rho^2}{\rho + a(x)} = \rho \text{ d'où, par croissance de l'intégrale, } 0 \leq u_{n+1} < \int_0^1 \rho dx = \rho.$$

Par principe de récurrence, si $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bien définie et continue sur $[0; 1]$ et $u_n \in [0; \rho[$.

Procédons à nouveau par récurrence sur n . Initialisation : comme $u_0 = 0$ et $u_1 \geq 0$, on a $u_0 \leq u_1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n-1} \leq u_n$, comme $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 a(x)(f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx$, on obtient

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 a(x) \left(\frac{\rho}{\rho + a(x) - u_n} - \frac{\rho}{\rho + a(x) - u_{n-1}} \right) dx = \int_0^1 \frac{\rho a(x)(u_n - u_{n-1})}{(\rho + a(x) - u_n)(\rho + a(x) - u_{n-1})} dx. \text{ Or,}$$

par hypothèse de récurrence, $\forall x \in [0; 1]$, $\frac{\rho a(x)(u_n - u_{n-1})}{(\rho + a(x) - u_n)(\rho + a(x) - u_{n-1})} \geq 0$ donc $u_n \leq u_{n+1}$.

Par principe de récurrence, si $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

b. .

c. .

23

24 a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = (x+1)e^x > 0$ donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Le théorème de la bijection continue montre que f est bijective. Le graphe de f^{-1} s'obtient à partir du graphe de f par une symétrie orthogonale par rapport à la droite $D : y = x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) > x$ car $e^x > 1$ d'où, en appliquant f^{-1} strictement croissante (car f l'est) à cette stricte inégalité, on obtient $f^{-1}(f(x)) = x > f^{-1}(x)$.

b. Comme f est bijective, la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(a) = f^{-1}(u_n(a))$ donc elle est bien définie car $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f^{-1} . De plus, d'après a., $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(a) < u_n(a)$ donc la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Comme $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0, le théorème de la limite monotone montre que la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente tend vers $\ell_a \geq 0$. Si on avait $\ell_a > 0$, en passant à la limite dans $u_{n+1}(a)e^{u_{n+1}(a)} = u_n(a)$, on aurait $\ell_a e^{\ell_a} = \ell_a$ donc $e^{\ell_a} = 1$. NON!

Ainsi $\ell_a = 0$ et la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quelle que soit la valeur de $a > 0$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)} = e^{u_{n+1}(a)}$ donc $u_{n+1}(a) = \ln \left(\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)} \right) = \ln(u_{n+1}(a)) - \ln(u_n(a))$. Ainsi, la nature de $\sum_{n \geq 0} u_n(a)$, qui est la même que celle de $\sum_{n \geq 0} u_{n+1}(a)$, est celle de $\sum_{n \geq 0} (\ln(u_{n+1}(a)) - \ln(u_n(a)))$. Par dualité suite/série, la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n(a)$ est donc celle de la suite $(\ln(u_n(a)))_{n \in \mathbb{N}}$. Or, d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n(a)) = -\infty$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n(a)$ diverge.

Question de cours : Soit $f : [\widetilde{a}; \widetilde{b}] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^{n+1} , alors la formule de TAYLOR reste intégral est la relation $f(b) = f(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

25

26 a. Soit $x > 0$, les $a_n = \frac{1}{n!(x+n)}$ sont donc bien définis et $a_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n.n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN et f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n!(x+n)}$.

- La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers la fonction f par définition.
- Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $a > 0$, comme f_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = f_n(a) = \frac{1}{n!(a+n)}$ donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ d'après ce qui précède.

Par un théorème du cours, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On a $\forall x > 0$, $xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{n!(x+n)}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \frac{x}{n!(x+n)}$, alors $g_n(x) = \frac{x+n-n}{n!(x+n)} = \frac{1}{n!} - \frac{n}{n!(x+n)}$ donc g_n est croissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \frac{1}{n!}$.

Ainsi, $\|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = \frac{1}{n!}$ ce qui prouve que $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de la double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ de sorte que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{x}$.

c. .

- (27) Comme $\left(\frac{(-1)^n x^n}{3n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$ par croissances comparées, le rayon de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ vaut $R = 1$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ pour $x \in]-1; 1[$. En effet, la série converge si $x \in]-1; 1[$ d'après le cours et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge aussi par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{3n+1}\right)_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0. Par contre, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3n+1}$ diverge car $\frac{1}{3n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$ et que la série harmonique diverge. Posons $g(x) = x f(x^3)$, alors $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$. Le rayon de cette série entière est aussi 1, on sait donc que g est dérivable sur $] - 1; 1[$ et que $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$. Ainsi, puisque $g(0) = 0$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\forall x \in]-1; 1[$, $g(x) = \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$. Or, comme $(1+x^3) = (1+x)(1-x+x^2)$, on peut décomposer $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bX+c}{1-x+x^2}$ avec a, b, c des réels. En réduisant au même dénominateur, en identifiant et en résolvant le système, on trouve sans peine $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3(1+x)} + \frac{2-x}{3(1-x+x^2)}$. Ainsi, pour $x \in]-1; 1[$, en faisant apparaître des dérivées usuelles, $g(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{3(1+t)} + \frac{2-t}{3(1-t+t^2)} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{6} \int_0^x \frac{(2t-1)dt}{1-t+t^2} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1-t+t^2}$. En mettant sous forme canonique, $\frac{1}{1-t+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{(2/\sqrt{3})}{1 + \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$, on a l'expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles $g(x) = \left[\frac{\ln(1+t)}{3} - \frac{\ln(1-t+t^2)}{6} + \frac{\text{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} \right]_0^x = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$ car $\text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$. On peut maintenant revenir à l'expression de $f(x)$.

Si $x = 0$, $f(x) = 1$. Si $x \neq 0$, soit $\sqrt[3]{x}$ l'antécédent de x par la bijection $y \mapsto y^3$ de $] - 1; 1[$ dans $] - 1; 1[$, alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} g(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{6\sqrt[3]{x}} \ln \left(\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{1-\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{x}} \text{Arctan} \left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18\sqrt[3]{x}}$.

- (28) a. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1$ (R). On suppose que cette suite converge vers un réel ℓ . En passant à la limite dans (R), on trouve $\ell = 0 + 1 = 1$. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{n+1} + 1$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{n+1}$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = \frac{u_1 - v_1}{n!} = \frac{a-b}{n!}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$. Ainsi, comme $v_n = u_n - (u_n - v_n)$, par somme, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

Si la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge pour un réel a , alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge pour toute valeur de a vers 1.

- b. On a $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2} = 1,5$, $u_3 = \frac{3}{2}$, $u_4 = \frac{11}{8} = 1,375$. Soit $n \geq 1$ tel que $1 \leq u_n \leq 2$, alors $1 \leq u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1 \leq \frac{2}{n+1} + 1 \leq 2$. Par principe de récurrence, $\forall n \geq 1$, $u_n \in [1; 2]$ donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée. Ainsi, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n+1} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 1$ ce qui équivaut au fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

c. Soit $n \geq 1$, alors $s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{(n+1)!} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{k!}{(n+1)!} \right) + \frac{(n+1)!}{(n+1)!}$ donc, comme $(n+1)! = (n+1).n!$, on a $s_{n+1} = \frac{s_n}{n+1} + 1$ avec $s_1 = 1$. La question précédente montre que $(s_n)_{n \geq 1}$ tend vers 1.

d. Comme $s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 1} s_n x^n$ est, d'après le cours, le même que celui de $\sum_{n \geq 1} x^n$, donc $R = 1$. Pour $x \in]-1; 1[$, posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n x^n$. La fonction f est alors dérivable sur $] - 1; 1[$ et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)s_{n+1}x^n$. Or $\forall n \geq 1$, $(n+1)s_{n+1} = s_n + (n+1)$ donc, en reportant dans l'expression de $f'(x)$, on a $f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)s_{n+1}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (s_n + (n+1))x^n = 1 + f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n$. Comme on sait que $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$, en dérivant, on a $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc $f'(x) = f(x) + \frac{1}{(1-x)^2}$ (E). Les solutions réelles sur $] - 1; 1[$ de l'équation homogène $(E_0) : y' = y$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par la méthode de variation de la constante, on trouve $\lambda'(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$ et on peut prendre par exemple $\lambda(x) = \int_0^x \frac{e^{-t} dt}{(1-t)^2}$. Les solutions de (E) sur $] - 1; 1[$ sont donc toutes les fonctions $y : x \mapsto \left(e^x + \int_0^x \frac{e^{-t} dt}{(1-t)^2} \right)$. Comme f est solution de (E) sur $] - 1; 1[$ et que $f(0) = 0$, on a $\lambda = 0$ donc, pour tout réel $x \in]-1; 1[$, il vient $f(x) = e^x \int_0^x \frac{e^{-t} dt}{(1-t)^2}$.

- 29** a. Par une récurrence simple, u_n est bien défini et strictement positif pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\ln(u_n)$ est bien défini. Posons, pour $n \geq 1$, $w_n = \ln(u_n) + \frac{3}{2} \ln(n)$. Par dualité suite-série, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} w_{n+1} - w_n$ converge. Or $w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ donc $w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right) + \frac{3}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right) + \frac{3}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Ainsi, à l'ordre 2, $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n} - \frac{5}{2n} + \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, avec RIEMANN, $\sum_{n \geq 1} w_{n+1} - w_n$ converge. Par conséquent, la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ converge et vérifie bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = -\frac{3}{2} \ln(n) + w_n$.
- b. Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$, alors $u_n = e^{\ln(u_n)} = \exp\left(-\frac{3}{2} \ln(n) + \ell + o(1)\right) = \frac{e^\ell e^{o(1)}}{n^{3/2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^\ell}{n^{3/2}}$ par continuité de l'exponentielle. Ainsi, à nouveau par RIEMANN, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

c. Soit $n \geq 1$, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $(2k+5)u_{k+1} = (2k+2)u_k$ donc $2(k+1)u_{k+1} + 3u_{k+1} = 2ku_k + 2u_k$. On somme pour avoir $2 \sum_{k=0}^n (k+1)u_{k+1} + 3 \sum_{k=0}^n u_{k+1} = 2 \sum_{k=0}^n ku_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k$. On pose $m = k+1$ dans les deux premières sommes et on a bien $2 \sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2 \sum_{k=0}^n ku_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k$. On peut aussi le montrer par récurrence. En effet, on a $2 \sum_{k=1}^{0+1} ku_k + 3 \sum_{k=1}^{0+1} u_k = 2u_1 + 3u_1 = 5u_1$ mais aussi $2 \sum_{k=0}^0 ku_k + 2 \sum_{k=0}^0 u_k = 2u_0$ et on a bien $u_1 = \frac{2.0+2}{2.0+5}u_0$ donc la relation est vraie pour $n = 0$. Soit $n \geq 0$ tel que $2 \sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2 \sum_{k=0}^n ku_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k$, alors, par hypothèse de récurrence, il vient

$2 \sum_{k=1}^{n+2} ku_k + 3 \sum_{k=1}^{n+2} u_k = 2 \sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k + (2(n+2) + 3)u_{n+2} = 2 \sum_{k=0}^n ku_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k + (2n+7)u_{n+2}$
donc $2 \sum_{k=1}^{n+2} ku_k + 3 \sum_{k=1}^{n+2} u_k = 2 \sum_{k=0}^n ku_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k + (2n+4)u_{n+1} = 2 \sum_{k=0}^{n+1} ku_k + 2 \sum_{k=0}^{n+1} u_k$. Par principe de récurrence, la relation $2 \sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2 \sum_{k=0}^n ku_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

d. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle de $\sum_{n \geq 0} u_n$. On sait que $(S_n)_{n \geq 0}$ converge vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. La relation de la question c. s'écrit, après télescopage, $2(n+1)u_{n+1} + 3S_{n+1} - 3u_0 = 2S_n$ (R). Or $nu_n \sim_{+\infty} \frac{e^\ell}{\sqrt{n}}$ d'après b., donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$. En passant à la limite dans (R), $3S - 3 = 2S$. Ainsi, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 3$.

30 a. Les fonctions f_n sont définies sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - g(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right) \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2} \right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}}$
donc $|f_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par conséquent, $f_n - g$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

on a $\|f_n - g\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ (on a même égalité car $f_n(0) - g(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - g\|_{\infty, \mathbb{R}} = 0$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

c. Les fonctions f_n sont de classe C^∞ par opérations car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + \frac{1}{n} > 0$ et g n'est pas dérivable en 0. On ne peut donc pas se passer de la convergence uniforme de la suite $(f'_n)_{n \geq 1}$ dans le théorème de dérivabilité des suites de fonctions qui suppose seulement la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ sur I .

31 a. • Si $x < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = +\infty$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ diverge grossièrement.

• Si $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \ln(2)$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ diverge aussi grossièrement.

• Si $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$ donc $u_n(x) \sim_{+\infty} e^{-nx}$ et $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge (série géométrique, $0 < e^{-x} < 1$).

Ainsi le domaine de définition de f vaut $I = \mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $a > 0$, comme u_n est décroissante et positive, $\|u_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = u_n(a)$ et $\sum_{n \geq 0} u_n(a)$ converge d'après ce qui précède. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $[a; +\infty[$, la fonction f y est aussi continue. f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^* = I = \bigcup_{a>0} [a; +\infty[$.

Les u_n sont décroissantes donc, par convergence simple, f est décroissante. Comme $u_0(x) = \ln(2)$ et $u_1(x) = \ln(1 + e^{-x})$, la fonction $u_0 + u_1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme avant, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ est décroissante. Ainsi, si $0 < x < y$, on a $(u_0 + u_1)(x) > (u_0 + u_1)(y)$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \geq \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(y)$. En sommant, on obtient donc $(u_0 + u_1)(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) = f(x) > f(y) = (u_0 + u_1)(y) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(y)$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Comme f est décroissante et minorée par 0, f admet une limite finie en $+\infty$ par le théorème de la limite

monotone. $u_0(x) = \ln(2)$ et $\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$. Par convergence normale de $\sum_{n \geq 0} u_n$ sur $[1; +\infty[$ et

théorème de la double limite, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = \ln(2)$.

d. Comme f est décroissante et positive, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ par théorème de la limite monotone. Pour $x > 0$, on pose $g_x : t \mapsto \ln(1 + e^{-tx})$ d'où $u_n(x) = g_x(n)$. Comme g_x est continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-tx}$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, g_x(n+1) = u_{n+1}(x) \leq \int_n^{n+1} g_x(t) dt \leq g_x(n) = u_n(x)$. En sommant l'inégalité de gauche pour $n \in \mathbb{N}$ et en rajoutant $u_0(x) = \ln(2)$ (tout converge), on obtient par CHASLES $f(x) \leq \ln(2) + \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-tx}) dt$. En sommant l'inégalité de droite pour $n \in \mathbb{N}$, on arrive directement à $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-tx}) dt \leq f(x)$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-tx}) dt \leq f(x) \leq \ln(2) + \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-tx}) dt$. Or, comme $0 < e^{-tx} < 1$ si $t > 0$, on a $\ln(1 + e^{-tx}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-nxt}}{n}$. Comme les $t \mapsto \frac{(-1)^{n+1} e^{-nxt}}{n}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$, que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nxt}}{n} dt = \frac{1}{n^2 x}$ et que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 x}$ converge par RIEMANN, on conclut par le théorème d'intégration terme à terme que $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-tx}) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 x} = \frac{\pi^2}{12x}$ d'après l'énoncé. Ainsi, l'encadrement précédent montre que $f(x) \sim \frac{\pi^2}{12x}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

32 Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $z \neq 2$, on peut poser $u_n = e^{\frac{nz}{z-2}} = \left(e^{\frac{z}{z-2}}\right)^n$. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est donc une série géométrique de raison $a = e^{\frac{z}{z-2}}$ et on sait d'après le cours que cette série converge si et seulement si $|a| = e^{\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z-2}\right)} < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z-2}\right) < 0$.

Or, si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il vient $\frac{z}{z-2} = \frac{x + iy}{(x-2) + iy} = \frac{(x + iy)(x-2 - iy)}{(x-2)^2 + y^2} = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 2iy}{(x-2)^2 + y^2}$ donc le signe de $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z-2}\right)$ est celui de $x^2 - 2x + y^2 = (x-1)^2 + y^2 - 1$.

Par conséquent, $\sum_{n \geq 0} e^{\frac{nz}{z-2}}$ converge si et seulement si $(x-1)^2 + y^2 < 1$, c'est-à-dire si et seulement si le point M d'affixe $z = x + iy$ appartient au disque ouvert de centre $A = (1, 0)$ et de rayon $R = 1$.

33 a. Pour $n \geq 1$, on partitionne les involutions σ de $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de I_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ une involution de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)I_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors I_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble à n éléments.

Cette partition implique la relation $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ pour $n \geq 1$ et, comme $I_2 = 2 = 1 + 1 \cdot 1 = I_1 + 1 \cdot I_0$ avec la convention choisie pour I_0 , on a bien : $\forall n \geq 0, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Comme les involutions sont des permutations et qu'il y a $n!$ permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on en déduit que $I_n \leq n!$ d'où $0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq 1$. Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ a pour rayon 1, par comparaison, on a $R \geq 1$.

c. Les calculs qui suivent sont valides car le rayon de convergence R est supérieur à 1 : pour $x \in]-1; 1[$, on a

$$(1+x)\varphi(x) = \varphi(x) + x\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n + nI_{n-1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = \varphi'(x).$$

d. On en déduit en intégrant l'équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1+x$ est $x \mapsto x + \frac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $] -1; 1[$, que l'on a

$\forall x \in] -1; 1[$, $\varphi(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $\varphi(0) = I_0 = 1$ par convention.

e. Alors $\forall x \in] -1; 1[$, $\varphi(x) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} x^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j! 2^j} x^{2j} \right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on

peut effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j} \right) x^n$. En identifiant (par unicité)

les coefficients entre les deux expressions de $S(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_n}{n!} = \sum_{i+2j=n} \frac{1}{i! j! 2^j}$

donc $I_n = \sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j}$. Puisque $2j \leq n$ et $i = n - 2j$, on a la formule $I_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)! j! 2^j}$.

Pour expliquer cette relation de manière combinatoire, on peut constater qu'une involution σ de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n , on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et x est appelé un point fixe de σ .
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \text{id}_{\llbracket 1; n \rrbracket}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de

$\llbracket 1; n \rrbracket$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f = n - 2j$ avec $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où

$A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n - 2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n - 2j$ éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui sont fixes par σ : $\binom{n}{n-2j} = \binom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\text{card}(A_{n,j}) = \binom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \frac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \frac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas

par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \text{card}(A_n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{card}(A_{n,j}) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)! 2^j j!}$.

34 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \frac{1}{x + e^t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ si $x > -1$ et sur $[0; \ln(-x)[\cup] \ln(-x); +\infty[$ si $x \leq -1$. Comme $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$, la fonction f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si $x > -1$. De plus, f_{-1} est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_{-1}(t) = \frac{1}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ donc $f(-1)$ n'existe pas par comparaison à une intégrale de RIEMANN. Comme f est définie sur $] -1; 1[$ et pas sur $[-1; 1]$, on en déduit que le réel $\alpha > 0$ maximal tel que f soit définie sur $] -\alpha; \alpha[$ est le réel $\alpha = 1$.

b. Si $x \in] -1; 1[$, $\forall t \geq 0$, $f_x(t) = e^{-t} \times \frac{1}{1 + x e^{-t}} = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ si on définit $u_n(t) = (-1)^n x^n e^{-(n+1)t}$. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ d'après ce qui précède. Les u_n sont

continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $n+1 > 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue

sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} |u_n| = \frac{|x|^n}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{n+1}$ converge car $\frac{|x|^n}{n+1} = o(|x|^n)$ et que la série géométrique $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$. Ainsi, si $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \frac{\ln(1+x)}{x}$ car on reconnaît le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] -1; 1[$. Bien sûr, $f(0) = 1$.

35

36 a. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ donc f est intégrable sur $]0; 1]$ par RIEMANN ($\frac{1}{2} < 1$).

De plus, $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}$ donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$ par RIEMANN ($\frac{3}{2} > 1$). Ainsi, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

b. Dans l'intégrale convergente $\int_1^{+\infty} f(x) dx$, on pose $x = \frac{1}{t} = \varphi(t)$ avec φ strictement décroissante, de classe C^1 et bijective de $]0; 1]$ dans $[1; +\infty[$, et $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^0 f\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}} = \int_0^1 f(t) dt$. Par CHASLES, on a donc $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$.

c. D'après le cours que $\forall x \in]-1; 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ avec $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}$. Si $u \in]-1; 1[, u^4 \in [0; 1[\subset]-1; 1[$ donc $\forall u \in [0; 1[, \frac{1}{\sqrt{1+u^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2) \cdots (-n+(1/2))}{n!} u^{4n}$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$. Classiquement, on factorise les 2, on multiplie au numérateur et au dénominateur par les termes

$2.4 \cdots (2n)$, ce qui donne $\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$ et, enfin, $\frac{1}{\sqrt{1+u^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)! u^{4n}}{2^{2n} (n!)^2}$.

d. Pour $u \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n(u) = \frac{(2n)! u^{4n}}{2^{2n} (n!)^2}$. La suite $(v_k(u))_{k \geq 0}$ est décroissante car si $u \in]0; 1]$, on a $\frac{v_{k+1}(u)}{v_k(u)} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} u^4 = \frac{2n+1}{2n+2} u^4 < 1$ et $v_n(0) = \delta_{n,0}$. La suite $(v_k(u))_{k \geq 0}$ tend aussi vers 0 si $u \in [0; 1[$ puisque la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k v_k(u)$ converge d'après c.. De plus, si $u = 1$, par STIRLING, on a $v_n(1) \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{2n}}{2^{2n} (2\pi n) e^{2n} n^{2n}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(1) = 0$. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n(1)$ converge par le critère spécial des séries alternées. La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n$ converge donc simplement sur $[0; 1]$.

Posons maintenant $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k(u)$ pour $u \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après le critère spécial des séries alternées, $|R_n(u)| \leq v_{n+1}(u) \leq v_{n+1}(1)$. Ainsi, R_n est bornée sur $[0; 1]$ et $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq v_{n+1}(1)$.

e. On effectue le changement de variable $x = u^2 = \varphi(u)$ avec φ strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$, et on a $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^6+u^2}} (2u) du = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}} du$.

Comme $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq v_{n+1}(1)$ et d'après d., par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, [0; 1]} = 0$ donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n$ converge uniformément sur le segment $[0; 1]$ donc, comme toutes les v_n sont continues

sur $[0; 1]$, la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n v_n$ est continue sur $[0; 1]$ (on n'en a pas besoin ici). D'après le cours,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}} du = \int_0^1 S(u) du = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n v_n(u) du \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (4n+1)} \text{ car } \int_0^1 u^{4n} du = \frac{1}{4n+1}.$$

D'après **b.**, on en déduit que $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx = 4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}} du = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (4n+1)}$.

On aurait pu montrer cette relation par le théorème d'intégration terme à terme !

37 a. Si $x = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = \frac{(-1)^n}{n}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n(0)$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0. Si $x > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-nx} = 0$ par croissances comparées, on a $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge par le critère de RIEMANN car $2 > 1$. Pour être complet, on peut constater que si $x < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n(x)| = +\infty$ par croissances comparées ce qui prouve que le domaine de définition de S est effectivement $\mathbb{R}_+$. Au final, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. Pour $x \geq 0$, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, positive et tend vers 0 donc, d'après le critère spécial des séries alternées, en posant les restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, on a $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ donc R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{n+1}$. La convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$ est donc uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Comme toutes les u_n sont continues, on en déduit d'après le cours que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on a $u'_n(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx}$. Soit $a > 0$ et $n \geq 1$, $\|u'_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = |u'_n(a)| = e^{-na}$ et $\sum_{n \geq 1} e^{-na}$ converge (série géométrique) donc on a convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ sur $[a; +\infty[$ sachant que toutes les u_n sont de classe C^1 et qu'on a convergence simple (même uniforme et même normale) de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur $[a; +\infty[$. Par un théorème du cours, S est de classe C^1 sur $[a; +\infty[$ pour tout

$a > 0$, donc S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx}$.

d. Pour $x > 0$, $S'(x) = e^{-x} \sum_{p=0}^{+\infty} (-e^{-x})^p = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = (-\ln(1+e^{-x}))'$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $S(x) = k - \ln(1+e^{-x})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ et on a convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$ donc, par double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln(1+e^{-x})) = 0$, ceci impose $k = 0$. Ainsi : $\forall x > 0$, $S(x) = -\ln(1+e^{-x})$.

On pouvait constater, ce qui rend ces dernières questions inutiles, que si $x > 0$, on a $-e^{-x} \in]-1; 1[$ donc, comme on reconnaît le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ qui est de rayon 1, on a directement

$$\ln(1+e^{-x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (e^{-x})^n}{n} = -S(x).$$

e. Comme S est continue en 0 d'après **b.**, on a $S(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln(1+e^{-x})) = -\ln(2)$.

38 a. Par une récurrence simple, on montre que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et positive. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2} \right) - u_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n)(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} + u_n)}{\sqrt{u_n^2 + a_n^2} + u_n} \text{ en}$$

$$\text{multipliant par la quantité conjuguée donc } u_{n+1} - u_n = \frac{a_n^2}{2(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} + u_n)} \leq \frac{a_n}{2} \text{ car } u_n \geq 0.$$

Plus simplement, $u_n^2 + a_n^2 \leq (u_n + a_n)^2$ donc $u_{n+1} \leq \frac{u_n + (u_n + a_n)}{2}$ et on a bien $u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}$.

De plus, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n \right) \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{u_n^2} - u_n \right) = 0$ car $a_n^2 \geq 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b. Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, comme $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}$, par comparaison, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge ce qui prouve, par dualité suite-série, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{n}{n+1}$. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, croissante et elle tend vers 1. Ainsi, comme $(2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2 \geq u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 0$, on peut poser $a_n = \sqrt{(2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2} \geq 0$. On trouve alors $(2u_{n+1} - u_n)^2 = u_n^2 + a_n^2$ ce qui, en passant à la racine (puisque $2u_{n+1} - u_n \geq 0$), montre que $2u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + a_n^2}$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2})$. Dans le cas particulier de cette question,

$a_n = \sqrt{\left(\frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right)^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}} = \sqrt{\left(\frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1}\right)\left(\frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right)}$ par identité remarquable donc $a_n = \frac{2}{n+2}$ après simplifications. Ainsi, $a_n \sim_{+\infty} \frac{2}{n}$ donc $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge par RIEMANN. La réciproque de la question **b.** est donc fausse.

39 a. Avec la condition de l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \left|\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leq \frac{c|x|}{2^n}$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{c|x|}{2^n}$ converge donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ converge absolument donc converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n : x \mapsto \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$, avec la même majoration, comme $|x| \leq a$ pour $x \in I$, on a $\|u_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{ca}{2^n}$ et la série $\sum_{n \geq 0} \frac{ca}{2^n}$ converge comme avant donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur I . Or les u_n sont continues sur I par hypothèse donc, d'après le cours, S est continue sur I .

b. D'après l'hypothèse, comme $0 \in I$, on a $|\varphi(0)| \leq c|0| = 0$ donc $\varphi(0) = 0$. Ainsi, $S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(0) = 0$. De

plus, d'après **a.**, S est continue sur I . Enfin, pour $x \in I$, $S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \varphi(x)$ après simplification. Par conséquent, S est solution de (P).

c. Méthode 1 : soit f une fonction vérifiant (P) et $x \in I, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{x}{2^k} \in I$ donc $f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

En sommant pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on obtient, après télescopage, $f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$ (R). Comme f est continue en 0, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(0) = 0$ donc, en passant à la limite dans (R), on a finalement

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = S(x)$ ce qui assure l'unicité.

Méthode 2 : soit S_1 et S_2 deux solutions de (P). Posons $d = S_1 - S_2$, alors d est continue sur I par opérations, $d(0) = S_1(0) - S_2(0) = 0$ et $\forall x \in I, d(x) - d\left(\frac{x}{2}\right) = S_1(x) - S_1\left(\frac{x}{2}\right) - S_2(x) + S_2\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$. Soit $x \in I$, en itérant la relation $d(x) = d\left(\frac{x}{2}\right)$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}, d(x) = d\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Comme d est continue en 0, en passant à la limite dans cette relation, on a donc $d(x) = d(0)$ donc d est constante. Mais comme on a vu que $d(0) = 0$, la fonction d est nulle sur I .

Ainsi, la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle ce qui assure l'unicité.

d. Comme S est solution de (P) avec la question **b.** et que deux solutions de (P) sont égales d'après la question **c.**, on en déduit que S est la seule solution de (P).

e. Supposons φ de classe C^1 sur I . Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- D'après **a.**, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement (même normalement) sur I .

- Toutes les u_n sont de classe C^1 sur I car φ l'est.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $u'_n(x) = \frac{1}{2^n} \varphi'\left(\frac{x}{2^n}\right)$ or φ' est continue sur le segment I donc elle y est bornée et on peut définir $M = \|\varphi'\|_{\infty, I}$. On a donc $\forall x \in I$, $|u'_n(x)| \leq \frac{M}{2^n}$ donc u'_n est bornée sur I , $\|u'_n\|_{\infty, I} \leq \frac{M}{2^n}$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{M}{2^n}$ converge donc $\sum_{n \geq 0} u'_n$ converge normalement sur I .

Si on suppose φ de classe C^1 sur I , alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est aussi de classe C^1 sur I .

- 40 a.** On a $f_n(0) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{nx^2}{nx} = x$ et, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{nx^3}{nx^2} = x$ donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$.

Si $x \geq 0$, on a $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{nx^2}{1+nx} - x = \frac{nx^2 - x(1+nx)}{1+nx} = \frac{-x}{1+nx}$. par contre, si $x < 0$, il vient $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2} - x = \frac{nx^3 - x(1+nx^2)}{1+nx^2} = \frac{-x}{1+nx^2}$. Une petite étude de la fonction g_n montre que g_n est négative, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et admet pour limite $-\frac{1}{n}$ en $+\infty$. De même, g_n est positive sur $\mathbb{R}_-$, elle est croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{n}}]$ et décroissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{n}}; 0]$. De plus, $g_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. On déduit de tous ces renseignements que g_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} = \text{Max}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$. Ainsi, $\forall n \geq 4$, $\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} = 0$ ce qui montre la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f .

b. Par opérations, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, $\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \frac{nx}{1+nx} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et, si $x < 0$, $\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \frac{nx^2}{1+nx^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$ donc f_n est dérivable en 0 avec $f'_n(0) = 0$. Ainsi, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On calcule, pour $x > 0$, $f'_n(x) = \frac{nx(2+nx)}{(1+nx)^2}$ et, si $x < 0$, $f'_n(x) = \frac{nx^2(3+nx^2)}{(1+nx^2)^2}$. Comme avant, la suite de fonctions $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = 1$ sinon.

c. Les expressions de $f'_n(x)$ de la question précédente montrent que $\lim_{x \rightarrow 0} f'_n(x) = 0 = f'_n(0)$ donc f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car elle l'est par opérations sur $\mathbb{R}^*$. Comme toutes les f'_n sont continues sur $\mathbb{R}$, si on avait convergence uniforme de $(f'_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ (ou sur $[-1; 1]$), on aurait continuité de sa limite, donc continuité de g . NON ! Par l'absurde, $(f'_n)_{n \geq 0}$ ne converge uniformément ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $[-1; 1]$.

- 41 a.** $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]-\infty; 1[$ en la prolongeant par continuité en 0 avec $f(0) = -1$ puisque $\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t$. F est donc la primitive de $-f$ qui s'annule en 0 donc F est au moins définie sur $]-\infty; 1[$.

Si $x = 1$, $f(t) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc f est intégrable sur $[0; 1[$ et $F(1)$ existe par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Par conséquent, le domaine définition de F est $D =]-\infty; 1]$.

b. D'après le cours, $\forall t \in]-1; 1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ donc $-f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ (marche aussi si $t = 0$). Pour $x \in]-1; 1[$, en intégrant terme à terme sur le segment $[0; x]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, il vient $F(x) = \int_0^x (-f(t))dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = S(x)$. Par définition de la convergence d'une intégrale, $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$. Par continuité de F en -1 , on a aussi $F(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} F(x)$.

En posant $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$, on a $\|u_n\|_{\infty, [-1;1]} = \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[-1;1]$ et, puisque toutes les u_n sont continues sur $[-1;1]$, S est continue sur $[-1;1]$ donc $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S(1) = \frac{\pi^2}{6}$ et $F(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = S(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$ (classique en séparant les termes d'indices pairs et impairs).

On a bien $\forall x \in [-1;1]$, $F(x) = S(x)$.

c. Soit $G : [0;1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x)$ si $x \neq 0$ et $G(0) = 0$. Alors, par opérations et comme $\ln(x) \ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées, la fonction G est continue sur $[0;1[$ et dérivable sur $]0;1[$. De plus, F est dérivable sur $]0;1[$ avec $F'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ donc, pour $x \in]0;1[$, $(F(x) + F(1-x) - G(x))' = F'(x) - F'(1-x) - G'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$ avec l'abus de notation usuel. Ainsi, la fonction $x \mapsto F(x) + F(1-x) - G(x)$ est constante sur l'intervalle $]0;1[$, et en utilisant sa continuité en 0, elle vaut donc $F(0) + F(1) - G(0) = F(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

On a donc la relation $\forall x \in]0;1[$, $F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x)$.

42 a. Si $x \in]0;1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \ln(n) = 0^+$ par croissances comparées donc, comme $\ln(x) < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = -\infty$ et la série $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x = 1$, $u_n(1) = 0$ donc $\sum_{n \geq 2} u_n(1)$ converge. Si $x > 1$, $u_n(x) = o(x^{-n})$ donc $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ converge par comparaison aux séries géométriques.

Ainsi, l'ensemble de définition D de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ vaut $D = [1; +\infty[$.

b. Pour $n \geq 2$, u_n est positive et dérivable sur $[1; +\infty[$ et $u'_n(x) = \frac{1-n \ln(x)}{x^{n+1} \ln(n)}$ donc u_n est maximale en $e^{1/n}$ et on a $\|u_n\|_{\infty, D} = u_n(e^{1/n}) = \frac{1}{n \ln(n)}$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est décroissante sur D et qu'une de ses primitives $x \mapsto \ln(\ln(x))$ admet une limite infinie en $+\infty$, la série de BERTRAND $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge par comparaison série-intégrale. Ainsi, $\sum_{n \geq 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D .

Si $a > 1$, il existe $n_0 \geq 2$ tel que $\forall n \geq n_0$, $e^{1/n} \leq a$ d'où, avec ce qui précède, $\|u_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = u_n(a)$. Or $\sum_{n \geq n_0} u_n(a)$ converge donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a; +\infty[$ inclus dans $]1; +\infty[$.

c. Soit $x \in]1; +\infty[$ et $n \geq 1$, alors $0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(k+1)}$ et, pour tout entier $k \geq n$, $\ln(k+1) \leq \ln(n+1)$ donc on peut majorer $0 \leq R_n(x) \leq \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1/x)^k = \frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{(1/x)^n}{\ln(n+1)}$. Or $0 \leq (1/x)^n \leq 1$ et, comme $\forall x > 1$, $\ln(x) \leq x-1$, on a $0 \leq \frac{\ln(x)}{x-1} \leq 1$. Par conséquent, comme $R_n(1) = 0$, on a $\forall x \in D$, $\forall n \geq 1$, $0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.

d. On en déduit que $\|R_n\|_{\infty, D} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, D} = 0$, la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge donc uniformément sur D et, comme toutes les u_n sont continues sur D , la fonction S est continue sur D .

e. Pour $x > 1$, d'après la question précédente, $0 \leq S(x) = R_1(x) \leq \frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{(1/x)}{\ln(2)} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$. Ainsi, la fonction S est intégrable sur D par comparaison à une intégrale de RIEMANN.

- 43 a.** La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN donc $u_n = \frac{1}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ existe pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n^2 \leq (n+1)^2$, on a $\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2} dx \geq \int_{(n+1)^2}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ donc, puisque $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$, on a $u_n \geq u_{n+1}$ donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, positive, et elle tend vers 0 car, en tant que reste d'une intégrale convergente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 0$. Et on a même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Par conséquent, avec le critère spécial de séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.
- b.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \int_0^n e^{-t^2 n^2} dt$ et $x = tn = \varphi(t)$, alors la fonction φ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $[0; n]$ dans $[0; n^2]$ donc, par changement de variable, on a $v_n = \frac{1}{n} \int_0^{n^2} e^{-x^2} dx$ donc, par CHASLES, $v_n = \frac{I}{n} - u_n$ en posant $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (intégrale de GAUSS). Ainsi, on peut écrire $(-1)^n v_n = \frac{(-1)^n}{n} - (-1)^n u_n$. Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$ converge par la question précédente. Par somme, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \int_0^n e^{-t^2 n^2} dt$ converge.

ORAUX 2022 THÈME 4

ESPACES VECTORIELS NORMÉS, GÉOMÉTRIE ET DÉRIVABILITÉ

44 a. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geq 0$ donc, comme

$\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $a < b$ tels que $h(a) = h(b)$ et on aurait $\forall x \in [a; b]$, $h'(x) = 0$, ce qui est impossible car f' ne s'annule qu'en les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c \in]0; 1[$ tel que $h(c) = 0$, donc un unique point fixe c de $\cos$ sur $\mathbb{R}$. On trouve numériquement $c \sim 0,74$.

b. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. En appliquant f , on obtient $f \circ f \circ f = f \circ \cos$ donc $\cos \circ f = f \circ \cos$ ce qui, en c , devient $f(c) = \cos(f(c))$. D'après l'unicité montrée à la question a., on en déduit que $f(c) = c$. Si on dérive $f \circ f = \cos$, on obtient $f' \times (f' \circ f) = -\sin$ ce qui, en c , devient $f'(x_0)^2 = -\sin(c) < 0$ car, comme $c \in]0; 1[\subset]0; \pi[$, on a $\sin(c) > 0$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

45 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$ de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$. Par une petite étude de cette fonction dont le graphe est une parabole, on constate que l'intervalle $[-2; 2]$ est stable par f . En effet, f est paire et croissante sur $[0; 2]$ avec $f(0) = -2$ et $f(2) = 2$.

Méthode 1 cas réel : supposons $a \in \mathbb{R}$ et traitons deux cas :

- si $|a| \leq 2$, comme $] -2; 2[$ est stable par f , $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 2$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- si $|a| > 2$, $u_1 = a^2 - 2 > 2$ et, par une récurrence simple, $\forall n \geq 1$, $u_n > 2$. Or, pour $x > 2$, on a $x^2 - 2 > x$ car $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) > 0$ donc $u_{n+1} = u_n^2 - 2 > u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ , alors en passant à la limite dans la relation de récurrence, on a $\ell^2 = \ell - 2$ donc $\ell = 2$ ou $\ell = -1$, ce qui est absurde car $u_0 = a > 2$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non convergente, elle tend vers $+\infty$ donc n'est pas bornée.

À nouveau, si $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|a| \leq 2$.

Méthode 2 cas réel : supposons $a \in \mathbb{R}$ et traitons trois cas :

- si $a \in [-2; 2]$, il existe un réel θ tel que $a = 2 \cos(\theta)$ car $\cos$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1; 1]$. Ainsi, $a = u_0 = 2 \cos(\theta)$, puis $u_1 = a^2 - 2 = 4 \cos^2(\theta) - 2 = 2 \cos(2\theta)$ et on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \cos(2^n \theta)$ ce qui montre aussi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- Si $a > 2$, comme $\cosh$ est une surjection de $\mathbb{R}^*$ sur $]1; +\infty[$, il existe $t \neq 0$ tel que $a = u_0 = 2 \cosh(t)$ puis $u_1 = a^2 - 2 = 4 \cosh^2(t) - 2 = 2 \cosh(2t)$. À nouveau, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \cosh(2^n t)$ et, comme $t \neq 0$, ceci justifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- Si $a < -2$, il existe $t \neq 0$ tel que $a = u_0 = -2\operatorname{ch}(t)$ puis $u_1 = a^2 - 2 = 4\operatorname{ch}^2(t) - 2 = 2\operatorname{ch}(2t)$. Encore, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2\operatorname{ch}(2^n t)$ et, comme $t \neq 0$, ceci justifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Ainsi, si $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|a| \leq 2$.

Cas complexe non réel : soit maintenant $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On prolonge la fonction $\cos$ à $\mathbb{C}$ en écrivant, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. On va vérifier que cette fonction est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

posons $u = e^{iz} \neq 0$. Alors $\cos(z) = z' \iff \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{u + (1/u)}{2} = z' \iff u^2 - 2z'u + 1 = 0$. D'après

D'ALEMBERT-GAUSS, il existe au moins un complexe u qui soit racine de $P = X^2 - 2z'X + 1$, et ce u est forcément non nul car 0 n'est pas racine de P . Soit donc $u \neq 0$ tel que $u^2 - 2z'u + 1 = 0$. Or l'application $\exp : v \mapsto e^v$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ puisque si $w = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, le complexe $v = \ln(r) + i\theta$ est un antécédent de w par $\exp$ puisque $e^{\ln(r)+i\theta} = e^{\ln(r)} \times e^{i\theta} = re^{i\theta} = w$. Ainsi, soit $v \in \mathbb{C}$ tel que $u = e^v$ et $z = -iv$ de sorte que $v = iz$ et qu'on ait $u = e^{iz}$ puis $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{u + (1/u)}{2} = z' = \cos(z)$.

On a bien établi la surjectivité de $\cos$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Et on vérifie qu'on a toujours, même pour $z \in \mathbb{C}$, la formule $2\cos^2(z) - 1 = 2\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{2e^{2iz} + 4 + 2e^{-2iz} - 4}{4} = \frac{e^{i(2z)} + e^{-i(2z)}}{2} = \cos(2z)$.

Comme $\frac{a}{2} \in \mathbb{C}$ et que $\cos$ est surjective, il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $a = u_0 = 2\cos(b)$. Alors on a comme avant $u_1 = u_0^2 - 2 = 4\cos^2(b) - 2 = 2(2\cos^2(b) - 1) = 2\cos(2b)$ et on démontre, par récurrence, que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos(2^n b)$. Si on avait $b \in \mathbb{R}$, on aurait $a = 2\cos(b) = e^{ib} + e^{-ib} \in \mathbb{R}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, $b = b_1 + ib_2$ avec $b_1 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}^*$ et on a donc $u_n = 2\cos(2^n b) = e^{i2^n b} + e^{-i2^n b}$ qu'on peut aussi écrire $u_n = e^{i2^n b_1 - 2^n b_2} + e^{-i2^n b_1 + 2^n b_2}$. Traitons deux cas :

- si $b_2 > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2^n b_2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{i2^n b_1 - 2^n b_2} = 0$ et $|e^{i2^n b_1 + 2^n b_2}| = e^{2^n b_2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |e^{i2^n b_1 - 2^n b_2}| = +\infty$ ce qui prouve, par somme d'une suite bornée car convergente et d'une suite non bornée, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
- si $b_2 < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2^n b_2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{i2^n b_1 + 2^n b_2} = 0$ et $|e^{i2^n b_1 - 2^n b_2}| = e^{-2^n b_2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |e^{i2^n b_1 + 2^n b_2}| = +\infty$ et à nouveau, par somme d'une suite bornée car convergente et d'une suite non bornée, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Si $a \notin \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est jamais bornée.

On a donc montré que l'ensemble de JULIA associé à la constante $c = -2$ était réduit au segment réel $[-2; 2]$!

46 a. Supposons que f est K -lipschitzienne, alors si $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1$, par télescopage, on peut majorer $\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n (K(t_k - t_{k-1})) = K(t_n - t_0) \leq K$. Ainsi, $V(f) \leq K < +\infty$ et $f \in \text{BV}$.

b. Supposons f croissante (si f est décroissante, on remplace f par $-f$) et si $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1$, on trouve par télescopage $\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t_{k-1})) = f(t_n) - f(t_0) \leq f(1) - f(0)$ donc $V(f) \leq f(1) - f(0) < +\infty$ et $f \in \text{BV}$.

c. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. f est continue par opérations sur $]0; 1]$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue sur $[0; 1]$. Soit $n \geq 2$, $t_k = \frac{1}{(n+1-k)\pi}$ si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

alors $V_n = \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(n-k)\pi} + \frac{1}{(n+1-k)\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ par divergence de la série harmonique. Ainsi, f est continue sur $[0; 1]$ et elle n'appartient pas à BV .

d. Si $f \in BV$ et $t \in [0; 1]$, si $n = 1$, $t_0 = 0$ et $t_1 = t$, $\sum_{k=1}^1 |f(t_k) - f(t_{k-1})| = |f(t_1) - f(t_0)| = |f(t) - f(0)| \leq V(f)$ donc $|f(t)| = |f(t) - f(0) + f(0)| \leq |f(t) - f(0)| + |f(0)| \leq V(f) + |f(0)|$. Ainsi, f est bornée sur $[0; 1]$.

e. D'abord, la fonction nulle $f = 0$ est à variations bornées car dès que $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1$, on a $\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| = 0$ donc $V(f) = 0 < +\infty$. De plus, si on prend un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et un couple $(f, g) \in BV^2$, toujours pour $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1$, on peut majorer par inégalité triangulaire $\sum_{k=1}^n |(\lambda f + g)(t_k) - (\lambda f + g)(t_{k-1})| \leq |\lambda| \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq \lambda V(f) + V(g) < +\infty$ donc $\lambda f + g \in BV$. Ainsi, BV est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0; 1], \mathbb{R})$ donc BV est un espace vectoriel.

Homogénéité : soit $f \in BV$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{k=1}^n |(\lambda f)(t_k) - (\lambda f)(t_{k-1})| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq |\lambda| V(f)$ si $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1$ donc $V(\lambda f) \leq |\lambda| V(f)$. Si $\lambda \neq 0$, on applique ce qui précède à $\frac{1}{\lambda}$ et λf pour avoir $V\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| V(\lambda f)$ donc $V(\lambda f) \geq |\lambda| V(f)$. Ainsi, $V(\lambda f) = |\lambda| V(f)$ qui est aussi vrai si $\lambda = 0$ car $0 = 0$. Ainsi, on a bien l'homogénéité $N(\lambda f) = V(\lambda f) + |(\lambda f)(0)| = |\lambda| V(f) + |\lambda| |f(0)| = |\lambda| N(f)$.

Inégalité triangulaire : on a déjà vu en montrant que BV était un espace vectoriel (en prenant $\lambda = 1$) que $\sum_{k=1}^n |(f+g)(t_k) - (f+g)(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq V(f) + V(g)$ donc on déduit que $V(f+g) \leq V(f) + V(g)$. D'où $N(f+g) = V(f+g) + |(f+g)(0)| \leq V(f) + V(g) + |f(0)| + |g(0)| = N(f) + N(g)$.

Séparation : Si on suppose que $N(f) = 0$, comme $V(f)$ et $|f(0)|$ sont positifs, on en déduit que $V(f) = 0$ et $|f(0)| = f(0) = 0$. Avec l'inégalité de la question **d.**, $\forall t \in [0; 1]$, $|f(t) - f(0)| \leq V(f) = 0$ donc $f(t) = f(0)$ et f est constante. Comme $f(0) = 0$ donc $f(0) = 0$.

On peut donc conclure que N est une norme sur l'espace BV .

f. Soit f et g deux fonctions de BV , on peut définir d'après **d.** les deux réels $A = \|f\|_{\infty, [0; 1]} = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|$ et $B = \|g\|_{\infty, [0; 1]} = \sup_{t \in [0; 1]} |g(t)|$. Si $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1$, en faisant intervenir un terme intermédiaire,

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, |f(t_k)g(t_k) - f(t_{k-1})g(t_{k-1})| = |f(t_k)g(t_k) - f(t_k)g(t_{k-1}) + f(t_k)g(t_{k-1}) - f(t_{k-1})g(t_{k-1})|.$$

Par inégalité triangulaire, $|f(t_k)g(t_k) - f(t_{k-1})g(t_{k-1})| \leq |f(t_k)||g(t_k) - g(t_{k-1})| + |g(t_k)||f(t_k) - f(t_{k-1})|$ donc $|f(t_k)g(t_k) - f(t_{k-1})g(t_{k-1})| \leq A|g(t_k) - g(t_{k-1})| + B|f(t_k) - f(t_{k-1})|$. En sommant, on arrive à majorer $\sum_{k=1}^n |(fg)(t_k) - (fg)(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n (A|g(t_k) - g(t_{k-1})| + B|f(t_k) - f(t_{k-1})|) \leq AV(g) + BV(f)$. Ainsi, $fg \in BV$ et l'espace vectoriel BV est bien stable par produit (on dit que c'est une algèbre).

g. Soit f et g dans BV avec $g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ monotone. Supposons que g est une fonction croissante (sinon on remplace g par $-g \in BV$). Soit $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1$. Comme $g(0) \geq 0$, $g(1) \leq 1$ et g croissante, on a $0 \leq t'_0 = g(t_0) \leq t'_1 = g(t_1) \leq \dots \leq t'_n = g(t_n) \leq 1$. Puisque $f \in BV$, on a la majoration $\sum_{k=1}^n |f \circ g(t_k) - f \circ g(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |f(t'_k) - f(t_{k-1})| \leq V(f)$ donc $f \circ g \in BV$.

h. Soit $g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \in]0; 1]$. Les variations les plus importantes de la fonctions g sont atteintes quand on parcourt tous les creux et bosses de g , g est croissante

sur tout segment $C_n = \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{2n-1}\right]$ pour $n \geq 2$ et elle est décroissante sur tout segment $D_n = \left[\frac{2}{2n+1}; \frac{1}{n}\right]$ avec $n \geq 1$. La variation de g sur C_n est de $\left|g\left(\frac{2}{2n-1}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{4}{(2n-1)^2}$ et celle sur D_n est de $\left|g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{2}{2n+1}\right)\right| = \frac{4}{(2n+1)^2}$. Ainsi, comme $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{4}{(2n+1)^2} + \frac{4}{(2n-1)^2}\right)$ converge par RIEMANN car $\frac{4}{(2n+1)^2} + \frac{4}{(2n-1)^2} \sim \frac{2}{n^2}$, la fonction g est à variation bornée. Prenons maintenant $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors f est croissante donc f appartient à BV d'après **b.** et $f \circ g(x) = x \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ si $x \in]0; 1]$ et on peut montrer comme en question **c.**, que $f \circ g$ n'appartient pas à BV .

Ainsi, la condition "f monotone" n'est pas suffisante pour que $f \circ g \in BV$ si $(f, g) \in BV^2$ avec $g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$.

47 a. La fonction $g_1 : u \mapsto \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_1(u) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$ donc l'intégrale $\int_0^t g_1(u) du$ converge par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Ainsi, f_1 est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par CHASLES, on a $\forall t > 0$, $f_1(t) = \int_0^1 g_1(u) du + \int_1^t g_1(u) du$ et $1 \in \mathbb{R}_+^*$ donc, par le théorème fondamental de l'intégration, f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car g_1 y est continue et on a $f_1'(t) = g_1(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$.

b. Par intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_1(u) du$ a la même nature, puisque les fonction $a : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $b = \sin$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim_{u \rightarrow 0^+} a(u)b(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} a(u)b(u) = 0$ car $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ et que $\sin$ est bornée, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} du$. Mais $\frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{u}}$ et $\frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right)$ donc la fonction $u \mapsto \frac{\sin(u)}{2u^{3/2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN et on en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} du$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$ convergent. Ainsi, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(t) = I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$.

On admet d'après l'énoncé que f_2 est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f_2'(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$ converge et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_2(t) = I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$.

c. D'après le cours, comme $f : t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ est de classe C^1 sur $[t_1; t_2]$, la longueur de l'arc paramétré $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ entre les points de paramètres t_1 et t_2 vaut $L = \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} dt$ donc $L = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_{t_1}^{t_2} = 2\sqrt{t_2} - 2\sqrt{t_1}$.

Cette courbe s'appelle une spirale de CORNU, pour $t = 0$, on est au point $M_0 = f(0) = (0, 0)$, on tend quand t tend vers $+\infty$ vers le point limite $A = (I_1, I_2)$ et on note $M_t = f(t)$. Alors L est la distance entre M_{t_1} et M_{t_2} sur la courbe et cette distance tend vers $+\infty$ quand, par exemple, $t_1 = 0$ et t_2 tend vers $+\infty$.

d. En écrivant $\int_t^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du = I_1 - f_1(t)$ et $\int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du = I_2 - f_2(t)$, F est de classe C^1 par opérations et $F'(t) = -2f_1'(t)(I_1 - f_1(t)) - 2f_2'(t)(I_2 - f_2(t)) = -\frac{2\cos(t)}{\sqrt{t}} \int_t^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du - \frac{2\sin(t)}{\sqrt{t}} \int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$ qu'on regroupe en $F'(t) = -\frac{2}{\sqrt{t}} \int_t^{+\infty} \frac{\cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)}{\sqrt{u}} du = -2 \int_t^{+\infty} \frac{\cos(u-t)}{\sqrt{u}} du$. On pose $u = x + t = \varphi(x)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[t; +\infty[$ et on a par changement de variable $F'(t) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{t^2 + tx}} dx$ comme attendu.

e. Si $(a, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $u \mapsto \frac{\cos(u)}{\sqrt{a + tu}}$ est continue sur le segment $[0; \pi]$ donc l'intégrale $I = \int_0^\pi \frac{\cos(u)}{\sqrt{a + tu}} du$

existe. On écrit pose $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}} du + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}} du$ et on pose $u = \pi - v = \varphi(v)$ avec φ de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui donne par changement de variable $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}} du + \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos(\pi-v)}{\sqrt{a+t\pi-tv}} (-dv)$ qu'on regroupe, puisque $\cos(\pi-v) = -\cos(v)$ en $I = \int_0^{\pi/2} \cos(u) \left(\frac{1}{\sqrt{a+tu}} - \frac{1}{\sqrt{a+t\pi-tu}} \right) du$. Or $\cos$ et $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{a+tu}} - \frac{1}{\sqrt{a+t\pi-tu}}$ sont continues et strictement positives sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ où $u < \pi - u$ donc $I > 0$.

f. Par CHASLES, $F'(t) = -2 \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{t^2+tx}} dx$ et, en posant dans chaque intégrale le changement de variable $x = s + k\pi$, on obtient $F'(t) = -2 \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos(u+k\pi)}{\sqrt{t^2+t(s+k\pi)}} du = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\cos(s)}{\sqrt{t^2+k\pi+ts}} ds$.

Posons $u_k = \int_0^{\pi} \frac{\cos(s)}{\sqrt{t^2+k\pi+ts}} ds = \int_0^{\pi/2} \cos(u) \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+k\pi+tu}} - \frac{1}{\sqrt{t^2+(k+1)\pi+tu}} \right) du$, alors $u_k > 0$

d'après **e.** et $(u_k)_{k \geq 0}$ est strictement décroissante car $\frac{1}{\sqrt{t^2+k\pi+tu}} - \frac{1}{\sqrt{t^2+(k+1)\pi+tu}}$ vaut, avec

la quantité conjuguée, $\frac{\pi}{\sqrt{t^2+k\pi+tu} \sqrt{t^2+(k+1)\pi+tu} (\sqrt{t^2+k\pi+tu} + \sqrt{t^2+(k+1)\pi+tu})}$ et cette

quantité décroît strictement quand k augmente pour toute valeur de $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Par le critère spécial des

séries alternées, $F'(t) = -2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est du signe du premier terme de cette série, donc $F'(t) < 0$ car

$-2u_0 < 0$, ce qui prouve que F est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

48

49 a. x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ donc le domaine de définition de cet arc est $\mathbb{R}$. Réduisons le domaine d'étude :

- Les fonctions x et y sont 2π -périodiques donc on n'étudie cet arc que pour $t \in [-\pi; \pi]$ et on repassera une infinité de fois en chaque point (sans pour autant dire que ce sont des points multiples).
- x est paire et y est impaire donc on peut n'étudier cet arc que pour $t \in [0; \pi]$ et on obtiendra toute la courbe en effectuant une symétrie orthogonale de la courbe obtenue par rapport à la droite (Ox) .
- $\forall t \in [0; \pi], x(\pi-t) = -x(t)$ et $y(\pi-t) = -y(t)$ donc on peut n'étudier cet arc que pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

et on obtiendra toute la courbe en effectuant une symétrie centrale par rapport à O .

b. Comme x et y sont dérivables et qu'on a $x'(t) = -3 \sin(3t)$ et $y'(t) = 2 \cos(2t)$, la fonction x est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction y est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Les fonctions x' et y' ne s'annulent pas en même temps donc il n'y a pas de point stationnaire, par

contre, la courbe admet des tangentes horizontales en le point $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ pour $t = \frac{\pi}{4}$ quand y' s'annule, et

des tangentes verticales $(1, 0)$ et $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{3}$ quand x' s'annule. Bien sûr, par symétrie, on obtient d'autres points à tangente horizontale ou verticale.

c. On trace le tableau de variations de x et y et on relie les points pour avoir la courbe avec les symétries vues précédemment. Γ est une courbe de LISSAJOUS.

La voir sur Wolfram en tapant $(\cos(3t), \sin(2t))$ dans "parametric plot".

ORAUX 2022 THÈME 5

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

51 Analyse : Soit E un tel sous-espace. Distinguons selon la dimension $d = \dim(E)$.

- Dans le cas où $d = 0$, on a $E = \{0\}$ donc $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$.
- Dans le cas où $d = 1$, E est une droite qu'on peut écrire $E = \text{Vect}(A)$ avec $A \neq 0$ et, comme $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$, on a forcément A inversible sinon A appartiendrait à $E \setminus GL_n(\mathbb{C})$. Toutes les matrices non nulles de E s'écrivent αA avec $\alpha \neq 0$ donc elles sont inversibles car $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) \neq 0$.
- Dans le cas où $d \geq 2$, E contient au moins un plan $F = \text{Vect}(C, D)$ avec (C, D) libre. Comme avant, les matrices C et D sont forcément inversibles puisque sinon l'une d'entre elles ferait partie de $E \setminus GL_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A = \lambda C - D$, alors $\det(A) = \det(\lambda C - D) = \det(C(\lambda I_n - C^{-1}D))$ donc $\det(A) = \det(C)\det(\lambda I_n - C^{-1}D) = \det(C)\chi_M(\lambda)$ où $M = C^{-1}D$. Or le polynôme χ_M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS car $\deg(\chi_M) = n \geq 1$, il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_M(\lambda_0) = 0$ ce qui montre que la matrice $A = \lambda_0 C - D$ n'est pas inversible puisque $\det(A_0) = 0$ et pourtant elle est non nulle car (C, D) est libre. Ainsi, $A_0 \in E \setminus GL_n(\mathbb{C})$ ce qui fournit une contradiction.

Synthèse : réciproquement, $E = \{0\}$ ou $E = \text{Vect}(A)$ avec A inversible vérifient la condition $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$. Par double implication, les seuls sous-espaces E de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$ sont le sous-espace $\{0\}$ réduit au vecteur nul (de dimension 0) ou toutes les droites $\text{Vect}(A)$ avec A inversible (de dimension 1).

52 a. • Si n est pair, en notant $2p = \deg(P)$ et $P = \sum_{k=0}^{2p} a_k X^k$ avec $a_{2p} \neq 0$, on a $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_{2p} x^{2p}$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = +\infty$ si $a_{2p} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = -\infty$ si $a_{2p} < 0$. Supposons $a_{2p} > 0$ (le cas $a_{2p} < 0$ se traite en remplaçant P par $-P$) de sorte que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = +\infty$. Par définition de la limite, pour $\varepsilon = 1$ par exemple, il existe $a < 0$ tel que $\forall x \leq a$, $P(x) \geq 1$ et il existe $b > 0$ tel que $\forall x \geq b$, $P(x) \geq 1$. Comme P est continue sur le segment $[a; b]$, elle y est bornée et y atteint sa bornée inférieure $m = \min_{x \in [a; b]} P(x)$. En posant $c = \min(1, m)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq c$ puisque $P(x) \geq 1 \geq c$ si $x \in]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$ et $P(x) \geq m \geq c$ si $x \in [a; b]$. Ainsi, $P(\mathbb{R}) \subset [c; +\infty[$ donc P n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

• Si n est impair, en notant $2p+1 = \deg(P)$ et $P = \sum_{k=0}^{2p+1} a_k X^k$ avec $a_{2p+1} \neq 0$, on a $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_{2p+1} x^{2p+1}$ ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ si $a_{2p+1} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty$ si $a_{2p+1} < 0$. Supposons que $a_{2p+1} > 0$ (l'autre cas est symétrique), soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall y \leq a$, $P(y) \leq x - 1$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$) et $\forall y \geq b$, $P(y) \geq x + 1$ (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$). Comme $P(a) \leq x \leq P(b)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists z \in \mathbb{R}$ tel que $P(z) = x$. Ainsi, P est surjective. Par conséquent, P est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement son degré est impair.

b. Si $\deg(P) \leq 0$, P est constant donc P n'est pas injectif. Supposons maintenant P non constant donc $\deg(P') \geq 0$, c'est-à-dire $P' \neq 0$. Comme P est continue sur un intervalle, on sait d'après le cours que

P est injective si et seulement si P est strictement monotone. Décomposons le polynôme P' en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ en écrivant $P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{2m_k} \prod_{k=1}^s (X - \beta_k)^{2n_k+1} \prod_{k=1}^t (X^2 + a_k X + b_k)^{p_k}$ où $\lambda \neq 0$, $(r, s, t) \in \mathbb{N}^3$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines réelles de P' de multiplicités paires $2m_1, \dots, 2m_r$, $\beta_1, \dots, \beta_s$ les racines réelles de P' de multiplicités impaires et $X^2 + a_1 X + b_1, \dots, X^2 + a_t X + b_t$ les diviseurs irréductibles de degré 2 (avec a_k, b_k réels et $a_k^2 - 4b_k < 0$). Si on avait $s \geq 1$, alors P' changerait de signe au voisinage de β_1 , ce qui contredirait la monotonie de P' . Réciproquement, si $s = 0$, P' est du signe de $\lambda \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en des points isolés (pas sur un vrai intervalle), et ceci montre que P est bien injective sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, P est injective sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P' n'a aucune racine réelle de multiplicité impaire.

c. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$. Traitons plusieurs cas :

- si P admet deux racines réelles distinctes α et β , alors $P = (X - \alpha)(X - \beta)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, et on a donc $P(A) = f(A) = f(B) = P(B) = 0$ si $A = \alpha I_2$ et $B = \beta I_2$. Comme $A \neq B$, f n'est pas injective.
- si P admet une racine double réelle α , alors $P = (X - \alpha)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, si $A = \alpha I_2$ et $B = \alpha I_2 + E_{1,2}$, on a $P(A) = f(A) = f(B) = P(B) = 0$ car $E_{1,2}^2 = 0$. Comme $A \neq B$, f n'est pas injective.
- si P admet une racine complexe non réelle $z = z_1 + iz_2$ (avec $z_2 \neq 0$), donc que $P = (X^2 + aX + b)Q$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 - 4b < 0$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $z^2 + az + b = 0$, en posant $A = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix}$ (analogue des matrices de rotations), on a $A^2 = \begin{pmatrix} z_1^2 - z_2^2 & -2z_1 z_2 \\ 2z_1 z_2 & z_1^2 - z_2^2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 + aA + bI_2 = 0$ car $z_1^2 - z_2^2 + 2iz_1 z_2 + az_1 + iaz_2 + b = 0$. De même, $B^2 + aB + bI_2 = 0$ si $B = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $P(A) = f(A) = f(B) = P(B) = 0$ et, comme $A \neq B$, f n'est pas injective.

Comme tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 est de l'une des trois formes précédentes, on en déduit que si $\deg(P) \geq 2$, l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = P(M)$ n'est pas injective.

d. .

53

54

55 a. Comme $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ est scindé d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, on sait que A est trigonalisable

et semblable à $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p)$ où chaque valeur propre λ_i est répétée n_i fois si n_i est la multiplicité de λ_i dans le polynôme χ_A . Pour $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est semblable à la matrice D^k donc $\text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^p n_i \lambda_i^k = n_1 \lambda_1^k \left(1 + \sum_{i=2}^p \frac{n_i}{n_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\right)$. Par hypothèse, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \sum_{i=2}^p \frac{n_i}{n_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\right) = 1$ car $\forall i \in \llbracket 2; p \rrbracket$, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ donc $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq k_0$, $\left|\sum_{i=2}^p \frac{n_i}{n_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\right| \leq \frac{1}{2}$ ce qui prouve que $\forall k \geq k_0$, $\text{Tr}(A^k) \neq 0$.

Alors, pour $k \geq k_0$, $t_k = \frac{\text{Tr}(A^{k+1})}{\text{Tr}(A^k)}$ est bien défini.

On a même $\text{Tr}(A^k) \underset{+\infty}{\sim} n_1 \lambda_1^k$ donc $t_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{n_1 \lambda_1^{k+1}}{n_1 \lambda_1^k} = \lambda_1$ ce qui prouve que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = \lambda_1$.

b. Prenons par exemple $n = p = 2$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ avec $A^{2k} = I_2$ et

$A^{2k+1} = A$. Ainsi, comme $\text{Tr}(A) = 0$, on ne peut pas définir t_k si k est impair.

Cela vient du fait que, dans ce cas particulier, $|\lambda_1| = |1| = 1 = |-1| = |\lambda_2|$.

c. On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 2 & X-3 & -1 \\ -4 & 4 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 4 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)[(X-3)(X+1) - 4] = (X-1)^3$

donc $\text{Sp}(A) = \{1\}$ et on n'est pas dans le cas de la question a.. Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, on a

$\text{rang}(A - I_3) = 1$ donc $\dim(\text{Ker}(A - I_3)) = 2$ d'après la formule du rang et, clairement, $E_1(A) = \text{Vect}(v_1, v_2)$

en posant $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (0, 1, -2)$. Comme $E_1(A) \neq \mathbb{C}^3$, A n'est pas diagonalisable mais elle est

trigonalisable car χ_A est scindé (dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$). Cherchons un vecteur v_3 tel que $Av_3 = v_2 + v_3$,

ou encore $(A - I_3)v_3 = v_2$ et on constate sur la troisième colonne de la matrice ci-dessus que $v_3 = (0, 0, 1)$

convient. Comme $v_3 \notin E_1(A) = \text{Vect}(v_1, v_2)$, on a (v_1, v_2, v_3) libre donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de

$\mathbb{C}^3$ et, par construction, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$ si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A . Par formule de

changement de base, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a $A = PTP^{-1}$

donc A et T sont semblables.

d. Comme $T = I_3 + E_{2,3}$ et $I_3 E_{2,3} = E_{2,3} I_3$, par le binôme de NEWTON, on a $T^k = (I_3 + E_{2,3})^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} E_{2,3}^i$.

Mais $E_{2,3}^2 = 0$ donc $T^k = I_3 + kE_{2,3}$. Comme $A^k = PT^kP^{-1}$, on a $A^k = P(I_3 + kE_{2,3})P^{-1} = I_3 + kPE_{2,3}P^{-1}$.

Mais $E_{2,3} = T - I_3$ donc $PE_{2,3}P^{-1} = P(T - I_3)P^{-1} = A - I_3$, ce qui montre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k}{k} = A - I_3$ car on

a $\frac{A^k}{k} = \frac{I_3 + k(A - I_3)}{k} = A - I_3 + \frac{I_3}{k}$. On pouvait directement effectuer le binôme avec $A = I_3 + (A - I_3)$

sachant que les matrices I_3 et $A - I_3$ commutent et que $A - I_3$ est nilpotente d'indice 2.

56 a. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, par composition, $P(X+1)$ est aussi un polynôme réel. De plus, si $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

alors $f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) = \lambda f(P) + f(Q)$ donc f est linéaire. Ainsi, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. Comme $g = f - \text{id}_{\mathbb{R}[X]}$, g est aussi un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

• Soit $P \in \text{Ker}(g)$, alors $P(X+1) = P(X)$, si P admet une racine complexe α , alors $P(\alpha) = 0 = P(\alpha+1)$ donc $\alpha+1$ est aussi racine et, par une récurrence aisée, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha+n$ est racine de P ce qui donnerait une infinité de racines pour P . NON ! Ainsi, P n'admet pas de racine complexe ce qui impose que P est constant d'après D'ALEMBERT-GAUSS. Réciproquement, si $P = \lambda \in \mathbb{R}_0[X]$, $f(P) = P$ donc $g(P) = 0$ et $P \in \text{Ker}(g)$.

• Soit $Q \neq 0 \in \mathbb{R}[X]$ et $n = \deg(Q) \in \mathbb{N}$, si $P \in \mathbb{R}[X]$, les termes de plus haut degré de $P(X+1)$ et $P(X)$ sont les mêmes donc $\deg(g(P)) < \deg(P)$. Ainsi, l'application $g_n : \mathbb{R}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $g_n(P) = g(P)$ est bien définie et elle est linéaire par linéarité de g . D'après la formule du rang, $\text{rang}(g_n) + \dim(\text{Ker}(g_n)) = n+2$.

Or $\text{Ker}(g_n) = \text{Ker}(g) \cap \mathbb{R}_{n+1}[X] = \mathbb{R}_0[X]$ donc $\text{rang}(g_n) = n+1$ ce qui montre que g_n est surjective. Ainsi, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $g_n(P) = g(P) = Q$. On peut donc conclure à la surjectivité de g .

Au final, on a $\text{Ker}(g) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\text{Im}(g) = \mathbb{R}[X]$.

c. Puisque g est surjective, g^k est aussi surjective donc $\text{Im}(g^k) = \mathbb{R}[X]$.

Pour les noyaux itérés, on effectue une récurrence sur k . Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\text{Ker}(g^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$, on a déjà vu que $\deg(g(P)) < \deg(P)$ donc $g(P) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, ce qui, par hypothèse de récurrence, montre que $g(P) \in \text{Ker}(g^k)$, donc que $P \in \text{Ker}(g^{k+1})$. Réciproquement, soit $P \in \text{Ker}(g^{k+1})$, ceci s'écrit aussi $g^k(g(P)) = 0$ donc $g(P) \in \text{Ker}(g^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Si P non constant, en écrivant $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ avec $\deg(P) = d \geq 1$ donc $a_d \neq 0$, $g(P) = P(X+1) - P(X) = \sum_{i=0}^d a_i (X+1)^i - \sum_{i=0}^d a_i X^i = \sum_{i=0}^d a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} X^j \right)$ par le binôme de NEWTON donc $g(P)$ est de degré $d-1$ avec un terme en X^{d-1} qui est $da_d \neq 0$. Ainsi, $\deg(g(P)) \leq k-1$ montre que $\deg(P) \leq k$ ou encore que $P \in \mathbb{R}_k[X]$. Par double inclusion, $\text{Ker}(g^{k+1}) = \mathbb{R}_k[X]$. Par principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Ker}(g^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

d. Puisque $\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $f(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i$, on a $A = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$. Comme A est triangulaire supérieure avec des 1 = $\binom{k}{k}$ sur la diagonale, on a $\det(A) = 1$. Ainsi, $\text{Sp}(A) = \{1\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice diagonale n'ayant que des 1 sur la diagonale, c'est-à-dire I_{n+1} , on aurait donc $A = I_{n+1}$ ce qui est faux puisque $n \geq 1$. Par conséquent, A n'est pas diagonalisable.

e. Comme $B = A^t A$, $B^{-1} = ({}^t A)^{-1} A^{-1} = {}^t(A^{-1}) A^{-1}$. Or on a clairement $f^{-1} : P \mapsto P(X-1)$ donc A^{-1} est la matrice de la famille $((X-1)^j)_{0 \leq j \leq n}$ écrite dans la base canonique, c'est-à-dire $A^{-1} = \left((-1)^{i+j} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$ car $(X-1)^j = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i$ et $(-1)^{j-i} = (-1)^{j+i}$. Si $B^{-1} = (c_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$, par définition du produit matriciel $c_{i,j} = \sum_{k=0}^n (-1)^{i+k} \binom{i}{k} (-1)^{k+j} \binom{j}{k}$. Comme B et B^{-1} sont symétriques, on peut se contenter de ne considérer que le cas $i \leq j$, $c_{i,j} = \sum_{k=0}^i (-1)^{i+2k+j} \binom{i}{k} \binom{j}{k} = (-1)^{i+j} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{j}{j-k} = (-1)^{i+j} \binom{i+j}{j}$ d'après la formule de VANDERMONDE qui se montre en identifiant le terme en X^j , par le binôme de NEWTON, dans la relation $\sum_{k=0}^{i+j} \binom{i+j}{k} X^k = (X+1)^{i+j} = (X+1)^i (X+1)^j = \left(\sum_{k_1=0}^i \binom{i}{k_1} X^{k_1} \right) \left(\sum_{k_2=0}^j \binom{j}{k_2} X^{k_2} \right)$.

Questions de cours :

- Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance finie et $\varepsilon > 0$, alors l'inégalité de MARKOV annonce que $\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$.
- Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 et $\varepsilon > 0$, alors l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV est $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.
- Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E , alors χ_u est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et il existe une base orthonormale de E formée par des vecteurs propres de u , en particulier l'endomorphisme u est diagonalisable.

57 a. L'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est clairement dans C car $0 = 0^T$.

Soit $(f_1, f_2) \in C^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, alors on a $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in C$ car pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(M^T) = \lambda_1 f_1(M^T) + \lambda_2 f_2(M^T) = \lambda_1 f_1(M)^T + \lambda_2 f_2(M)^T = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(M)^T$. Ainsi, C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donc est lui-même un espace vectoriel.

b. ($\implies$) Soit $f \in C$. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $f(M) = f(M^T) = f(M)^T$ car $f \in C$ donc $f(M)$ est symétrique. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $f(A) = f(-A^T) = -f(A^T) = -f(A)^T$ car $f \in C$ donc $f(A)$ est antisymétrique.

Ainsi, $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par f .

($\Leftarrow$) Si $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est tel que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par f , soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on décompose $M = S + A$ avec $S = \frac{M+M^T}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ et $A = \frac{M-M^T}{2} \in A_n(\mathbb{R})$, comme f est linéaire, $f(M^T) = f((S+A)^T) = f(S-A) = f(S) - f(A)$ et, comme $f(S) = f(S)^T$ car $f(S)$ symétrique et $f(A)^T = -f(A)$ car $f(A)$ antisymétrique, on a $f(M^T) = f(S)^T + f(A)^T = (f(S) + f(A))^T = f(M)^T$ par linéarité de la transposée. Par double implication, $f \in C$ si et seulement si $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par f .

c. On a $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$. Soit une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}), \text{ alors } f \in C \iff \left(\exists (U, V) \in \mathcal{M}_{\frac{n(n+1)}{2}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R}), \text{ Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right)$$

d'après la question précédente et la traduction matricielle de ces stabilités. On peut prendre par exemple $\mathcal{B} = (E_{1,1}, \dots, E_{n,n}, E_{1,2} + E_{2,1}, \dots, E_{n-1,n} + E_{n,n-1}, E_{1,2} - E_{2,1}, \dots, E_{n-1,n} - E_{n,n-1})$. On a donc défini une application $\varphi : \mathcal{M}_{\frac{n(n+1)}{2}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R}) \rightarrow C$ par $\varphi(U, V) = f$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$. Ce qui précède montre que φ est un isomorphisme donc $\dim(C) = \dim\left(\mathcal{M}_{\frac{n(n+1)}{2}}(\mathbb{R})\right) + \dim\left(\mathcal{M}_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R})\right)$ et on a donc $\dim(C) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$.

d. Soit $n \geq 2$ et $f \in C$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = E_{1,2}$, c'est-à-dire $f = \varphi^{-1}(E_{1,2})$. On a $f^2 = 0$ alors que $f \neq 0$, comme 0 est la seule valeur propre de f , on a $\chi_f = X^{n^2}$ mais $\text{rang}(f) = 1$ donc $\dim(E_0(f)) = n^2 - 1 < n^2$ donc f n'est pas diagonalisable.

58 a. Après calculs, on a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -3 & 0 \\ -3 & X+2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X-3)(X+4)$ donc $\text{Sp}(A) = \{-4, 1, 3\}$. Comme

χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\mathbb{K}^3 = E_1(A) \oplus E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$. On peut aussi dire que A est symétrique et réelle donc, d'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc a fortiori dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toujours avec le théorème spectral, les sous-espaces propres de A sont des supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

On résout les trois systèmes $AX = X$, $AX = 3X$ et $AX = -4X$ avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ pour trouver les trois droites propres $E_1(A) = \text{Vect}(v_1)$, $E_3(A) = \text{Vect}(v_2)$ et $E_{-4}(A) = \text{Vect}(v_3)$ avec $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (3, 2, -1)$ et $v_3 = (3, -5, -1)$ (on constate que ces vecteurs sont bien orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$). On a donc diagonalisé A en

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ par formule de changement de base.}$$

Méthode 1: $F = \{0\}$ et $F = \mathbb{K}^3$ sont clairement des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A et il n'y a pas d'autres sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ de dimension 0 ou 3. On sait que les droites stables sont celles qui sont engendrées par des vecteurs donc il y a trois droites stables : $F = E_1(A_F)$ ou $F = E_3(A_F)$ ou $F = E_{-4}(A_F)$. Comme, A est symétrique, les orthogonaux des sous-espaces stables par A le sont aussi. Ainsi, il existe exactement trois plans stables qui sont $F = E_1(A_F)^\perp$ ou $F = E_3(A_F)^\perp$ ou $F = E_{-4}(A_F)^\perp$, c'est-à-dire $F = E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$, $F = E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ ou $F = E_1(A) \oplus E_3(A)$.

Méthode 2: Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}^3$ stable par A , alors A induit sur F un endomorphisme qu'on sait

être diagonalisable d'après le cours. On sait aussi que χ_{A_F} divise χ_A . Traitons alors plusieurs cas :

- si $\dim(F) = 0$, alors $F = \{0\}$.
- si $\dim(F) = 1$, alors on ne peut avoir que $\chi_{A_F} = X - 1$ ou $\chi_{A_F} = X - 3$ ou $\chi_{A_F} = X + 4$ car $\deg(\chi_{A_F}) = 1$. Comme A_F est diagonalisable, F est la somme de ses sous-espaces propres et on a donc $F = E_1(A_F)$ ou $F = E_3(A_F)$ ou $F = E_{-4}(A_F)$. Mais, par exemple si $\chi_{A_F} = X - 1$, 1 est valeur propre de A_F donc $v_1 \in F$ et on a $F = \text{Vect}(v_1) = E_1(A)$. Ainsi, on a $F = E_1(A)$ ou $F = E_3(A)$ ou $F = E_{-4}(A)$.
- si $\dim(F) = 2$, alors on ne peut avoir que $\chi_{A_F} = (X - 1)(X - 3)$ ou $\chi_{A_F} = (X - 1)(X + 4)$ ou $\chi_{A_F} = (X - 3)(X + 4)$ car $\deg(\chi_{A_F}) = 2$. A_F est diagonalisable donc F est la somme de ses sous-espaces propres et on a donc $F = E_1(A) \oplus E_3(A)$ (car v_1 et v_2 sont forcément dans F puisque 1 et 3 sont valeurs propres de A_F) ou $F = E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ (idem v_1 et v_3 sont dans F) ou $F = E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$.
- si $\dim(F) = 3$, alors $F = \mathbb{K}^3$.

La méthode 1 utilise la propriété de symétrie de A (mais seulement dans $\mathbb{R}^3$) alors que la méthode 2 est plus générale pour trouver les sous-espaces stables par un endomorphisme (ou une matrice).

Réciproquement, ces huit sous-espaces de $\mathbb{K}^3$ sont stables par A car ils possèdent tous une base de vecteurs propres de A . Il existe donc exactement 8 sous-espaces de $\mathbb{K}^3$ stables par A .

b. La matrice 0 appartient à $C(A)$ donc $C(A) \neq \emptyset$ et $C(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $(M, N) \in C(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$ donc $\lambda M + N \in C(A)$. Ainsi, $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc lui-même un espace vectoriel.

De plus, $A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$ par associativité du produit matriciel donc $C(A)$ est aussi stable par produit. Comme $I_3 \in C(A)$, $C(A)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Méthode 1 : Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et $N = P^{-1}MP$, alors $M \in C(A) \iff AM = MA$ ce qui donne en remplaçant $M \in C(A) \iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \iff DN = ND$. Si on effectue les calculs ND et DN et qu'on identifie, on trouve sans peine que $M \in C(A) \iff N$ est diagonale.

Méthode 2 : Si $M \in C(A)$, les sous-espaces propres de A sont stables par M , ce qui prouve que l'on a $Mv_1 \in \text{Vect}(v_1)$, $Mv_2 \in \text{Vect}(v_2)$ et $Mv_3 \in \text{Vect}(v_3)$ donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $Mv_1 = \alpha_1 v_1$, $Mv_2 = \alpha_2 v_2$ et $Mv_3 = \alpha_3 v_3$. Ainsi, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M et que

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3), \text{ comme } N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3), \text{ on a } M = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Comme $\varphi : u \mapsto P u P^{-1}$ est clairement un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et que la dimension du sous-espace des matrices diagonales vaut 3, alors $\dim(C(A)) = 3$.

c. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc $M \in C(A)$. Ainsi, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale. Or $M^2 = A$ équivaut à $D'^2 = D$ ce qui est impossible car $-4 < 0$ ne peut être le carré d'un réel. Par contre, pour le cas complexe, si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc $M \in C(A)$. Ainsi, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ diagonale. Or $M^2 = A$ équivaut à $D'^2 = D$ et, en écrivant $D' = \text{diag}(\alpha \ \beta \ \gamma)$, $D'^2 = D$ implique $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 3$ et $\gamma^2 = -4$ et on a donc 8 matrices D' qui conviennent, ce sont les $D' = \text{diag}(\pm 1 \ \pm \sqrt{3} \ \pm 2i)$. , il existe exactement huit matrices complexes qui vérifient $M^2 = A$,

ce sont les matrices $M = P \operatorname{diag}(\pm 1 \pm \sqrt{3} \pm 2i) P^{-1}$.

59 a. Si A est diagonalisable, en notant $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, il existe une matrice inversible $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$

et une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Alors on a classiquement $A^3 = PD^3P^{-1}$ donc $B = PD^3P^{-1} + PDP^{-1} + PP^{-1} = P(D^3 + D + I_n)P^{-1}$ et la matrice $D' = D^3 + D + I_n = \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n), \dots, f(\lambda_n))$ est diagonale avec $f : x \mapsto x^3 + x + 1$.

Or la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc elle y est strictement croissante et on a clairement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. On conclut avec le théorème de la bijection que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc que le spectre de B contient autant de valeurs propres que celui de A , c'est-à-dire qu'on a $\operatorname{Sp}(B) = \{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_r)\}$ (pas de répétition).

Soit L le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $L(f(\lambda_k)) = \lambda_k$; on sait que $L = \sum_{k=1}^r \lambda_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r \frac{X - f(\lambda_i)}{f(\lambda_k) - f(\lambda_i)}$ (voilà pourquoi on a besoin de l'injectivité de f sur $\mathbb{R}$) mais l'expression importe peu ! Alors $L(B) = PL(D')P^{-1} = P \operatorname{diag}(L(f(\lambda_1)), \dots, L(f(\lambda_1)), \dots, L(f(\lambda_n)), \dots, L(f(\lambda_n)))P^{-1}$ ce qui donne $L(B) = PDP^{-1} = A$ comme attendu.

b. Le problème dans $\mathbb{C}$ vient de la non injectivité de f même si elle reste surjective d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. Le polynôme $Q = X^3 + X + 1$ (associé à la fonction polynomiale f) admet trois racines complexes. Comme $Q' = 3X^2 + 1$ s'annule en $\pm \frac{i}{\sqrt{3}}$ et que ces deux valeurs ne sont pas des racines de Q , Q n'admet que des racines simples α, β et γ . Posons par exemple $A = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \dots, \alpha)$ (matrice diagonale avec un mélange des racines de Q). Alors $B = \operatorname{diag}(Q(\alpha), Q(\beta), Q(\alpha), \dots, Q(\alpha)) = 0$ et, quel que soit le polynôme $U = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a donc $U(B) = a_0 I_n \neq A$ car $\alpha \neq \beta$.

Ainsi, on peut trouver des matrices diagonalisables $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles qu'en posant $B = A^3 + A + I_n$, la matrice A ne puisse pas s'exprimer comme un polynôme en B .

60 • Si $n = 1$ et $A = (a) \neq 0$, $B = (b) \neq 0$, alors $ABAB = (a^2 b^2) \neq 0$. Rien à signaler.

• Si $n = 2$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ telles que $ABAB = 0$, alors la matrice AB est nilpotente d'indice inférieur ou égal à 2. Mais on a aussi $(BA)^3 = BABABA = B(ABAB)A = B0A = 0$ donc BA est aussi nilpotente. Comme X^3 est annulateur de BA , on sait d'après le cours que $\operatorname{Sp}(BA) \subset \{0\}$ car 0 est la seule racine de X^3 . Mais comme le spectre complexe est non vide d'après D'ALEMBERT-GAUSS, on a donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(BA) = \{0\}$ ce qui montre que $\chi_{BA} = X^2$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a donc $(BA)^2 = 0$ donc $BABA = 0$.

• Si $n = 3$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ telles que $ABAB = 0$, alors AB est nilpotente et, comme avant BA l'est aussi. Mais la même démarche conduit à $(BA)^3 = 0$, on va construire un exemple tel que l'indice de nilpotente de

AB soit 2, et celui de BA soit supérieur ou égal à 3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,3}$, alors $N^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $N^3 = 0$ donc N est nilpotente d'indice 3. On cherche A et B non nulles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $BA = N$ alors que $(AB)^2 = 0$. Si on prend $A = N = E_{1,2} + E_{2,3}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,2} = N'$, alors on a

comme attendu $BA = N$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$ donc $BABA = E_{1,3} \neq 0$ alors que $ABAB = 0$.

• Si $n \geq 4$, on construit par blocs $A = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0_{n-3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} N' & 0 \\ 0 & 0_{n-3} \end{pmatrix}$ et on a comme dans le cas $n = 3$, par des calculs par blocs, $AB = E_{1,2}$, $BABA = E_{1,3} \neq 0$ alors que $ABAB = 0$.

61 a. u et v ont bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même et sont clairement linéaires. Ainsi, u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $u^2(M) = u(u(M)) = u(MA) = (MA)A = MA^2 = MA = u(M)$. Ainsi, u est aussi un projecteur ce qui prouve que u est diagonalisable car le polynôme scindé à racines simples $P = X(X - 1) = X^2 - X$ annule u . De même, $v^2 = v$ donc v est aussi diagonalisable.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \neq 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $w(M) = AM - MA = \lambda M$ (E). En multipliant par A à gauche (resp à droite), comme $A^2 = A$, on a $AM - AMA = \lambda AM$ (1) (resp. $AMA - MA = \lambda MA$ (2)). Avec (1) et (2), on a $AMA = (1 - \lambda)AM = (1 + \lambda)MA$. Si $\lambda \neq 1$, alors $AM = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}MA$ donc, en reportant dans (E), on a $\frac{1+\lambda}{1-\lambda}MA - MA = \frac{2\lambda}{1-\lambda}MA = \lambda M$ d'où $MA = \frac{1-\lambda}{2}M$ (3) si $\lambda \neq 0$ et $AM = \frac{1+\lambda}{2}M$ (4). En multipliant (3) par A à droite, comme $A^2 = A$, il vient $MA = \frac{1-\lambda}{2}MA$ donc $MA = 0$ si $1 \neq \frac{1-\lambda}{2}$, c'est-à-dire si $\lambda \neq -1$. Ainsi, si $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, $MA = 0$ donc $AM = 0$ et $w(M) = AM - MA = 0 = \lambda M$; NON car $\lambda \neq 0$ et $M \neq 0$. Par conséquent, les valeurs propres de w ne peuvent être que -1 , 0 ou 1 .

c. Comme $\text{Sp}(w) \subset \{-1, 0, 1\}$, on est amené à évaluer $P(w)$ si $P = (X + 1)X(X - 1) = X^3 - X$. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $w^2(M) = w(AM - MA) = A(AM - MA) - (AM - MA)A = AM - 2AMA + MA$ donc $w^3(M) = w(AM - 2AMA + MA) = A(AM - 2AMA + MA) - (AM - 2AMA + MA)A$ et, en développant, $w^3(M) = AM - 2AMA + AMA - AMA + 2AMA - MA = AM - 2AMA + MA = w(M)$. On a bien $w^3 = w$ donc le polynôme scindé à racines simples P annule w ce qui prouve que w est diagonalisable.

62

63 a. g est bien définie par définition de l'image de f . De plus, g est linéaire car f l'est.

- Soit $x \in \text{Ker}(g)$, alors $x \in H$ et $g(x) = f(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(f)$. Comme $H \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$, on a $x = 0$ ce qui montre que $\text{Ker}(g) = \{0\}$. Ainsi, g est injective.
- Bien sûr, on n'utilise pas la formule du rang pour montrer la surjectivité car on est en train de prouver le théorème du rang. Soit $y \in \text{Im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = H + \text{Ker}(f)$, il existe $a \in H$ et $b \in \text{Ker}(f)$ tels que $x = a + b$. Ainsi, $y = f(a + b) = f(a) + f(b) = f(a) = g(a)$ donc $y \in \text{Im}(g)$. Ainsi, g est surjective.

L'application $g : H \rightarrow \text{Im}(f)$ définie par $g(x) = f(x)$ est un isomorphisme.

b. Posons $r = \text{rang}(f)$, alors $\dim(H) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rang}(f) = r$. Soit une base $\mathcal{B}'_1 = (v_1, \dots, v_r)$ de H , alors $\mathcal{B}' = (f(v_1), \dots, f(v_r))$ est une base de $\text{Im}(f)$ avec la question a. On complète pour avoir une $\mathcal{B}_2 = (f(v_1), \dots, f(v_r), w_{r+1}, \dots, w_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Soit $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ une base de $\text{Ker}(f)$, comme $E = H \oplus \text{Ker}(f)$, $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ est une autre base de $\mathbb{C}^n$. Par construction, l'image des r premiers vecteurs de $\mathcal{B}_1$ donne les r premiers vecteurs de $\mathcal{B}_2$ et celle des $n - r$ derniers donne 0 donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$.

c. Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à C , si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à $\mathcal{B}_2$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à la base canonique de $\mathbb{C}^n$, par formule de changement de base, $\text{Mat}_{\text{can}}(u) = C = PJ_rQ = P\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)Q$.

d. Par hypothèse, avec les notations de la question c., on a $APJ_rQ = PJ_rQB$ donc $(P^{-1}AP)J_r = J_r(QBQ^{-1})$. En posant $A' = P^{-1}AP$ et $B' = QBQ^{-1}$, on a $A'J_r = J_rB'$ et, comme A et A' (resp. B et B') sont semblables, on a $\chi_A = \chi_{A'}$ (resp. $\chi_B = \chi_{B'}$). Écrivons $A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ (avec les mêmes tailles des blocs que pour J_r), de sorte que $A'J_r = J_rB'$ se transforme en $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A_1 = B_1$, $A_3 = 0$ et $B_2 = 0$. La matrice $A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs donc $\chi_{A'} = \chi_A = \chi_{A_1}\chi_{A_4}$. De même, comme $B' = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, on a $\chi_{B'} = \chi_B = \chi_{A_1}\chi_{B_4} = \chi_{B_1}\chi_{B_4}$. Comme le polynôme χ_{A_1} est de degré r et qu'il est en facteur de χ_A et de χ_B , A et B admettent au moins r valeurs propres en commun (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

e. Si $AC = CB$ et que $\text{rang}(C) = n$, alors C est inversible donc $A = CBC^{-1}$, A et B sont semblables donc $\chi_A = \chi_B$ et A et B admettent exactement n valeurs propres en commun.

64 a. En développant par rapport à la première ligne, $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -2 & 2 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 2 & X+1 \end{vmatrix}$

donc $\chi_A = (X-1)[(X-2)(X+1)+2] = X(X-1)^2$. Ainsi, $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$. Deux méthodes :

- Comme $A(A - I_3) = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, d'après le cours, la matrice A n'est pas diagonalisable.
- Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, on a $\dim(E_1(A)) = 3 - \text{rang}(A - I_3) = 1 < 2$ avec la formule du rang donc A n'est pas diagonalisable.

b. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, on sait d'après le cours que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'où l'existence de $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et de $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

c. Il est clair que $v_1 = (0, 1, -2) \in \text{Ker}(A) = E_0(A)$ et que $v_2 = (0, 1, -1) \in \text{Ker}(A - I_3) = E_1(A)$. Étant donnée la matrice T , on cherche un vecteur v_3 tel que $Av_3 = -3v_1 + 4v_2 + v_3$, ou $(A - I_3)v_3 = -3v_1 + 4v_2 = (0, 1, 2)$ et la première colonne de $A - I_3$ nous permet de prendre $v_3 = (1, 0, 1)$. Ainsi, en posant $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, on vérifie

facilement que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et, par formule de changement de base, en notant $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = PTP^{-1}$ car $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

si f est canoniquement associé à A .

d. Pour $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a $NT = \begin{pmatrix} 0 & b & c - 3a + 4b \\ 0 & e & f - 3d + 4e \\ 0 & h & i - 3g + 4h \end{pmatrix}$ et $TN = \begin{pmatrix} -3g & 3h & -3i \\ d + 4g & e + 4h & f + 4i \\ g & h & i \end{pmatrix}$ donc $NT = TN \iff (b = d = g = h = 0, e = i, c = 3a - 3e)$. Les matrices qui commutent avec T sont de la

forme $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 3a - 3e \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$. Cet ensemble s'appelle le commutant de T , noté $C(T)$, c'est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ (c'en est même une sous-algèbre). D'après l'expression précédente, $\dim(C(T)) = 3$ car $C(T) = \text{Vect}(N_1, N_2, N_3)$ avec $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que la famille (N_1, N_2, N_3) est clairement libre.

e. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Alors $M \in C(A) \iff AM = MA \iff APNP^{-1} = PNP^{-1}A$ donc $M \in C(A) \iff P^{-1}APN = NP^{-1}AP \iff DN = ND \iff (\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, M = P(\alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3)P^{-1})$. Ainsi, on a $C(A) = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ où $M_1 = PN_1P^{-1}$, $M_2 = PN_2P^{-1}$ et $M_3 = PN_3P^{-1}$. Comme (M_1, M_2, M_3) est libre car image de (N_1, N_2, N_3) par l'automorphisme $\varphi : N \mapsto PNP^{-1}$, $\dim(C(A)) = 3$.

65

66 a. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme $((\alpha X + \beta)P)'$ est bien défini donc φ l'est aussi. De plus, si $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\lambda P + Q) = ((\alpha X + \beta)(\lambda P + Q))' = (\lambda(\alpha X + \beta)P + (\alpha X + \beta)Q)' = \lambda((\alpha X + \beta)P)' + ((\alpha X + \beta)Q)'$ par linéarité de la dérivation donc φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. Méthode 1 : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\varphi(P) = \lambda P \iff \alpha P + (\alpha X + \beta)P' = \lambda P$. Traitons deux cas :

- si $\lambda = \alpha$, on a $\varphi(P) = \alpha P \iff (\alpha X + \beta)P' = 0 \iff P' = 0$ car $\alpha X + \beta \neq 0$ donc $E_\alpha(\varphi) = \text{Vect}(1)$ et α est bien valeur propre de φ .

- si $\lambda \neq \alpha$, on a $\varphi(P) = \lambda P \iff (\lambda - \alpha)P = (\alpha X + \beta)P'$ (1). Si P de degré $n \in \mathbb{N}$ vérifie cette relation, en identifiant le terme en X^n dans (1), on trouve $\lambda - \alpha = \alpha n$ donc $\lambda = (n + 1)\alpha$. Réciproquement, si $\lambda = (n + 1)\alpha$ et $n\alpha P = (\alpha X + \beta)P'$ et si z est une racine d'ordre $r \geq 1$ de P de degré n , si on suppose que $z \neq -\frac{\beta}{\alpha}$, alors z est racine d'ordre r de $n\alpha P$ et d'ordre $r - 1$ de $(\alpha X + \beta)P'$ ce qui est absurde.

Ainsi, la seule racine possible de P est $-\frac{\beta}{\alpha}$ donc $P = k(\alpha X + \beta)^n$ où $k\alpha^n$ est le coefficient dominant de P . On vérifie que $\varphi((\alpha X + \beta)^n) = (n + 1)\alpha(\alpha X + \beta)^n = (n + 1)\alpha P$ donc P est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $(n + 1)\alpha$.

Les deux cas se confondent en une même conclusion, $\text{Sp}(\varphi) = \alpha\mathbb{N}^* = \{\alpha, 2\alpha, \dots\}$ et, pour tout entier naturel n , le sous-espace $E_{(n+1)\alpha}(\varphi)$ est la droite $\text{Vect}((\alpha X + \beta)^n)$.

Méthode 2 : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\varphi(P) = \lambda P \iff (\alpha X + \beta)P' = (\lambda - \alpha)P$ ce qui équivaut au fait que P est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $(\alpha t + \beta)y' - (\lambda - \alpha)y = 0$ qu'on résout sur $I_1 =]-\infty; -\frac{\beta}{\alpha}[$ et $I_2 =]-\frac{\beta}{\alpha}; +\infty[$. Comme une primitive de $t \mapsto \frac{\lambda - \alpha}{\alpha t + \beta}$ est $t \mapsto \frac{\lambda - \alpha}{\alpha} \ln(|\alpha t + \beta|)$, les solutions de (E) sur I_k sont les fonctions $t \mapsto A_k \exp\left(\frac{\lambda - \alpha}{\alpha} \ln(|\alpha t + \beta|)\right) = A_k |\alpha t + \beta|^{\frac{\lambda}{\alpha} - 1}$ avec $A_k \in \mathbb{R}$. Pour que cette fonction soit polynomiale, il est nécessaire et suffisant que $\frac{\lambda}{\alpha} \in \mathbb{N}^*$ donc que $\lambda \in \alpha\mathbb{N}^*$ et, si $\lambda = (n + 1)\alpha$ avec $n \in \mathbb{N}$, les polynômes P et $A_k(\alpha X + \beta)^n$ coïncident sur I_2 (ensemble infini) donc sont formellement égaux ce qui prouve à nouveau que $E_{(n+1)\alpha} = \text{Vect}((\alpha X + \beta)^n)$.

c. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg((\alpha X + \beta)P) \leq 1 + n$ donc $\deg(((\alpha X + \beta)P)') \leq 1 + n - 1 = n$ ce qui justifie bien que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ donc que φ_n est bien définie. Comme $\mathcal{B} = ((\alpha X + \beta)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre

(de degrés échelonnés) de cardinal $n + 1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de φ donc de φ_n . La matrice de φ_n dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\text{diag}(\alpha, 2\alpha, \dots, (n+1)\alpha)$ donc $\det(\varphi_n) = (n+1)!\alpha^{n+1}$ et $\text{Tr}(\varphi_n) = \frac{(n+1)(n+2)\alpha}{2}$.

67 Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$, alors $\chi_M(\lambda) = P(\lambda) = 0$ donc distinguons deux cas :

- si $|\lambda| < 1$, alors comme $a_n = 1$ car χ_M est unitaire, on a clairement $|\lambda| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$.
- si $|\lambda| \geq 1$, on a $\lambda^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$ donc, par inégalité triangulaire, il vient $|\lambda|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\lambda|^k$ or $|\lambda|^k \leq |\lambda|^{n-1}$ donc $|\lambda|^n \leq |\lambda|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ et il suffit de diviser par $|\lambda| > 0$ pour avoir l'inégalité $|\lambda| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ dont découle l'inégalité $|\lambda| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$ souhaitée.

68 a. f est bien définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

on a le calcul $f(\lambda x + y) = \lambda x + y - \left(\sum_{k=1}^n (\lambda x_k + y_k) \right) v = \lambda x - \lambda \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) v + y - \left(\sum_{k=1}^n y_k \right) v = \lambda f(x) + f(y)$.

Ainsi, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Il est clair que si $f(y) = y$, alors $y = f(y) \in \text{Im}(f)$. Réciproquement, si $y \in \text{Im}(f)$, il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x) = x - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) v$. Par linéarité de f , $f(y) = f(x) - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) f(v)$. Mais,

par hypothèse, on a $\sum_{k=1}^n v_k = 1$ donc $f(v) = v - 1 \cdot v = 0_{\mathbb{R}^n}$ puis $f(y) = x - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) v - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot 0_{\mathbb{R}^n} = y$.

Par double implication, on a bien montré l'équivalence : $y \in \text{Im}(f) \iff f(y) = y$.

c. Soit $y \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$, alors d'après la question précédente, on a $f(y) = y$ car $y \in \text{Im}(f)$ mais aussi $f(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $y \in \text{Ker}(f)$. Ainsi, $y = 0_{\mathbb{R}^n}$ d'où $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe. De plus, par la formule du rang $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = n$ donc ce qui précède permet de conclure que $\mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$. Ainsi, soit $x = y + z \in \mathbb{R}^n$ avec $y \in \text{Im}(f)$ et $z \in \text{Ker}(f)$, alors $f(x) = f(y) + 0 = y$ d'après b. car $y \in \text{Im}(f)$ et on a alors $f^2(x) = f(y) = y = f(x)$ donc f est un projecteur.

d. Comme $f(x) = x \iff \sum_{k=1}^n x_k = 0$ car $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et que $\varphi : x \mapsto \sum_{k=1}^n x_k$ est une forme linéaire non nulle ($\varphi(v) = 1 \neq 0$) sur $\mathbb{R}^n$, $E_1(f) = \text{Im}(f) = \text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $\dim(E_0(f)) = n - (n-1) = 1$ et $v \in E_0(f)$ donc $E_0(f) = \text{Ker}(f) = \text{Vect}(v)$ est une droite.

Par conséquent, f est la projection sur l'hyperplan $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$ parallèlement à la droite $\text{Ker}(f)$. Dans le cas particulier où $n = 1$, f est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}$.

69 a. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme annulateur de M . Il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k X = \lambda^k X$. Ainsi, on peut calculer

$$0 = P(M)X = \sum_{k=0}^d a_k M^k X = \sum_{k=0}^d a_k \lambda^k X = P(\lambda)X = 0. \text{ Comme } X \neq 0, \text{ on a forcément } P(\lambda) = 0.$$

b. Si M est symétrique, $M^2 + M - I_n = 0$ donc $P = X^2 + X - 1$ annule M . Or $P = (X - \alpha)(X - \beta)$ avec $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ donc P est scindé à racines simples d'où, par théorème, M est diagonalisable.

c. Si on ne suppose plus M symétrique, on cherche un polynôme annulateur de degré supérieur. En transposant, on obtient $({}^tM)^2 + M = I_n$ donc $(I_n - M^2)^2 + M - I_n = M^4 - 2M^2 + M = 0$ et $Q = X^4 - 2X^2 + X$ annule M . Or $Q = X(X-1)(X^2+X-1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$ qui est à nouveau scindé à racines simples. Ainsi M est encore diagonalisable.

d. Puisque $({}^tM)^2 = I_n - M$, en passant au déterminant, on a $\det({}^t(M^2)) = \det(M)^2 = \det(I_n - M) = \chi_M(1)$. Ainsi, $\det(M) \neq 0 \iff \chi_M(1) \neq 0 \iff (1 \text{ n'est pas valeur propre de } M)$.

Ou encore, M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M .

70 a. L'application φ est bien définie de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$ et elle est clairement linéaire (il suffit de l'écrire).

Comme $\dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{K}^n) = n$, φ est un isomorphisme si et seulement si φ est injective. Or, si $P \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi(P) = (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = (0, \dots, 0)$ donc $P(\lambda_1) = \dots = P(\lambda_n) = 0$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des racines de P . Il y a donc n racines distinctes d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n , on sait d'après le cours que ceci implique $P = 0$. φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$.

Pour $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, l'unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie $\varphi(P) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ s'appelle le polynôme d'interpolation de LAGRANGE et on a classiquement $P = \sum_{j=1}^n \beta_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$.

b. Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ , comme λ est valeur propre simple de f , on sait d'après le cours que $E_\lambda(f) = \text{Vect}(v)$. Alors, $f(g(v)) = g(f(v)) = \lambda g(v)$ donc $g(v) \in \text{Vect}(v) = E_\lambda(f)$. Alors $\exists \beta \in \mathbb{K}$, $g(v) = \beta v$ donc v est un vecteur propre pour g (associé à la valeur propre β). Par conséquent, tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g (mais la réciproque n'est pas forcément vraie).

c. Comme f est diagonalisable puisqu'il admet n valeurs propres distinctes en dimension n , il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ composée par des vecteurs propres de f . D'après la question b., ces vecteurs sont aussi des vecteurs propres pour g . Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E composée de vecteurs propres communs à f et à g .

d. Avec $\mathcal{B}$ une des bases de codiagonalisation de la question précédente, il existe donc deux matrices diagonales $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $D' = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ telles que $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ et $D' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$. Pour $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a $g = P(f) \iff D' = P(D) \iff (\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \beta_k = P(\lambda_k)) \iff (\beta_1, \dots, \beta_n) = \varphi(P)$. D'après la question a., il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie ceci donc tel que $g = P(f)$.

e. $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{C}(f)$ est non vide car $\text{id}_E \in \mathcal{C}(f)$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(g, h) \in \mathcal{C}(f)^2$, alors $\lambda g + h \in \mathcal{C}(f)$ car $f \circ (\lambda g + h) = \lambda f \circ g + f \circ h = \lambda g \circ f + h \circ f = (\lambda g + h) \circ f$. Ainsi, $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (même une sous-algèbre) et la question précédente montre que l'application $\psi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \rightarrow \mathcal{C}(f)$ définie par $\psi(P) = P(f)$ est un isomorphisme. Ainsi, $\dim(\mathcal{C}(f)) = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = n$.

71 a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$ (théorème de CAYLEY-HAMILTON).

b. Si A et B sont semblables, il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = QBQ^{-1}$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = QB^kQ^{-1}$ donc, pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ donc $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k QB^kQ^{-1} = Q \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k B^k \right) Q^{-1} = QP(B)Q^{-1}$ donc $P(A)$ et $P(B)$ sont elles aussi semblables.

c. Par une récurrence simple et un calcul par blocs, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}, M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$. Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a $P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1}$ donc $XP' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k X^k$. Ainsi,

$$P(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k & \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k A^k \\ 0_n & \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k \end{pmatrix} \text{ donc } P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

d. Si M est diagonalisable, il existe d'après le cours un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(M) = 0$ donc $P(A) = 0$ d'après la relation de la question précédente. Ainsi, le polynôme scindé à racines simples P annule A ce qui prouve que A est aussi diagonalisable.

e. Avec ce même polynôme P , on a aussi $AP'(A) = 0$ d'après c. donc XP' est annulateur de A . Si λ est une valeur propre de A , comme P et XP' annulent A , on sait d'après le cours que $P(\lambda) = 0 = \lambda P'(\lambda)$. Mais comme les racines de P sont simples par hypothèse, P et P' n'ont pas de racine commune d'où $\lambda = 0$ et 0 est la seule valeur propre de A . Comme A est diagonalisable et que $\text{Sp}(A) = \{0\}$, la matrice A est semblable à la matrice nulle donc $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$, alors $M = 0$ donc M est diagonalisable. Par conséquent, la conclusion de cet exercice est que $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

72

73 a. La matrice M est symétrique réelle donc elle est diagonalisable par le théorème spectral. Dans le détail,

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } M + I_3 \text{ est clairement de rang 1 donc, par la formule du rang, } \dim(E_{-1}(M)) = 3 - 1 = 2.$$

Comme $E_2(M)$ et $E_{-1}(M)$ sont en somme directe d'après le cours, on a $\mathbb{R}^3 = E_2(M) \oplus E_{-1}(M)$ et la matrice M est diagonalisable par définition. Une base de vecteurs propres est $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ avec les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$ par exemple.

b. Par définition des opérations matricielles, on a $R(a, b) = aI_3 + bM$.

c. D'après a., M est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc M^n est semblable à la matrice D^n . La trace de ces deux dernières matrices sont donc égales et on a $u_n = \text{Tr}(M^n) = \text{Tr}(D^n)$ donc $u_n = 2^n + 2(-1)^n \in \mathbb{N}$ et on a clairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

d. Si $M = PDP^{-1}$ avec une matrice inversible P (et la question a. nous permet de prendre pour P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$), on a $R(a, b) = aI_3 + bPDP^{-1} = aPP^{-1} + bPDP^{-1} = P(aI_3 + bD)P^{-1}$ donc $R(a, b)^n = P(aI_3 + bD)^n P^{-1}$. Ainsi, $v_n = (a + 2b)^n + 2(a - b)^n$. Les suites géométriques $((a + 2b)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((a - b)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent si et seulement si $-1 < a + 2b \leq 1$ et $-1 < a - b \leq 1$ et les points (a, b) font partie d'un losange plein (avec ou sans les arêtes selon que c'est $<$ ou $\leq$) $L = UVWX$ avec $U = (1, 0)$, $V = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $W = (-1, 0)$ et $X = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. $a + 2b = 1$, $a - b = -1$. Comme $L \neq \emptyset$, Par exemple, on peut bien choisir a et b de sorte $(a, b) \in L$ et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

74 a. Soit $\mathcal{B}_0$ une base fixée de E . Pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$, soit $\mathcal{B}$ la base de E telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Par hypothèse, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Mais on sait d'après le cours que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP$ par formule de changement de base. Ainsi, $P^{-1}AP = A$ donc, en multipliant par P à gauche, $PA = AP$.

b. Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$, L'application $\chi_B : \lambda \mapsto \det(\lambda I_n - B)$ est, d'après le cours, une fonction polynomiale de degré n , donc ce n'est pas la fonction nulle et il existe donc une infinité de scalaires λ tel que $\chi_B(\lambda) \neq 0$ (c'est même mieux que ça, χ_B ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs, les valeurs propres de B). Ainsi, pour ces valeurs de λ , on a $\lambda I_n - B$ qui est inversible, donc $B - \lambda I_n$ l'est aussi. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ (on peut même choisir $\lambda \neq 0$ mais ça n'a aucun intérêt) tel que $P = B - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K})$. D'après la question précédente, on a $PA = AP$ donc $(B - \lambda I_n)A = BA - \lambda A = AB - \lambda A = A(B - \lambda I_n)$ et, en soustrayant λA , $BA = AB$.

c. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, comme $E_{k,k}A = (\delta_{i,k}a_{k,j})_{1 \leq i,j \leq n} = (\delta_{j,k}a_{i,k})_{1 \leq i,j \leq n} = AE_{k,k}$ d'après la question précédente, on en déduit, pour $j = k$ et $i \neq k$, que $a_{i,k} = 0$ et, pour $i = k$ et $j \neq k$, que $a_{k,j} = 0$. Par conséquent, en faisant varier k , la matrice M est diagonale.

Pour $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, comme $E_{i,j}A = AE_{i,j}$, on en déduit $a_{i,i} = a_{j,j}$ (voir la case (i,j) des deux produits) donc $A = a_{1,1}I_n$ donc $f = a_{1,1}\text{id}_E$. L'endomorphisme f défini comme ceci est l'homothétie de rapport $a_{1,1}$.

75 a. Si $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $\sum_{j=1}^n x_j C_j = 0$, alors par définition du produit matriciel on a $AX = 0$ donc $X \in \text{Ker}(A)$.

b. Clairement, on a $\text{rang}(A) = 2$ donc, d'après la formule du rang, il vient $\dim(\text{Ker}(A)) = 5 - 2 = 3$. En notant C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 les colonnes de la matrice A , on a $C_1 - C_5 = C_1 - C_4 = C_1 - C_3 = 0$ donc les vecteurs colonnes V_1, V_2, V_3 sont dans $\text{Ker}(A)$ = si ${}^tV_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1)$, ${}^tV_2 = (1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0)$ et ${}^tV_3 = (1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0)$. Comme (V_1, V_2, V_3) est visiblement libre, c'est une base de $\text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(V_1, V_2, V_3)$. Or on constate qu'en notant V_4 le vecteur colonne tel que ${}^tV_4 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$ on a $AV_4 = 2V_4$. Comme $\text{Tr}(A) = 5$, la dernière valeur propre cherchée est $1 = 5 - 2 - 0 - 0 - 0$ et on trouve sans peine que $AV_5 = V_5$ en posant le vecteur colonne V_5 tel que ${}^tV_5 = (-3 \ 1 \ 1 \ 1 \ -3)$. Comme $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont en somme directe d'après le cours, on a forcément $E_0(A) = \text{Ker}(A) = \text{Vect}(V_1, V_2, V_3)$ de dimension 3, $E_2(A) = \text{Vect}(V_4)$ et $E_1(A) = \text{Vect}(V_5)$ de dimension 1. La matrice A est bien diagonalisable par définition car $\mathbb{R}^5 = E_0(A) \oplus E_2(A) \oplus E_1(A)$ et on a

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \text{ De plus, } \chi_A = X^3(X-1)(X-2).$$

ORAUX 2022 THÈME 6

THÉORÈMES DE DOMINATION

76

77 a. Soit la fonction $h :]-\infty; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(u) = -u - \ln(1-u)$. h est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et on calcule

$$h'(u) = -1 + \frac{1}{1-u} = \frac{u}{1-u} \text{ donc } h \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et croissante sur } [0; 1[, \text{ elle est donc minimale en } 0 \text{ où } h(0) = 0.$$

Par conséquent, h est positive sur $]-\infty; 1[$ et on a bien $\forall u \in]-\infty; 1[, \ln(1-u) \leq -u$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ si $x \in [0; \sqrt{n}]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > \sqrt{n}$. f_n est continue sur le segment $[0; \sqrt{n}]$ donc $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ existe et, par construction, $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, dès que $n \geq x^2$, on a $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-x^2}$

car $\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{n}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(0) = 1 = e^{-0^2}$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

• Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• $\forall n \geq 1, \forall x \geq 0, |f_n(x)| = 0$ si $x^2 > n$ et $|f_n(x)| = f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq e^{-x^2} = f(x)$

d'après a. car $-\frac{x^2}{n} \in]-\infty; 1[$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) = o(e^{-x^2})$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans l'intégrale I_n , on pose le changement de variable $x = \sqrt{n} \cos(t) = \varphi(t)$ et φ est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $[0; \frac{\pi}{2}]$ dans $[0; \sqrt{n}]$. Ainsi, d'après le cours, on

$$a \quad I_n = \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2(t))^n (-\sqrt{n} \sin(t)) dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t) dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ d'après}$$

l'équivalent admis. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et, par unicité de la limite, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

78 a. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t}$ de sorte que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ si elle converge.

• Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $f_x(t) = o(e^{-t})$ et que f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = ix$ car $e^{ixt} - 1 \underset{0}{\sim} ixt$ si $x \neq 0$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = ie^{-t} e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-t} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \int_0^{+\infty} ie^{(ix-1)t} dt$.

b. Ainsi, $F'(x) = \left[\frac{ie^{(ix-1)t}}{ix-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{i}{1-ix} = \frac{i(1+ix)}{1+x^2} = -\frac{x}{1+x^2} + \frac{i}{1+x^2}$. Comme $F(0) = 0$ et que $\mathbb{R}$ est un intervalle, en intégrant, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + i \operatorname{Arctan}(x)$.

79 a. Par le binôme de NEWTON, $P_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^{2n+1-k} X^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-i)^{2n+1-k} X^k$ et les termes

en X^k s'éliminent dans les deux sommes quand $2n+1-k$ est pair, donc quand k est impair. Par contre, les termes s'ajoutent quand k est pair. On pose donc le changement d'indice $k=2p$ avec $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ pour avoir

$$P_n = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p} i^{2n+1-2p} X^{2p} = 2i \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p} (-1)^{n-p} X^{2p} = 2iQ_n(X^2).$$

D'abord, i n'est pas racine de P_n car $P_n(i) = (2i)^{2n+1}$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a $P_n(z) = 0 \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1$ et le cours sur les racines $(2n+1)$ -ièmes de l'unité nous donne, comme $\frac{z+i}{z-i} \neq 1 = e^{i0}$, l'équivalence

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \iff \exists k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket, \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \iff \exists k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket, z = \frac{i(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1)}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1} = \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Comme $\cotan$ est injective sur $]0; \pi[$, les racines de P_n sont les $2n$ réels $\cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$ et, puisque le coefficient dominant de P_n vaut $2i(2n+1)$, on a $P_n = 2i(2n+1) \prod_{k=1}^{2n} \left(X - \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$. Comme on dispose de $P_n(X) = 2iQ_n(X^2)$, les réels $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \cotan^2\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ sont des racines de Q_n qui est de degré n donc ces n réels sont exactement les n racines de Q_n . Puisque le coefficient dominant de Q_n vaut $(2n+1)$, on a donc $Q_n = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(X - \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$

b. D'après la question précédente, $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ est la somme des racines de Q_n . Par définition

de Q_n , on a $Q_n = \binom{2n+1}{2n} X^n - \binom{2n+1}{2n-2} X^{n-1} + \sum_{p=0}^{n-2} (-1)^{n-p} \binom{2n+1}{2p} X^p$, donc la somme des racines de

$$Q_n \text{ vaut, d'après le cours, } T_n = \frac{\binom{2n+1}{2n-2}}{\binom{2n+1}{2n}} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

c. Comme les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont positives sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, l'inégalité de l'énoncé est équivalence à l'encadrement $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ ce qui est évident par deux petites études de fonctions ou par le théorème des accroissements finis appliqué à $\sin$ et $\tan$ entre 0 et x car $\sin' \leq 1$ et $\tan' \geq 1$. Par exemple, $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\exists c \in]0; x[$, $\frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(c) = \frac{1}{\cos^2(c)} > 1$ donc $\tan(x) > x$.

d. Pour $n \geq 1$, remplaçons x par $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ (pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$) dans l'inégalité précédente et sommons, ce qui donne $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} \leq \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = n + T_n$. Ainsi, en

posant S_n la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, on a $\frac{n(2n-1)}{3} \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} S_n \leq n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$

ce qui revient à $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq S_n \leq \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

par encadrement, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto \ln(1+x^n)$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ existe.

f. On considère l'intégrale I_n sur $]0; 1]$ et on pose $x = t^{1/n} = \varphi_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme φ_n est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0; 1]$ dans $]0; 1]$, $I_n = \int_0^1 \ln(1+t) \left(\frac{1}{n} t^{(1/n)-1}\right) dt$ donc

$nI_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)t^{1/n}}{t} dt$. Soit $f_n :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{\ln(1+t)t^{1/n}}{t}$.

- La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ sur $]0; 1]$.
- Les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur $]0; 1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0; 1], |f_n(t)| = \frac{\ln(1+t)t^{1/n}}{t} \leq \frac{\ln(1+t)}{t} = \varphi(t)$ car $0 \leq t^{1/n} \leq 1$ et la fonction φ est continue et intégrable sur $]0; 1]$ car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

g. Pour $t \in]0; 1[$, on a $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n}$ donc $f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{n-1}}{n}$. Pour tout

entier $n \in \mathbb{N}^*$, définissons la fonction $u_n :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par $u_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} t^{n-1}}{n}$.

- la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement vers f sur $]0; 1[$ (on en vient).
- les fonctions u_n sont continues et intégrables (car polynomiales) sur $]0; 1[$.
- la fonction f est continue sur $]0; 1[$.
- pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 |u_n| = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = S$.

Posons $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Alors $T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}$ donc $T_{2n} = S_{2n} - \frac{S_n}{2}$ ce qui,

en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, donne $S = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}$ car $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite extraite

de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, c'est-à-dire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

80 La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0; 1[$. $f(x) \underset{0}{\sim} -2 \ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ donc f est intégrable sur $]0; \frac{1}{2}]$. De plus, f est intégrable sur $[\frac{1}{2}; 1[$ car $f(x) \underset{1}{\sim} (x-1) \ln(1-x)$ donc se prolonge par continuité en 1

en posant $f(1) = 0$. Comme on a le développement en série entière $\forall x \in]0; 1[, \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, il vient

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f_1 + \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) dx \text{ avec } f_n(x) = -\frac{x^{n-1} \ln(x)}{n}.$$

Pour $n \geq 2$, f_n est continue sur $[0; 1]$ en prolongeant par continuité en 0 et en 1 en posant $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$. de plus, f_n est dérivable sur $]0; 1]$ et $\forall x \in]0; 1], f'_n(x) = -\frac{1}{n} \left((n-1)x^{n-2} \ln(x) + x^{n-2} \right)$ donc,

avec le tableau de variations de f_n , on trouve $\|f_n\|_{\infty, [0; 1]} = f_n\left(e^{-\frac{1}{(n-1)}}. Ainsi, $\sum_{n \geq 2} f_n$$

converge normalement sur $[0; 1]$ par RIEMANN. En posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = \ln(x)$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0; 1]$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées car $n \geq 2$ donc, par intégration par parties, on

obtient $\int_0^1 f_n = \left[-\frac{x^n \ln x}{n^2} \right]_0^1 + \frac{1}{n^2} \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n^3}$ si $n \geq 2$. Par convergence normale (donc uniforme) de

la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur le segment $[0; 1]$, on a $\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) - 1$.

De plus, $\int_0^1 f_1 = -\int_0^1 \ln(x) dx = [x - x \ln(x)]_0^1 = 1$ donc $I = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202$.

On pouvait utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

81 a. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ de sorte que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ (si elle converge).

- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.
- Pour tout $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = 1$ car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ et $f_x(t) = O(e^{-xt})$ (avec $x > 0$).
- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour $a > 0$ et $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \psi_a(t)$ et ψ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt$.

Ainsi, $F'(x) = -\operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt \right) = -\operatorname{Im} \left[\frac{e^{(i-x)t}}{(i-x)} \right]_0^{+\infty} = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{i-x} \right) = -\frac{1}{1+x^2}$.

b. La fonction $f_0 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $f_0(0) = 1$ car $\sin(t) \sim t$. En posant $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto 1 - \cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ car $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par $1 - \cos(t) = O(1)$. Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ sont donc de même nature. Or $g_0 : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $g_0(0) = \frac{1}{2}$ toujours car $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ et $|g(t)| \leq \frac{2}{t^2}$ ce qui garantit son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge car elle converge absolument, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge aussi donc $F(0)$ existe et on a $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$.

Méthode 1 : pour $x \geq 0$, en posant $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t}$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties à nouveau, comme $v'(t) = -\frac{1+tx}{t^2} e^{-xt}$, on a $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \times (1+tx)e^{-xt} dt$.

- Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \times (1+tx)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \times (1+tx)e^{-xt}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu).
- Posons $h : s \mapsto (1+s)e^{-s}$, alors h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(s) = -se^{-s} \leq 0$ donc h est positive et maximale en 0 donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t > 0, \left| \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \times (1+tx)e^{-xt} \right| \leq g_0(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ car $(1+tx)e^{-xt} = h(xt) \leq h(0) = 1$ et g_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par continuité sous le signe somme, F est continue sur $\mathbb{R}_+$, notamment en 0.

Méthode 2 : Par CHASLES, pour $x \geq 0$, $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)e^{-xt}}{t} dt$ et, en posant $t = u + k\pi$ dans chaque intégrale, $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-k\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin(u)e^{-xu}}{u + k\pi} du$. Posons $u_k : x \mapsto e^{-k\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin(u)e^{-xu}}{u + k\pi} du$. Pour $x \geq 0$ fixé, les suites $(e^{-k\pi x})_{k \in \mathbb{N}}$ et $\left(\int_0^\pi \frac{\sin(u)e^{-xu}}{u + k\pi} du \right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont décroissantes (car $\sin(u) \geq 0$ et $(u + k\pi)_{k \in \mathbb{N}}$ croît), de plus, pour $k \geq 1$, $\left| \int_0^\pi \frac{\sin(u)e^{-xu}}{u + k\pi} du \right| \leq \int_0^\pi \frac{1}{u + k\pi} du \leq \frac{\pi}{k\pi} = \frac{1}{k}$ donc $(u_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k(x)$,

on a $|\mathbf{R}_n(x)| \leq u_{n+1}(x) \leq \frac{1}{n+1}$ donc $\|\mathbf{R}_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{n+1}$ ce qui prouve que la série de fonctions continues (la continuité des u_k se montre par application du théorème de continuité sous le signe somme sur un segment) $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après le cours, F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Par une petite étude de fonction, on montre classiquement que $\forall t > 0, |\sin(t)| \leq t$. Ainsi, $|f(x, t)| \leq e^{-xt}$ et, par inégalité de la moyenne, $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle et que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0, f(x) = \lambda - \text{Arctan}(x)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ donc $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x > 0, F(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par continuité de F en 0, on a aussi $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ (intégrale de DIRICHLET).

82 a. Soit $h : \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

- $\forall t \in [0; 1], x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations.
- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto h(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ sont continues donc intégrables sur le segment $[0; 1]$.
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1], \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2|x|e^{-x^2}$. Or $b : x \mapsto 2|x|e^{-x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et elle tend vers 0 en $\pm\infty$ par croissances comparées, on en déduit classiquement que b est bornée sur $\mathbb{R}$ et on note $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} (2|x|e^{-x^2})$. Ainsi, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1], \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) = M$ et φ est intégrable sur le segment $[0; 1]$. Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a la formule de LEIBNIZ, à savoir $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2 \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} x dt$.

Par le théorème fondamental de l'intégration, comme $a : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car c'est la primitive de a sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{-x^2}$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -2 \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2e^{-x^2} g(x)$ en posant $u = tx = \psi(t)$ si $x \neq 0$ avec ψ qui est une bijection de classe C^1 strictement monotone (croissante si $x > 0$ et décroissante si $x < 0$) de $[0; 1]$ dans $[\widetilde{0}; x]$. Mais si $x = 0$, on a clairement $f'(0) = 0$ donc $f'(0) = -2e^{-0^2} g(0)$ est encore vrai car $g(0) = 0$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et que $(f + g^2)' = 0$ sur $\mathbb{R}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g^2(x) = C$. Or $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g^2(x) = \frac{\pi}{4}$.

c. Pour $x > 0, \forall t \geq 0, 0 \leq e^{-(1+t^2)x^2} \leq e^{-x^2}$ et $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, donc $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Comme g est une fonction positive, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{g(x)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x)}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = I$.

83 a. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme on sait que $\sin(t) \underset{0}{\sim} \text{sh}(t) \underset{0}{\sim} t$, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Comme $\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^t}{2}$, on a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 2\sin(t)e^{-t}$ donc $f(t) = O(e^{-t})$ et, par comparaison, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le cours, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt$ converge.

b. Si $t > 0, \frac{1}{\text{sh}(t)} = \frac{2}{e^t - e^{-t}} = \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}} = 2e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$ (car $e^{-2t} < 1$) donc $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\sin(t)e^{-(2n+1)t}$.

Posons, pour tout entier naturel n , la fonction $f_n : t \mapsto 2 \sin(t) e^{-(2n+1)t}$.

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le faire).
- Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car elles sont prolongeables par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ et que $f_n(t) = O(e^{-t})$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Comme $|\sin(t)| \leq t$, par inégalité de la moyenne, $I_n = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq 2 \int_0^{+\infty} t e^{-(2n+1)t} dt$. Par une intégration par parties en posant $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1}$, comme u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, il vient $0 \leq I_n \leq \frac{2}{2n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} dt = \frac{2}{(2n+1)^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ donc $\sum_{n \geq 0} I_n$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 2 \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-(2n+1)t} dt \right) = 2 \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-(2n+1))t} dt \right) = 2 \left[\frac{e^{(i-(2n+1))t}}{i-(2n+1)} \right]_0^{+\infty}$ ce qui donne $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2n+1-i} \right) = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{2n+1+i}{(2n+1)^2+1} \right) = \frac{2}{(2n+1)^2+1}$.

On a bien l'égalité attendue, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1+(2n+1)^2} \sim 0,72$.

84

- 85 a. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^n(t)}$ est continue sur le segment $[0; x]$ donc $I_n(x)$ existe.

La fonction I_n est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, I_n est la primitive de f_n qui s'annule en 0 donc elle est même de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; x]$ vers la fonction $f : [0; x] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ car $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $f(t) = 0$ si $t > 0$ car $\operatorname{ch}(t) > 1$. Les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur $[0; x]$. $\forall n \geq 0, \forall t \in [0; x], |f_n(t)| \leq \varphi(t) = 1$ et φ est continue et intégrable sur $[0; x]$. Par conséquent, par le théorème de convergence dominée, $\forall x \in \mathbb{R}_+, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x f(t) dt = 0$.

Ainsi, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

c. Pour $n = 0$, $f_0(x) = \int_0^x dt = x$ donc f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$. Par contre, dès que $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \sim_{+\infty} \frac{e^t}{2}$, on a $f_n(t) \sim_{+\infty} 2^n e^{-nt}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $-n < 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = J_n$ (voir question e.). Comme I_n est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$ car f_n est positive et $I'_n = f_n$, $\|I_n - 0\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = J_n$.

Méthode 1 : comme $\operatorname{ch}(t) \geq \frac{e^t}{2}$, il vient $0 \leq \int_{\ln(2)}^{+\infty} f_n(t) dt \leq \int_{\ln(2)}^{+\infty} 2^n e^{-nt} dt = 2^n \left[-\frac{e^{-nt}}{n} \right]_{\ln(2)}^{+\infty} = \frac{1}{n}$. Par CHASLES, on obtient $J_n = I_n(\ln(2)) + \int_{\ln(2)}^{+\infty} f_n(t) dt$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\ln(2)) = 0$ d'après b. et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\ln(2)}^{+\infty} f_n(t) dt = 0$ par encadrement car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|I_n - 0\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = 0$.

Méthode 2 : comme avant, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$f(0) = 1$ car $\text{ch}(0) = 1$ et $f(t) = 0$ si $t > 0$ car $\text{ch}(t) > 1$. Les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur $\mathbb{R}_+$. $\forall n \geq 1, \forall t \in \mathbb{R}_+, |f_n(t)| \leq f_1(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)}$ et f_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|I_n - 0\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = 0$.

Avec les deux méthodes, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, en posant $u = f_n$ et $v = \text{th}$, u et v sont de classe C^1 sur $[0; x]$ avec $v'(t) = \frac{1}{\text{ch}^2(t)}$ et $u'(t) = -\frac{n \text{sh}(t)}{\text{ch}^{n+1}(t)}$ donc $I_{n+2}(x) = \int_0^x u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t) dt$ par intégration par parties et on a $I_{n+2}(x) = \frac{\text{th}(x)}{\text{ch}^{n+1}(x)} + n \int_0^x \frac{\text{th}(t)\text{sh}(t)}{\text{ch}^{n+1}(t)} dt$ donc, comme $\text{th}(t) = \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}$ et $\text{sh}^2(t) = \text{ch}^2(t) - 1$, on a $I_{n+2}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^{n+2}(x)} + n \int_0^x \frac{\text{ch}^2(t) - 1}{\text{ch}^{n+2}(t)} dt = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^{n+2}(x)} + n(I_n(x) - I_{n+2}(x))$.

La relation cherchée entre $I_n(x)$ et $I_{n+2}(x)$ est donc $I_{n+2}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{(n+1)\text{ch}^{n+2}(x)} + \frac{nI_n(x)}{n+1}$.

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}(x)}{(n+1)\text{ch}^{n+2}(x)} = 0$ si $n \geq 1$ donc, avec **d.**, $J_{n+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_{n+2}(x) = \frac{n}{n+1} \lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = \frac{nJ_n}{n+1}$.

• $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2e^t dt}{1+(e^t)^2} = [2 \text{Arctan}(e^t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. Pour $n = 2p+1 \geq 1$ impair, on a $J_{2p+1} = \frac{2p-1}{2p} J_{2p-1} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} J_{2p-3} = \dots = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times J_1$. En multipliant par les termes pairs au numérateur, $J_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-1)(2p-3) \dots 3.1}{[(2p)(2p-2) \dots 2]^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

• $J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}^2(t)} dt = [\text{th}(t)]_0^{+\infty} = 1$. Pour $n = 2p \geq 2$ pair, $J_{2p} = \frac{2p-2}{2p-1} J_{2p-2}$ et, par récurrence, $J_{2p} = \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{2}{3} \times J_2$. En multipliant par les termes pairs au dénominateur, on arrive à $J_{2p} = \frac{[(2p-2)(2p-4)(2p-6) \dots 2]^2}{(2p-1)(2p-3) \dots 3.2} \times 1 = \frac{2^{2p-2}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} = \frac{2^{2p-2}(p!)^2 2p}{p^2(2p)!} = \frac{2^{2p-1}(p!)^2}{p(2p)!}$.

Pour aller plus loin, $J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{4\pi p}(2p)^{2p}(e^p)^2}{2^{2p}e^{2p}(\sqrt{2\pi p})^2(p^p)^2} \times \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{4p}} \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2(2p+1)}}$. Pour les indices pairs, $J_{2p} = \frac{2^{2p-1}(p!)^2}{p(2p)!} \sim_{+\infty} \frac{2^{2p-1}(\sqrt{2\pi p})^2(p^p)^2 e^{2p}}{p(e^p)^2 \sqrt{4\pi p}(2p)^{2p}} \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2(2p)}}$. En général, $J_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

86 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $g_x : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$. La fonction positive g_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,

$g_x(t) \sim_0 \frac{1}{t^x}$ donc g_x est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $x < 1$ et $g_x(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc g_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $x+1 > 1$. Par conséquent, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $0 < x < 1$. Or $f(x)$ existe si et seulement si g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le domaine de définition D de f est $D =]0; 1[$.

b. Définissons $g :]0; 1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x, t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$.

• $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0; 1[$ par opérations.

• $\forall x \in]0; 1[$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**

• Soit $(a, b) \in]0; 1[^2$ tel que $0 < a < b < 1$, $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|g(x, t)| = g(x, t) \leq \varphi_{a,b}(t)$ avec $\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{t^b(1+t)}$ si $t \in]0; 1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{t^a(1+t)}$ si $t \geq 1$. Or $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après RIEMANN car $\varphi_{a,b}(t) \sim_0 \frac{1}{t^b}$ (et $b < 1$) et $\varphi_{a,b}(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{a+1}}$ (et $a+1 > 1$).

Par théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $D =]0; 1[$.

c. Si $x \in D =]0; 1[$, on a clairement $1 - x \in D$. Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et, par changement de variable, on a $f(x) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{u^{-x}(1+(1/u))} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{1-x}(u+1)} du$ donc $f(1-x) = f(x)$.

d. Méthode 1 : pour $x \in]0; 1[$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$. De plus, on majore

$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{1-x} \right]_0^1 = \frac{1}{1-x}$ qui garantit que $\int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt = O(1)$. Dans la seconde intégrale, on pose $u = t^x$ ou $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de $[1; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+u^{1/x})} u^{(1/x)-1} du = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})} du$.

Or pour tout réel $u \geq 1$, on a $1 - u^{1/x} \leq \frac{1}{1+u^{-1/x}} \leq 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on a la double

inégalité $\int_1^{+\infty} \frac{1-u^{-1/x}}{u^2} du = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \leq x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt \leq 1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$. Par encadrement,

on a donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt \sim \frac{1}{x}$. Par somme, on a donc $f(x) \sim \frac{1}{x}$. D'après **c.**, on a aussi $f(x) \sim \frac{1}{1-x}$.

Méthode 2 : en effectuant le changement de variable $u = t^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $x \in D$, on aurait obtenu comme

ci-dessus $xf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})} du$. Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels de D qui tend vers 0, alors

$x_n f(x_n) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x_n})} du = \int_0^{+\infty} g_n(u) du$ en posant $g_n : u \mapsto \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x_n})}$.

- On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(u) = 0$ si $u \in]0; 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n(1) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(u) = \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$ donc $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(u) = 0$ si $u < 1$, $g(1) = \frac{1}{2}$ et $g(u) = \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$.

- Les g_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.** et g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

- En notant $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} (x_n) = \max_{n \in \mathbb{N}} (x_n) < 1$ (qui existe car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0), $\forall n \in \mathbb{N}$, $|g_n(u)| \leq \varphi(u)$

avec $\varphi(u) = \frac{1}{u^2(1+u^{-1/\alpha})}$ si $u < 1$, $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(u) \leq \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$.

Comme φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi(u) \sim \frac{1}{u^2}$ et $\varphi(u) \sim \frac{1}{u^{2-\frac{1}{\alpha}}}$ avec $2 - \frac{1}{\alpha} < 1$,

le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n f(x_n) = \int_0^{+\infty} g(u) du = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = 1$.

Ainsi, par caractérisation séquentielle des limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = 1$ donc, à nouveau, $f(x) \sim \frac{1}{x}$.

87 a. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $g_x : t \mapsto t^x e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $g_0(0) = 1$ ou $g_x(0) = 0$ si $x > 0$. De plus, par croissances comparées, $g_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est définie sur $[0; +\infty[$.

b. Définissons $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x, t) = t^x e^{-t}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$.

- $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.

- $\forall x \geq 0$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall (x, t) \in [0; a] \times \mathbb{R}_+^*$, $|g(x, t)| = g(x, t) \leq \varphi_a(t)$ avec $\varphi_a(t) = e^{-t}$ si $t \in]0; 1[$ et $\varphi_a(t) = t^a e^{-t}$ si $t \geq 1$. Or φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**

Par théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Soit $x \geq 1$, dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on trouve bien $f(x) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x f(x-1)$.

d. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction g_x est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f(x) = \int_0^{+\infty} g_x(t) dt > 0$. Ainsi, d'après a., la fonction $h : u \mapsto \ln(f(u))$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on note H une de ses primitives. Comme $\varphi(x) = [H(u)]_{x-1}^x = H(x) - H(x-1)$, la fonction φ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et on a la relation $\forall x \geq 1, \varphi'(x) = H'(x) - H'(x-1) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1)) = \ln(x)$ d'après c..

e. D'après la question précédente, $\varphi(x) = \varphi(1) + \int_1^x \varphi'(t) dt = \varphi(1) + \int_1^x \ln(t) dt = \varphi(1) + [t \ln(t) - t]_1^x$ ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Comme $v_n = \varphi(n)$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et, avec le critère spécial des séries alternées, on conclut à la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$.

88 a. Soit $x \geq 0$, posons $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{x+t}$. Alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et le

crochet $[uv]_0^{+\infty}$ converge car $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ puisque $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$. Ainsi les intégrales

$\int_0^{+\infty} u'v$ et $\int_0^{+\infty} uv'$ sont de même nature. Or uv' est continue en 0 si $x > 0$ et se prolonge par continuité en 0 si $x = 0$ car $u(t)v'(t) = -\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ donc uv' est intégrable sur $]0; 1]$. De plus $u(t)v'(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

donc uv' est intégrable sur $[1; +\infty[$. Par conséquent, uv' est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} uv'$ converge

donc, tout comme $\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ (de même nature). De plus, comme le crochet est nul, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = - \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) \times \left(-\frac{1}{(x+t)^2} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} dt.$$

b. Soit maintenant $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2}$.

• $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\forall x \geq 0$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu avant).

• $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, |g(x, t)| = g(x, t) \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu avant).

On peut donc conclure par continuité sous le signe somme que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

L'intégrale de DIRICHLET est $f(0)$ et vérifie $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

c. Utilisons le théorème de dérivation sous le signe somme deux fois.

• $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (voir a.).

• $\forall x > 0, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{2(1 - \cos(t))}{(x+t)^3}$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{6(1 - \cos(t))}{(x+t)^4}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\forall a > 0, \forall (x, t) \in [a; +\infty \times \mathbb{R}_+^*, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{4}{(a+t)^3} = \varphi_a(t)$ et $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{12}{(a+t)^4} = \psi_a(t)$ et les fonctions φ_a et ψ_a sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN.

Ainsi, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{2(1 - \cos(t))}{(x+t)^3} dt$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{6(1 - \cos(t))}{(x+t)^4} dt$.

Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto -\frac{1}{3(x+t)^3}$ et $v : t \mapsto 6(1 - \cos(t))$, u et v sont de classe C^1

sur $\mathbb{R}_+$ et $u(0)v(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc, par intégration par parties, $f''(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(x+t)^3} dt$. On pose cette fois-ci $u : t \mapsto -\frac{1}{2(x+t)^2}$ et $v = \sin$ et, avec les mêmes arguments, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt$. Par conséquent, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - 1 + 1}{(x+t)^2} dt = -f(x) + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t)^2} = -f(x) + \left[-\frac{1}{x+t} \right]_0^{+\infty} = -f(x) + \frac{1}{x}$ ce qui montre que la fonction f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = \frac{1}{x}$.

ORAUX 2022 THÈME 7

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

89 a. Soit les familles $\mathcal{F} = (v_i - v_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\mathcal{G} = (v_i - v_1)_{2 \leq i \leq n}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Méthode 1 : $\text{card}(\mathcal{G}) = n - 1$ et, directement, $\dim(\text{Vect}(\mathcal{G})) \leq n - 1$. Comme $v_i - v_j = (v_i - v_1) - (v_j - v_1)$, on a $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$. Mais comme $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, on a aussi $\text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{F})$. Au final $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\mathcal{G})$ est bien un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ tel que $\dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) \leq n - 1$.

Méthode 2 : Traitons deux cas :

- Si la famille $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est liée, on a $\dim(\text{Vect}(\mathcal{B})) \leq n - 1$. Or les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont engendrés par ceux de $\mathcal{B}$ donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$. Ainsi, on a bien $\dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) \leq n - 1$.
- Si $\mathcal{B}$ est libre, comme elle comporte n vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^n$. Notons H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ défini par $H = \{y = \sum_{k=1}^n y_k v_k \mid y_1 + \dots + y_n = 0\} = \text{Ker}(\varphi)$ où $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme linéaire non nulle telle que $\varphi(y) = \sum_{k=1}^n y_k$ avec les notations ci-dessus. Tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans H car leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont de la forme $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$ (si $i < j$). Ainsi, $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset H$ (car c'est le plus petit sous-espace de $\mathbb{R}^n$ qui contient $\mathcal{F}$) et, à nouveau, $\dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) \leq n - 1$.

90 a. On sait déjà que $\text{Im}(a^2) \subset \text{Im}(a)$, comme par hypothèse on a aussi $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$, par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\text{Im}(a) = \text{Im}(a^2)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors $a(x) \in \text{Im}(a)$ donc $a(x) \in \text{Im}(a^2)$ ce qui prouve l'existence de $y \in E$ tel que $a(x) = a^2(y)$. Ainsi, $a(x - a(y)) = 0_E$ donc $x = a(y) + (x - a(y)) \in \text{Im}(a) + \text{Ker}(a)$. On vient d'établir que $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) + \text{Ker}(a)$. Or la formule du rang donne $n = \dim(\text{Ker}(a)) + \text{rang}(a)$ dont on déduit que $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$. Soit une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ adaptée à la décomposition précédente, c'est-à-dire $\text{Im}(a) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$ et $\text{Ker}(a) = \text{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$. Comme $\text{Im}(a)$ et $\text{Ker}(a)$ sont stables par a , il existe une matrice $C \in M_r(\mathbb{R})$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or $\text{Im}(a)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(a)$ et le théorème du rang nous apprend que l'application induit par a dans $\text{Im}(a)$ est donc un automorphisme de $\text{Im}(a)$, dont la matrice C dans la base $(v_1, \dots, v_r)$ de $\text{Im}(a)$ est donc inversible. En notant P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la base $\mathcal{B}$, par la formule de changement de base, on a donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $C \in GL_r(\mathbb{R})$ telles que $A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

b. ($\Leftarrow$) si $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$, avec les notations précédentes, posons $B = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On vérifie par blocs que $AB = BA = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $A = ABA$ et $B = BAB$ donc B est un pseudo-inverse de A .

($\Rightarrow$) si A admet un pseudo-inverse B , alors en notant b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B , on a $A = ABA = A^2b$ car $AB = BA$ ainsi $a = a^2 \circ b$. Si $x \in \text{Im}(a)$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a(y) = a^2(b(y))$ donc $x \in \text{Im}(a^2)$. Ainsi, $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(a^2)$ et, comme on a toujours $\text{Im}(a^2) \subset \text{Im}(a)$,

on en déduit que $\text{Im}(a) = \text{Im}(a^2)$ donc $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$.

Par double implication, A admet un pseudo-inverse si et seulement si $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$.

c. Par hypothèse, $(AB)^2 = (ABA)B = AB$ donc $(a \circ b)^2 = a \circ b$ ce qui prouve déjà que $a \circ b$ est un projecteur. Si $x \in \text{Ker}(a \circ b)$, alors $ABx = 0$ donc $BAX = 0$ puis $ABAX = 0$ donc $AX = 0$ d'où $x \in \text{Ker}(a)$. De plus, si $x \in \text{Im}(a \circ b)$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a \circ b(y) = a(b(y)) \in \text{Im}(a)$. On vient de prouver que $\text{Ker}(a \circ b) \subset \text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a \circ b) \subset \text{Im}(a)$. Avec la formule du rang appliquée à $a \circ b$ et a , $\dim(\text{Ker}(a \circ b)) + \text{rang}(a \circ b) = \dim(\text{Ker}(a)) + \text{rang}(a) = n$ alors que les inclusions précédentes montrent que $\dim(\text{Ker}(a \circ b)) \leq \dim(\text{Ker}(a))$ et $\dim(\text{Im}(a \circ b)) \leq \dim(\text{Im}(a))$. Par conséquent, ces inégalités ne peuvent être que des égalités et, par inclusion et égalité des dimensions, $\text{Im}(a \circ b) = \text{Im}(a)$ et $\text{Ker}(a \circ b) = \text{Ker}(a)$. Ainsi, $a \circ b$ est la projection sur $\text{Im}(a)$ parallèlement à $\text{Ker}(a)$.

d. Par hypothèse, A admet un pseudo-inverse donc $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$ d'après **b.** et $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$ d'après **a.** et il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ adaptée à cette décomposition. On sait que $A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$ et $C \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$ la matrice de l'application induite par a dans $\text{Im}(a)$. Posons $A' = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit B un pseudo-inverse de A et $B' = P^{-1}BP$ de sorte que $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$ par changement de base. Les conditions $AB = BA$, $A = ABA$ et $B = BAB$ deviennent $A'B' = B'A'$, $A' = A'B'A'$ et $B' = B'A'B'$ en simplifiant par P et P^{-1} . Comme a et b commutent, $\text{Im}(a)$ et $\text{Ker}(a)$ sont stables par b donc on a, par blocs de même taille que pour A' , $B' = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$. Or $B' = B'A'B'$ impose $V = 0$ et $A' = A'B'A'$ impose $C = CUC$ donc $UC = I_r$ car C est inversible. Ainsi, seule la matrice B (vu en **b.**) définie par $B = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ est pseudo-inverse de A .

e. D'après CAYLEY-HAMILTON, $\chi_C(C) = 0$. Écrivons $\chi_C = \sum_{k=0}^r a_k X^k$ avec $a_0 = \chi_C(0) = (-1)^r \det(C) \neq 0$ car C inversible et $a_r = 1$. Posons $Q = \left(1 - \frac{a_1}{a_0}\right) \chi_C$ de sorte que, par un petit calcul, le terme en X de Q est nul donc $Q(C) = 0$ avec $Q = a_0 - b_2 X^2 - \dots - b_{r+1} X^{r+1}$. En multipliant $Q(C) = 0$ par $\frac{C^{-1}}{a_0}$, on a $C^{-1} = \sum_{k=2}^{r+1} \frac{b_k}{a_0} C^{k-1}$. Si on reporte dans l'écriture par blocs $B = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, on a donc $B = \sum_{k=2}^{r+1} \frac{b_k}{a_0} A^{k-1}$ car $A^k = P \begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ pour $k \geq 1$ donc B est un polynôme en A .

Avec χ_C directement, on aurait eu C^{-1} en fonction de I_r ce qui aurait donné B en fonction des puissances de A mais aussi de $AB = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et on n'aurait pas pu conclure.

f. Soit $x \in E$, alors $\|a(x) - y\|^2 = \|a(x - v + v) - y\|^2 = \|a(x - v) + a \circ b(y) - y\|^2$. Or $a(x - v) \in \text{Im}(a)$ et $a(a \circ b(y) - y) = a(b \circ a(y) - y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $ABA = A$ donc $a \circ b(y) - y \in \text{Ker}(a) = \text{Im}(a)^\perp$ par hypothèse. Par la relation de PYTHAGORE, $\|a(x) - y\|^2 = \|a(x - v)\|^2 + \|a(v) - y\|^2 \geq \|a(v) - y\|^2$ ce qui prouve que $f : x \mapsto \|a(x) - y\|$ est minimale en v .

De plus, si $w \neq v \in \mathbb{R}^n$ vérifie $f(w) = f(v)$, d'après le calcul précédent, $\|a(w - v)\|^2 = 0$ donc $w - v \in \text{Ker}(a)$. Or $a = b \circ a^2$ et $b = a \circ b^2$ donc $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(b)$ et $\text{Im}(b) \subset \text{Im}(a)$ d'où $\text{Im}(a) = \text{Im}(b)$. Ainsi, il vient

$v = b(y) \in \text{Im}(a) = \text{Ker}(a)^\perp$ donc, toujours d'après PYTHAGORE, on peut conclure que $\|w\| > \|v\|$ car $\|w\|^2 = \|w - v + v\|^2 = \|w - v\|^2 + \|v\|^2 > \|v\|^2$ car $\|w - v\| > 0$.

91 a. Il est clair que $B + nI_n$ est de rang 1 (matrice avec des colonnes non nulles et toutes égales) donc $-n$ est valeur propre de B et $E_{-n}(B)$ est de dimension $n - 1$ par le théorème du rang. Comme B est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, puisque $\text{Tr}(B) = n(1 - n) = (n - 1) \times (-n)$, la dernière valeur propre est 0, ce qui est évident quand on calcule $BU = 0$ avec ${}^tU = (1 \cdots 1)$. Ainsi, $\chi_B = X(X + n)^{n-1}$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que λ soit une valeur propre de A , alors il existe $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. On conjugue et on transpose et, comme A est réelle et symétrique, $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ donc ${}^t(\bar{X})^tA = {}^t(\bar{X})A = \bar{\lambda}{}^t(\bar{X})$. Ainsi, ${}^t(\bar{X})AX = \bar{\lambda}{}^t(\bar{X})X = \bar{\lambda}\|X\|^2$ d'une part, et ${}^t(\bar{X})AX = {}^t(\bar{X})(\lambda X) = \lambda{}^t(\bar{X})X = \lambda\|X\|^2$ d'autre part en notant $\|X\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 > 0$ si ${}^tX = (x_1 \cdots x_n)$. Comme $\bar{\lambda}\|X\|^2 = \lambda\|X\|^2$, $\bar{\lambda} = \lambda$ donc λ est réel. Par conséquent, le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}$.

92

93

94 a. Comme A est symétrique réelle, par le théorème spectral matriciel, il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (contenant les valeurs propres de A) et une matrice orthogonale U telles que $A = UD^tU$.

Comme $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$, posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $R = P\Delta^tP$ de sorte que R est bien inversible par produit et, comme ${}^tR = R$, on a ${}^tRR = R^2 = P\Delta^tPP\Delta^tP = P\Delta^2P = PD^tP = A$.

b. Analyse : supposons que de telles matrices P et D existent, alors ${}^tPP = {}^tRR$ d'après la question b. donc $({}^tR)^{-1}{}^tPPR^{-1} = {}^t(PR^{-1})(PR^{-1}) = I_n$ ce qui montre que $Q = PR^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Comme $P = QR$, on a $B = {}^tPDP = {}^tR^tQDQR$ d'où ${}^tQDQ = ({}^tR)^{-1}BR^{-1}$.

Synthèse : Soit $S = ({}^tR)^{-1}BR^{-1}$, comme B est symétrique, ${}^tS = ({}^tR)^{-1}{}^tBR^{-1} = S$ donc S est symétrique réelle ce qui montre, par le théorème spectral version matricielle, qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D (dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de S) telles que $S = {}^tQDQ$. Posons $P = QR$, alors P est inversible car Q et R le sont et, comme $R = Q^{-1}P = {}^tQP$, on a $A = {}^tRR = {}^tPQ^tQP = {}^tPP$ car Q est orthogonale. Comme $S = {}^tQDQ = ({}^tR)^{-1}BR^{-1}$, on a $B = {}^tR^tQDQR$ donc $B = {}^tPDP$ car $P = QR$. Il existe donc bien $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

c. Posons $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ où les μ_k sont les valeurs propres de S . Soit, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_k un vecteur propre de S associé à μ_k . Ainsi, $SX_k = ({}^tR)^{-1}BR^{-1}X_k = \mu_k X_k$ donc ${}^tX_k SX_k = {}^tX_k ({}^tR)^{-1}BR^{-1}X_k = \mu_k \|X_k\|^2$.

Or si on décompose $R^{-1}X_k = \sum_{i=1}^n y_i V_i$ dans une base orthonormale de vecteurs propres de B , par hypothèse $BV_i = \alpha_i V_i$ avec $\alpha_i \geq 0$ donc on trouve ${}^tX_k ({}^tR)^{-1}BR^{-1}X_k = (R^{-1}X_k | BR^{-1}X_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 = \mu_k \|X_k\|^2 \geq 0$

et, comme $\|X_k\| > 0$, $\mu_k \geq 0$. Par conséquent, $\det(A + B) = \det({}^tPP + {}^tPDP) = \det({}^tP)\det(I_n + D)\det(P)$ ce qui donne $\det(A + B) = \det(P)^2 \det(I_n + D)$. De même, $\det(A) = \det(P)^2$ et $\det(B) = \det(P)^2 \det(D)$ donc l'inégalité à établir se ramène à $\det(I_n + D) \geq 1 + \det(D)$ car $\det(P)^2 > 0$. Or, en développant,

$\det(I_n + D) = \prod_{k=1}^n (1 + \mu_k) = 1 + \sum_{k=1}^n \mu_k + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i \mu_j + \cdots + \prod_{k=1}^n \mu_k$. Comme tous les termes après les

deux premiers sont tous positifs, on a bien $\prod_{k=1}^n (1 + \mu_k) \geq 1 + \prod_{k=1}^n \mu_k$ donc $\det(I_n + D) \geq 1 + \det(D)$, et enfin $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

95

96 a. Soit $(x, y) \in E^2$ et X, Y les vecteurs colonnes associés des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}_0$. Comme $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale, on a $(p(x)|y) = {}^t(AX)Y = {}^tX^tAY = {}^tX({}^tAY) = (x|q(y))$.

b. Par définition, $\text{Tr}(q \circ p)$ est la trace de la matrice de $q \circ p$ dans n'importe quelle base, choisissons la base $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q \circ p) = ((v_i|q \circ p(v_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$ ce qui montre que $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(B) = \sum_{k=1}^n (v_k|q \circ p(v_k)) = \sum_{k=1}^n \|p(v_k)\|^2$ avec la question a. avec $x = v_k$ et $y = p(v_k)$.

c. Si p est un projecteur orthogonal, $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E donc il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ de E telle que $(v_1, \dots, v_r)$ (resp. $(v_{r+1}, \dots, v_n)$) soit une base orthonormée de $\text{Im}(p)$ (resp. $\text{Ker}(p)$). Si on applique b. avec $\mathcal{B}$, on a $\text{Tr}(q \circ p) = \sum_{k=1}^n \|p(v_k)\|^2 = r$ car $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $p(v_k) = v_k$ car $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $\forall k \in \llbracket r+1; n \rrbracket$, $p(v_k) = 0_E$. Or, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{Tr}(p) = \text{rang}(p) = r$ et on a bien $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p)$.

d. Dans le cas général, on prend une base orthonormée $(v_1, \dots, v_r)$ de $\text{Im}(p)$ qu'on complète en une base orthonormale $v_1, \dots, v_n$ de E . Alors, toujours d'après b., on a $\text{Tr}(q \circ p) = \sum_{k=1}^n \|p(v_k)\|^2 = r + \sum_{k=r+1}^n \|p(v_k)\|^2$ car, comme avant, $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $p(v_k) = v_k$. Comme $\sum_{k=r+1}^n \|p(v_k)\|^2 \geq 0$ et qu'on a encore $\text{Tr}(p) = r$, on a bien $\text{Tr}(q \circ p) = r + \sum_{k=r+1}^n \|p(v_k)\|^2 \geq r = \text{Tr}(p)$.

e. Avec une base orthonormée $\mathcal{B}$ choisie comme dans b., comme $\text{Tr}(q \circ p) = r + \sum_{k=r+1}^n \|p(v_k)\|^2$, on a l'équivalence $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p) \iff \sum_{k=r+1}^n \|p(v_k)\|^2 = 0 \iff (\forall k \in \llbracket r+1; n \rrbracket, p(v_k) = 0_E)$. Cette condition revient à $\text{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n) \subset \text{Ker}(p)$ ou encore, par égalité des dimensions car $\text{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$ et $\text{Ker}(p)$ sont des supplémentaires de $\text{Im}(p)$, à $\text{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n) = \text{Ker}(p)$. Mais comme $\text{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n) = \text{Im}(p)^\perp$ par construction, on a bien l'équivalence $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p) \iff p$ est orthogonal.

97 a. D'après le théorème spectral version matricielle, si M est symétrique réelle, elle est ODZ. Réciproquement, s'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O(n)$ telles que $M = PD^tP$, alors ${}^tM = P^tD^tP = PD^tP = M$ donc M est symétrique et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ODZ si et seulement si M est symétrique.

b. Si $N(\theta)$ est OTZ, alors $N(\theta)$ est semblable à une matrice triangulaire T donc, comme T , $N(\theta)$ admet deux valeurs propres réelles. Or $\chi_{N(\theta)} = \begin{vmatrix} X - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & X - \cos(\theta) \end{vmatrix} = (X - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ donc $\chi_{N(\theta)} = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ donc $e^{\pm i\theta} \in \mathbb{R}$ ce qui impose $\theta \equiv 0 [\pi]$.

Réciproquement, si $\theta \equiv 0 [2\pi]$ (resp. $\theta \equiv \pi [2\pi]$) alors $N(\theta) = I_2$ (resp. $N(\theta) = -I_2$) qui est OTZ.

Ainsi, $N(\theta)$ est OTZ si et seulement si $\theta \equiv 0 [\pi]$.

c. Si M est OTZ, alors M est semblable à une matrice triangulaire T donc $\chi_M = \chi_T$ est scindé dans

$\mathbb{R}[X]$. Réciproquement, si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, on sait d'après le cours que M est trigonalisable donc il existe une matrice inversible U et une matrice triangulaire supérieure T' telles que $M = UT'U^{-1}$. Si f est l'endomorphisme canoniquement associé à M et si U est la matrice de passage entre la base canonique $\mathcal{B}_0$ et une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, la formule $M = UT'U^{-1}$ montre que $T' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ car $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$. Par orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT, il existe une base orthonormale (dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique) $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ telle que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$. Si on note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la condition précédente montre que Q est triangulaire supérieure. La formule de changement de base montre que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = Q^{-1}T'Q$. Comme Q est triangulaire supérieure et inversible, Q^{-1} est aussi triangulaire supérieure donc, par produit de trois telles matrices, $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est triangulaire supérieure. Si on note P la matrice de passage entre les deux bases orthonormales $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'$, on sait d'après le cours que $P \in O(n)$ et on a aussi $M = PTP^{-1} = PT^tP$ ce qui clôt la preuve.

Ainsi, M est OTZ si et seulement si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

- 98** Méthode 1 : un vecteur normal au plan P est le vecteur unitaire $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ et on peut prendre la base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ en prenant $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. Par définition de

p , on a $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si on note $O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la

base canonique $\text{can} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B}$, on sait que la matrice de A de p dans la base canonique vaut $A = \text{Mat}_{\text{can}}(p) = O^{-1}DO$. Mais comme O est la matrice de passage entre deux bases orthonormées, on a

O orthogonale donc $O^{-1} = {}^tO$. Ainsi, $A = {}^tODO = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ après calculs.

Méthode 2 : soit $q : v \mapsto v - (v|n)n$ avec n un vecteur normal unitaire de P . Alors $q(n) = n - \|n\|^2 n = 0$ et $q(v) = v$ si $v \perp n$. Ainsi, comme q est linéaire par bilinéarité du produit scalaire et coïncident avec p sur P et en $n = v_3$, on en conclut que $p = q$. Comme $p(e_1) = e_1 - (e_1|v_3)v_3 = (1, 0, 0) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) = \frac{1}{3}(2, -1, -1)$, $p(e_2) = e_2 - (e_2|v_3)v_3 = (0, 1, 0) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) = \frac{1}{3}(-1, 2, -1)$ et $p(e_3) = e_3 - (e_3|v_3)v_3 = \frac{1}{3}(-1, -1, 2)$ de même,

on en déduit à nouveau que $A = \text{Mat}_{\text{can}}(p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 99** **a.** Comme $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $B = {}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $BX = 0$, alors ${}^tAAX = 0$ donc, en multipliant par tX à gauche, ${}^tX{}^tAAX = 0$ donc $\|AX\|^2 = 0$ donc $AX = 0$. En notant f l'application linéaire canoniquement associée à A , on a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et $\text{rang}(f) = \text{rang}(A) = p$ donc f est injective car son rang vaut la dimension de son espace de départ. Par conséquent, $AX = 0$ implique $X = 0$ et on a montré que $\text{Ker}(B) = \{0\}$ donc B est "injective". Comme B est une matrice carrée, B inversible.
- b.** On calcule aisément $P^2 = AB^{-1}{}^tAAB^{-1}{}^tA = AB^{-1}BB^{-1}{}^tA = AB^{-1}{}^tA = P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc P est une matrice de projection de l'espace $\mathbb{R}^n$.

• Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, comme A est “injective” et B^{-1} est inversible, on a l’équivalence suivante $PY = 0 \iff AB^{-1}{}^tAY = 0 \iff {}^tAY = 0$ qui prouve que $\text{Ker}(P) = \text{Ker}({}^tA)$.

• Comme $P = AB^{-1}{}^tA$, on a clairement $\text{Im}(P) \subset \text{Im}(A)$. Or, avec la formule du rang, on trouve que $\text{rang}(P) = n - \dim(\text{Ker}(P)) = n - \dim(\text{Ker}({}^tA))$ mais $\text{rang}(A) = \text{rang}({}^tA) = n - \dim(\text{Ker}({}^tA))$ donc $\text{rang}(P) = \text{rang}(A) = p$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc $\text{Im}(P) = \text{Im}(A)$.

Plus précisément, P est la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\text{Im}(A)$ parallèlement à $\text{Ker}({}^tA)$. Soit $(Y, Z) \in \text{Im}(A) \times \text{Ker}({}^tA)$, alors ${}^tAZ = 0$ et il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = AX$ et $(Y|Z) = (AX|Z) = {}^t(AX)Z = {}^tX{}^tAZ = {}^tX0 = 0$ donc $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}({}^tA)$ sont orthogonaux. Plus précisément encore, P est la projection orthogonale sur $\text{Im}(A)$.

On pouvait aussi le prouver en constatant que ${}^tP = {}^t(AB^{-1}{}^tA) = A({}^tB)^{-1}{}^tA$ or B est symétrique (matrice de GRAM) donc ${}^tP = AB^{-1}{}^tA = P$ ce qui montre aussi que P est une projection orthogonale car la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale.

100 a. Soit a un vecteur unitaire de D , on complète (a) en une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ avec (b, c) une

base orthonormée directe de P (pour l’orientation de P induite par celle de D par a). Ainsi, $\mathcal{B} = (a, b, c)$

est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle on sait que $R = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ si

θ est l’angle de la rotation r autour de D orientée par a . Par définition de la réflexion s , comme $a \in P^\perp$ et $(b, c) \in P^2$, on a $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $RS = SR = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ donc

$s \circ r = r \circ s$ et les isométries r et s commutent et $r \circ s = s \circ r$ est la rotation-miroir autour de D , d’angle θ .

b. Supposons que $s \circ r = r \circ s$. Comme r et s commutent les sous-espaces propres de s sont stables par r et vice-versa. Or $E_1(r) = D$, $E_1(s) = P$ et $E_{-1}(s) = P^\perp$. En évaluant en a , $s(a) = s(r(a)) = r(s(a))$ donc $s(a) \in E_1(r) = D$ car r n’est pas l’identité. Comme s est une isométrie, $\|s(a)\| = \|a\| = 1$ or $s(a) \in D = \text{Vect}(a)$ qui ne contient que deux vecteurs unitaires : a et $-a$. Traitons les deux cas :

• Si $s(a) = -a$, alors $a \in E_{-1}(s) = P^\perp$ donc $D \perp P$ et on est dans le cas de la question a.

• Si $s(a) = a$, alors $a \in E_1(s) = P$ donc $D \subset P$. Soit b un vecteur unitaire normal à P , alors $s(b) = -b$ donc, comme $r(s(b)) = s(r(b))$, on a $s(r(b)) = -r(b)$ donc $r(b) \in E_{-1}(s) = P^\perp$ et, comme r est une isométrie, $r(b) = \pm b$. Traitons à nouveau les deux cas :

– Si $r(b) = b$, alors $b \in E_1(r) = D = \text{Vect}(a)$ ce qui est absurde car $a \perp b$.

– Si $r(b) = -b$, alors $b \in E_{-1}(r)$. Or $\det(r + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{vmatrix} = 4(1 + \cos \theta)$.

Comme $b \neq 0 \in E_{-1}(r)$, on a $\theta = \pi$ et r est un demi-tour. Si $c = a \wedge b$, $\mathcal{B} = (a, b, c)$ est une base orthonormée directe, $R = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on a

bien $RS = SR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $r \circ s = s \circ r$ est la réflexion de plan $P' = \text{Vect}(a, c) = P^\perp \oplus D$.

Il existe deux façons pour qu’une rotation r autour de D et une réflexion de plan P commutent :

- Soit $D \perp P$ et r et s commutent quel que soit l'angle θ de la rotation.
- Soit $D \subset P$ et r est un demi-tour alors $s \circ r = r \circ s$ est aussi une réflexion.

101 a. Comme u est un vecteur unitaire de E euclidien orienté de dimension 3, il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E (et même une infinité). On obtient $f(u) = (u|u)u = u$, $f(v) = v \wedge u = -w$ et $f(w) = w \wedge u = v$ donc l'image de la base orthonormée $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}' = (u, -w, v)$ qui est aussi une base orthonormée directe (on l'obtient à partir de $\mathcal{B}$ en échangeant deux vecteurs et en changeant le signe de l'un d'entre eux) donc f est une isométrie directe de E d'après le cours. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{-\pi/2} \end{pmatrix}$, on peut donc conclure que f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de la droite orientée par le vecteur u .

b. Analyse : soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Alors $f \circ g = g^3 = g \circ f$ donc, la droite $\text{Vect}(u) = E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et le plan $\text{Vect}(v, w) = \text{Vect}(u)^\perp = \text{Ker}(f^2 + \text{id}_E)$ (car $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$) sont stables par g car $f - \text{id}_E$ et g commutent et que $f^2 + \text{id}_E$ et g commutent. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \alpha u$ et il existe $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(v) = \beta v + \gamma w$. Comme $f(v) = -w$, on a $g(w) = -g(f(v)) = -f(g(v)) = -\beta f(v) - \gamma f(w) = -\beta v + \beta w$. Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \\ 0 & \gamma & \beta \end{pmatrix}$ et, comme $g^2 = f$, $B^2 = A$ d'où $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 - \gamma^2 = 0$ et $2\beta\gamma = -1$ donc $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = -\gamma$.

Synthèse : les matrices $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ vérifient $B_k^2 = A$ et ces matrices sont des matrices orthogonales.

En conclusion, il y a quatre endomorphismes g (en fait des isométries) de E tels que $g^2 = f$. Les deux isométries directes (associées à B_1 et B_2) sont les rotations autour de la droite orientée par le vecteur u et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Les deux autres isométries sont des rotations-miroirs.

102 a. $\det(M({}^tMM)^2) = \det(M)\det({}^tM)\det(M)\det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2 = \det(I_n) = 1$ par multiplicativité du déterminant et par hypothèse sur M donc, comme $t \mapsto t^5$ est injective sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\det(M) = 1$ donc $\det(M) \neq 0$ et M est bien inversible.

b. Comme ${}^t({}^tMM) = {}^tM({}^tM) = {}^tMM$, la matrice tMM est symétrique (matrice de GRAM associée à la matrice M) et elle est inversible d'après **a.** donc son carré est aussi symétrique et l'inverse de son carré est aussi symétrique. Ainsi, comme $M = (({}^tMM)^2)^{-1}$ est symétrique.

c. La relation $M({}^tMM)^2 = I_n$ devient donc, puisque M est symétrique, $M^5 = I_n$. Le polynôme $P = X^5 - 1$ est donc annulateur de M donc les valeurs propres de M font partie des racines de P . Or on sait avec le théorème spectral que les valeurs propres de M sont toutes réelles. Les racines de P sont les racines cinquièmes

de l'unité dont une seule est réelle, 1. Ainsi, 1 est la seule valeur propre de M et, M étant diagonalisable par le théorème spectral, M est semblable (et même orthosemblable) à la matrice I_n , donc $M = I_n$.

103 a. Les matrices appartenant à $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ s'appellent les matrices à diagonale propre.

La matrice A étant triangulaire supérieure, on a $\chi_A = (X - 1)^n$ donc $\text{Sp}(A) = \{1, \dots, 1\}$ (1 répété n fois) donc $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Plus généralement, toute matrice triangulaire est dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Comme B est symétrique réelle, elle est diagonalisable par le théorème spectral et, comme $\text{rang}(B) = 1$, on a $\dim(\text{Ker}(B)) = n - 1$ par la formule du rang donc 0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$. La dernière valeur propre λ vérifie donc $\text{Tr}(B) = 0 + \dots + 0 + \lambda = \lambda$ donc $\lambda = n$ et $B \notin \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ car la diagonale de B ne contient pas $0, \dots, 0, n$.

b. $\mathcal{D}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Dès que $n \geq 2$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il n'est pas stable par somme. En effet, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ alors que $A_2 - B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ car $\chi_{A_2 - B_2} = X^2 + 1$ donc ses valeurs propres sont $\pm i$ alors que les deux termes diagonaux de $A_2 - B_2$ sont 0 et 0. On peut généraliser pour un entier $n \geq 3$ en prenant $A_n = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec les mêmes justifications.

c. Si A est symétrique, pour le produit scalaire canonique sur les matrices défini par $(A|B) = \text{Tr}({}^tAB)$, on a $\|A\|^2 = \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2$. Or, d'après le théorème spectral, on a $A = PD^tP$ avec P orthogonale et D diagonale contenant les valeurs propres de A (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Ainsi, il vient $\|A\|^2 = \text{Tr}({}^tAA) = \text{Tr}(PD^2P) = \text{Tr}(D^2)$ car deux matrices semblables ont même trace. Or $\text{Tr}(D^2) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ ce qui donne bien la relation $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ (1).

Si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n$, on a donc $\|A\|^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda^2$ mais, par hypothèse, les valeurs propres de A sont $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$ (2). Ainsi, $\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_{i,j}^2 = 0$ (1) - (2) ce qui montre que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \implies a_{i,j} = 0$ et enfin A diagonale. Ainsi, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n = \mathcal{D}_n$ (les matrices diagonales) car réciproquement, les matrices diagonales (donc triangulaires) sont symétriques et à diagonale propre.

d. Si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n$, alors par hypothèse $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - 0) = X^n$ car les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Par CAYLEY-HAMILTON, $A^n = 0$ donc A est nilpotente. Comme A^2 est symétrique donc diagonalisable et qu'elle est aussi nilpotente, elle est forcément nulle car elle est semblable à une matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale. Ainsi $A^2 = 0 = -{}^tAA$ donc ${}^tAA = 0$ ce qui donne $\|A\|^2 = \text{Tr}({}^tAA) = 0$ donc $A = 0$. Par conséquent $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.

104 a. Par un calcul matriciel par blocs, on trouve ${}^tMM = \begin{pmatrix} 1 + \|C\|^2 & 0 \\ 0 & C^tC + I_n \end{pmatrix}$ (matrice de GRAM associée à M) donc $\det({}^tMM) = (1 + \|C\|^2)\det(I_n + C^tC)$. Or ${}^tCC = 0$ si $C = 0$ et tCC est de rang 1 (toutes les colonnes de C^tC sont proportionnelles à C) sinon.

- Si $C = 0$, $M = I_{n+1}$ donc M est inversible.
- Si $C \neq 0$, C^tC est symétrique et de rang 1 donc, d'après le théorème spectral, C^tC est diagonalisable avec 0 valeur propre de multiplicité $n - 1$, l'autre valeur propre étant $\text{Tr}(C^tC) = \text{Tr}({}^tCC) = \|C\|^2$

donc $C^t C$ est semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0, \|C\|^2)$ donc $I_n + C^t C$ est semblable à $\text{diag}(1, \dots, 1, 1 + \|C\|^2)$ d'où $\det(I_n + C^t C) = 1 + \|C\|^2$. Par conséquent, $\det(M)^2 = \det({}^t M M) = (1 + \|C\|^2)^2 > 0$ donc $\det(M) \neq 0$ et la matrice M est bien inversible.

Dans les deux cas, que $C = 0$ ou $C \neq 0$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -{}^t C \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est inversible.

b. Comme ${}^t(M^{-1}) = ({}^t M)^{-1}$, on a ${}^t N N = M^t (M^{-1}) M^{-1} {}^t M = M (M^t M)^{-1} {}^t M$. Mais on vérifie par calcul que $M^t M = {}^t M M = \begin{pmatrix} 1 + \|C\|^2 & 0 \\ 0 & C^t C + I_n \end{pmatrix}$. Ainsi, ${}^t N N = M ({}^t M M)^{-1} {}^t M = M M^{-1} ({}^t M)^{-1} M^{-1}$ donc ${}^t N N = I_{n+1} {}^t I_{n+1} = I_{n+1}$ et la matrice N est bien orthogonale par définition. De plus, N est une matrice de rotation (isométrie directe) car $\det(N) = \det(M^{-1}) \times \det({}^t M) = \frac{\det(M)}{\det(M)} = 1$.

105 a. Comme id_E et $u_1, \dots, u_n$ sont des endomorphismes symétriques de E , par somme, $v = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - \text{id}_E$ en est aussi un donc, d'après le théorème spectral, $\left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - \text{id}_E$ est diagonalisable.

b. Soit λ une valeur propre de v , alors il existe $x \neq 0_E \in E$ tel que $v(x) = \lambda x$. Or, par hypothèse, on a $(v(x)|x) = \sum_{k=1}^n (u_k(x)|x) - \|x\|^2 = 0$ donc, comme $(v(x)|x) = \lambda \|x\|^2$, on a $\lambda = 0$ car $\|x\| > 0$. Ainsi, $\text{Sp}(v) = \{0\}$ donc, comme $E = E_0(v)$ puisque v est diagonalisable, on a $v = 0$ donc $\sum_{k=1}^n u_k = \text{id}_E$.

c. Soit $x \in E$, d'après la question précédente, on a $x = \text{id}_E(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ donc $x \in \sum_{k=1}^n \text{Im}(u_k)$. On a donc déjà $E = \sum_{k=1}^n \text{Im}(u_k)$. Comme, $\dim(E) = \dim\left(\sum_{k=1}^n \text{Im}(u_k)\right) = \sum_{k=1}^n \dim(\text{Im}(u_k)) = \sum_{k=1}^n \text{rang}(u_k)$ par hypothèse, un théorème du cours nous permet de conclure que cette somme est directe, $E = \bigoplus_{k=1}^n \text{Im}(u_k)$.

d. Soit $y \in \text{Im}(u_k)$, alors $y = u_k(y) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n u_i(y)$ d'après **b.** Ainsi, par unicité de l'écriture vue en **c.**, on en déduit que $y = u_k(y)$ et $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $u_i(y) = 0_E$ si $i \neq k$. Par conséquent, pour $x \in E$, en notant $y = u_k(x)$, on a $u_k(y) = u_k^2(x) = u_k(x) = y$ et $\forall i \neq k$, $u_i \circ u_k(x) = u_i(y) = 0_E$. Les u_k sont donc des projecteurs et, comme les u_k ont été supposés symétriques, les u_k sont des projecteurs orthogonaux.

De plus, les sous-espaces $\text{Im}(u_k)$ sont orthogonaux deux à deux car si $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, alors $\text{Im}(u_i) \subset \text{Ker}(u_j)$ car $u_j \circ u_i = 0$ d'après ce qui précède, ainsi $\text{Im}(u_i) \subset \text{Im}(u_j)^\perp$ puisque u_j est un projecteur orthogonal. On a donc bien établi que $\text{Im}(u_i) \perp \text{Im}(u_j)$ dès que $i \neq j$.

106 a. Par hypothèse, $P = X^3 + 9X$ est annulateur de A . Or $X^3 + 9X = X(X - 3i)(X + 3i)$ et on sait que les valeurs propres de A font partie des racines de tout polynôme annulateur de A , donc $\text{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.

b. Comme le polynôme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ et annulateur de A , on sait d'après le cours que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c. Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors elle n'admet que des valeurs propres réelles donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$. Elle est donc semblable à la matrice nulle puisque diagonalisable donc $A = 0$. Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est nulle.

d. Si n est impair, comme $A^3 = -9A$, en passant au déterminant, $\det(A)^3 = (-1)^n 9^n \det(A)$. Si on avait $\det(A) \neq 0$, on aurait $\det(A)^2 = (-1)^n 9^n < 0$ NON ! Si n est impair, $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.

e. Si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral donc elle est nulle avec la question **b.**. Ainsi, il n'existe aucune matrice symétrique réelle non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

107 ($\Rightarrow$) Si p est le projecteur orthogonal sur F , pour tout $x \in E$ qu'on écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, alors

$\|p(x)\|^2 = \|y\|^2 \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$ par PYTHAGORE. Ainsi, en passant à la racine, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ et notons F et G les sous-espaces de E tels que $G = \text{Ker}(p)$ et $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$. Soit $y \in F$ et $z \in G$, alors pour tout réel t , on a $p(ty + z) = ty$ donc $\|p(ty + z)\| = \|ty\| \leq \|ty + z\|$ donc $t^2\|y\|^2 = \|ty\|^2 \leq \|ty + z\|^2 = t^2\|y\|^2 + 2t(y|z) + \|z\|^2$ ce qui prouve que la fonction affine $t \mapsto 2t(y|z) + \|z\|^2$ reste positive sur $\mathbb{R}$. Or ceci n'est possible que si $(y|z) = 0$. Par conséquent $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$ et la projection p est bien orthogonale.

Par double implication, on a bien p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

108 a. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et les vecteur colonnes associés X et Y , alors, avec l'abus classique entre matrice $(1, 1)$ et réels, on a $(x|f(y)) = {}^tX(AY) = -{}^tX^tAY = -({}^tAX)Y = -(f(x)|y)$ car A est antisymétrique par hypothèse.

b. Par définition, $\det(f) = \det(A) = \det(-{}^tA) = (-1)^n \det({}^tA) = (-1)^n \det(A) = (-1)^n \det(f)$ toujours car A est antisymétrique et parce que $\det(A) = \det({}^tA)$.

On en déduit que si n est impair, on a $\det(f) = -\det(f)$ donc $\det(f) = 0$ et f n'est pas un automorphisme.

c. Soit $y \in \text{Im}(f)$, alors $f(y) \in \text{Im}(f)$ par définition donc $\text{Im}(f)$ est stable par f . Il est donc licite de considérer l'endomorphisme g induit par f sur $\text{Im}(f)$, il s'agit de $g : \text{Im}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ définie par $g(x) = f(x)$. Soit $x \in \text{Ker}(g)$, on a donc $x \in \text{Im}(f)$ par définition de g et $g(x) = f(x) = 0$ par définition du noyau donc $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi, il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(z)$ et on a donc $\|x\|^2 = (x|x) = (x|f(z)) = -(f(x)|z) = -(0|z) = 0$ ce qui prouve que x est le vecteur nul. Ainsi, $\text{Ker}(g) = \{0\}$ donc g est un automorphisme de $\text{Im}(f)$.

Pour $(a, b) \in (\text{Im}(f))^2$, on a aussi $(a|g(b)) = (a|f(b)) = -(f(a)|b) = -(g(a)|b)$. Soit une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r)$ de $\text{Im}(f)$, alors $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = ((g(v_i)|v_j))_{1 \leq i, j \leq r}$ donc B est aussi antisymétrique car ${}^tB = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = ((g(v_i)|v_j))_{1 \leq i, j \leq r} = (-(v_j|g(v_i)))_{1 \leq i, j \leq r} = -B$. Ainsi, d'après **b.**, comme g est inversible, on a forcément r pair donc, d'après la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = n - r$ est de la même parité que n .

d. Comme $n = 3$, on ne peut avoir d'après **c.** que $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ ou $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$.

- Si $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$, alors $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$ donc $f = 0$, la matrice de f dans n'importe quelle base est la matrice nulle qui est de la forme annoncée avec $a = 0$.

- Si $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$, soit v_1 un vecteur unitaire de $\text{Ker}(f)$. Comme en **c.**, si $(x, y) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f)$, il existe $z \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(z)$ et on a $(x|y) = (x|f(z)) = -(f(x)|z) = -(0|z) = 0$ donc $\text{Ker}(f) \perp \text{Im}(f)$. Soit v_2 un vecteur unitaire de $\text{Im}(f)$ ($\text{Im}(f)$ est un plan), alors comme $(f(v_2)|v_2) = -(v_2|f(v_2))$, on a $f(v_2) \in \text{Im}(f)$, $f(v_2) \neq 0$ car $v_2 \notin \text{Ker}(f)$. Posons donc $v_3 = \frac{f(v_2)}{\|f(v_2)\|}$ de sorte que $\|v_3\| = 1$. Par construction, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et $f(v_2) = av_3$. On a vu en précédemment que la matrice de l'application g induite par f dans $\text{Im}(f)$ était antisymétrique dans une base orthonormale de $\text{Im}(f)$ et que justement (v_2, v_3) en est une, on a forcément $f(v_3) = -av_2$.

Ainsi, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ donc $\chi_A = X(X^2 + a^2) = X(X + ia)(X - ia)$ avec $a \neq 0$.

Comme $ia \notin \mathbb{R}$, f (ou A) n'est diagonalisable que si f est nulle.

109 a. Par définition, la distance de x à F est le réel défini par $d(x, F) = \inf_{y \in F} (\|x - y\|)$ et on a vu dans le cours

que $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur F .

b. Posons $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme on sait que $(A|B) = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{i,j} b_{i,j}$ (avec des notations logiques), on voit que $(U|V) = 0$. Il suffit donc de normer ces deux matrices pour avoir une base orthonormale de F . Or $\|U\|^2 = \|V\|^2 = 2$ donc $\mathcal{B} = \left(\frac{U}{\sqrt{2}}, \frac{V}{\sqrt{2}}\right)$ est une base orthonormale de F .

c. Nommons P le projeté de M sur la plan F . Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de F , on sait que $P = \left(M|\frac{U}{\sqrt{2}}\right) \frac{U}{\sqrt{2}} + \left(M|\frac{V}{\sqrt{2}}\right) \frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}((M|U)U + (M|V)V) = -\frac{1}{2}U + \frac{3}{2}V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, comme on a

$M - P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, il vient $d(M, F) = \|M - P\| = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 1 + 1 + 9} = \sqrt{5}$.

ORAUX 2022 THÈME 8

PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

110 a. Une arête dans ce graphe est caractérisée par les deux sommets qu'elle relie. On a n sommets et il faut en choisir deux parmi ceux-ci, cela fait exactement $\binom{n}{2}$ arêtes.

b. Si $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note R_k le nombre de sommets qui sont reliés au sommet k (le degré de ce sommet). Par définition, on a $R_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n T_{i,k}$ ($n-1$ termes dans cette somme). Or les $T_{x,y}$ sont mutuellement indépendants et suivent la loi de BERNOULLI de paramètre p par hypothèse. D'après le cours, R_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1, p)$ ce qui signifie que $\forall j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(R_k = j) = \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}$.

c. Aucune arête ne part du sommet k si et seulement si $R_k = 0$. Ainsi, comme $Z = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{(R_k=0)}$, on déduit de la linéarité de l'espérance que $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(R_k=0)}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(R_k = 0) = n(1-p)^{n-1}$.

d. Méthode 1 : on peut appliquer l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV à la variable aléatoire Z qui admet bien un moment d'ordre 2 car elle est bornée. Ainsi, avec $\varepsilon = \mathbb{E}(Z) > 0$, on obtient la majoration $\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \mathbb{E}(Z)) \leq \frac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2}$. Or $(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \mathbb{E}(Z)) = (Z \leq 0) \cup (Z \geq 2\mathbb{E}(Z)) = (Z = 0) \cup (Z \geq 2\mathbb{E}(Z))$ car Z est une variable aléatoire positive. Ainsi, on a l'inclusion $(Z = 0) \subset (|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \mathbb{E}(Z))$ donc, par croissance de la probabilité $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(Z = 0) \leq \mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \mathbb{E}(Z)) \leq \frac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2}$ et on a l'inégalité voulue.

Méthode 2 : comme $Z(\Omega) \subset \llbracket 0; n \rrbracket$ par construction, $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}((Z - \mathbb{E}(Z))^2) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Z = k)(k - \mathbb{E}(Z))^2$ par théorème de transfert. Tous ces termes de cette somme sont positifs, ainsi $\mathbb{V}(Z)$ est supérieur au premier, $\mathbb{V}(Z) \geq \mathbb{P}(Z = 0)(0 - \mathbb{E}(Z))^2 = \mathbb{P}(Z = 0)\mathbb{E}(Z)^2$ donc $\mathbb{P}(Z = 0) \leq \frac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2}$ car $\mathbb{E}(Z) > 0$ d'après c..

e. $\mathbb{E}(Z) = n(1-p)^{n-1} = n \exp\left((n-1) \ln\left(1 - c \frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ or, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, on a le calcul suivant : $(n-1) \ln\left(1 - c \frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{=} n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(-c \frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} -c \ln(n) + o(1)$ (après regroupement). Ainsi, $\exp\left((n-1) \ln\left(1 - c \frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} e^{-c \ln(n) + o(1)} \underset{+\infty}{=} n^{-c} e^{o(1)} \underset{+\infty}{\sim} n^{-c}$ donc $\mathbb{E}(Z) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$.

f. Comme Z est à valeurs entières, $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(Z \geq k)$. Ainsi, $\mathbb{P}(Z \geq 1) \leq \mathbb{E}(Z)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z) = 0$ car $c > 1$ et $\mathbb{E}(Z) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$ donc $\mathbb{P}(Z \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Z = 0)$ tend vers 0, ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z = 0) = 1$ si $c > 1$. On n'a presque sûrement aucun sommet isolé quand n tend vers $+\infty$ si $c > 1$.

g. $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$ et $Z^2 = \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{(R_k=0)}\right)^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{(R_k=0)}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{1}_{(R_i=0)} \mathbb{1}_{(R_j=0)}$ ce qui donne $Z^2 = \mathbb{E}(Z) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{1}_{(R_i=0) \cap (R_j=0)}$ d'où $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(R_i = 0, R_j = 0)$. Il y a une arête possible entre les sommets i et j , et $n-2$ autres arêtes possibles arrivant en i et $n-2$ autres arrivant en j . Par indépendance mutuelle, on a $\mathbb{P}(R_i = 0, R_j = 0) = (1-p)^{2n-3}$. Ainsi, en reportant, on obtient $\mathbb{V}(Z) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}$ donc, en factorisant par rapport aux puissances

de $1 - p$, cela donne $\mathbb{V}(Z) = n(1 - p)^{n-1}(1 - (1 - p)^{n-2}) + n^2p(1 - p)^{2n-3}$. Comme $(1 - p)^{n-1} \underset{+\infty}{\sim} n^{-c}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - p) = 1$, $(1 - p)^{2n-3} = \frac{(1 - p)^{2n-2}}{1 - p} \underset{+\infty}{\sim} n^{-2c}$ donc $n^2p(1 - p)^{2n-3} \underset{+\infty}{\sim} cn^{1-2c} \ln(n)$. De plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - (1 - p)^{n-2}) = 1$, on a $n(1 - p)^{n-1}(1 - (1 - p)^{n-2}) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$ d'où $n^2p(1 - p)^{2n-3} = o(n^{1-c})$ ce qui prouve que $\mathbb{V}(Z) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$. Par conséquent, $\frac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1-c}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2} = 0$ si $c < 1$. D'après la question **d.** et par encadrement, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z = 0) = 0$. Il y a presque sûrement au moins un point isolé si $c < 1$ quand n tend vers $+\infty$ (en fait il y en a beaucoup puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z) = +\infty$).

- 111 a.** On sait d'après le théorème spectral que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et, par hypothèse, M n'étant pas simple, il existe une valeur propre λ de M telle que $\mathbb{E}_\lambda(M)$ soit de dimension supérieure ou égale à 2. Soit (v_1, v_2) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{E}_\lambda(M)$. Si l'un des deux vecteurs v_1 ou v_2 a sa $(n + 1)$ -ième composante nulle, on a trouvé un vecteur propre v associé à λ qui convient en posant $v = v_1$ ou $v = v_2$. Sinon, en notant $v_1 = (v_{1,1}, \dots, v_{n+1,1})$ et $v_2 = (v_{1,2}, \dots, v_{n+1,2})$, on a $v_{n+1,1} \neq 0$ et $v_{n+1,2} \neq 0$ et on peut poser $v = v_1 - \frac{v_{n+1,1}}{v_{n+1,2}}v_2$ et ce vecteur $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ appartient à $\mathbb{E}_\lambda(M)$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $v_{n+1} = v_{n+1,1} - \frac{v_{n+1,1}}{v_{n+1,2}}v_{n+1,2} = 0$ donc le vecteur v convient.
- b.** Pour un tel vecteur propre v (comme dans la question précédente), notons V le vecteur colonne associé qui est de la forme $V = \begin{pmatrix} W \\ 0 \end{pmatrix}$ par construction. Or $MV = \lambda V$ donc $AW = \lambda W$ avec $W \neq 0$ car $V \neq 0$. Ainsi, λ est aussi une valeur propre de A .

- 112 a.** Les relations de l'énoncé s'écrivent aussi matriciellement $V_n = A_n U_n$ en notant ${}^t U_n = (u_0 \dots u_n)$, ${}^t V_n = (v_0 \dots v_n)$ et $A_n = \left(\binom{i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Or ${}^t A_n$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ de l'endomorphisme $f_n : P \mapsto P(X + 1)$. Or f_n est clairement bijective avec $f_n^{-1} : P \mapsto P(X - 1)$ donc $({}^t A_n)^{-1} = {}^t (A_n^{-1}) = \left((-1)^{i-j} \binom{i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Ainsi, comme $U_n = A_n^{-1} V_n$, on a la formule d'inversion de PASCAL, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} v_{n-k}$.
- b.** On note S_n l'ensemble de toutes les permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$. On sait que $\text{card}(S_n) = n!$. On partitionne (ou plutôt on partage) S_n selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations de S_n qui ont exactement k points fixes. Alors $S_n = \bigcup_{k=0}^n S_{n,k}$ (réunion disjointe) avec $S_{n,n-1} = \emptyset$ car si une permutation a au moins $n - 1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait n points fixes. On a donc $\text{card}(S_n) = n! = \sum_{k=0}^n \text{card}(S_{n,k})$.

Pour dénombrer $S_{n,k}$, on choisit les k points fixes parmi les éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ce qui fait $\binom{n}{k}$ choix ; ensuite on choisit une permutation des $n - k$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de d_{n-k} par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{n,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on "dérange"). On obtient donc $\text{card}(S_{n,k}) = \binom{n}{k} d_k$. Ainsi, il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$. D'après **a.**, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

113 a. Comme $\Omega = \mathbb{N}^*$, les conditions imposées à $\lambda \in \mathbb{R}$ sont $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(\{n\}) \in [0; 1]$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$. On

doit donc prendre $\lambda > 0$ et λ vérifiant la relation $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda n^{-s} = \lambda \zeta(s) = 1$ (la série de RIEMANN converge car justement $s > 1$). La seule valeur λ telle que la famille $(\lambda n^{-s})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ avec $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(\{n\}) = \lambda n^{-s}$ est donc $\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$.

b. Par définition, la variable aléatoire X admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} n \mathbb{P}(X = n)$ converge. Or $n \mathbb{P}(X = n) = n \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{1}{\zeta(s) n^{s-1}}$. Ainsi, d'après les résultats sur les séries de RIEMANN, on sait que X admet une espérance finie si et seulement si $s - 1 > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $s > 2$.

c. Par définition, $A_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{pn\}$ et, par σ -additivité, on a donc

$$\mathbb{P}(A_p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{pn\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{1}{p^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{1}{p^s}.$$

Soit p et q deux nombres premiers distincts. Il est clair qu'un multiple de pq est un multiple à la fois de p et de q donc $A_{pq} \subset A_p \cap A_q$. Réciproquement, soit un entier n à la fois multiple de p et de q . La décomposition en produit de nombres premiers de n contient donc au moins p^1 et q^1 , ce qui fait que n est aussi un multiple de pq et on a établi que $A_p \cap A_q \subset A_{pq}$. On aurait pu dire que puisque p et q sont premiers entre eux, on a $(p|n \text{ et } q|n) \iff pq|n$ mais ce n'est pas au programme dans notre filière. Par double inclusion, $A_{pq} = A_p \cap A_q$ donc $\mathbb{P}(A_p \cap A_q) = \mathbb{P}(A_{pq}) = \frac{1}{(pq)^s} = \frac{1}{p^s} \frac{1}{q^s} = \mathbb{P}(A_p) \mathbb{P}(A_q)$ donc les événements A_p et A_q sont indépendants par définition.

Plus généralement, on se donne une famille $p_{i_1}, \dots, p_{i_r}$ une liste de nombres premiers tous différents.

- Un multiple de $\prod_{k=1}^r p_{i_k}$ est (par transitivité de la divisibilité) un multiple de chaque p_{i_j} pour $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$.
- Réciproquement, si n est un multiple de tous les $p_{i_1}, \dots, p_{i_r}$, alors la décomposition en produit de nombres premiers de n contient au moins $p_{i_1}^1 \times \dots \times p_{i_r}^1$ donc n est un multiple de $m = \prod_{k=1}^r p_{i_k}$. Par double inclusion,

comme ci-dessus, on a $A_m = \bigcap_{k=1}^r A_{i_k}$ donc

$$\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^r A_{i_k}\right) = \frac{1}{m^s} = \prod_{k=1}^r \frac{1}{p_{i_k}^s} = \prod_{k=1}^r \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Par définition, les événements $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants (pour la loi précédente).

d. Tout entier $n \geq 2$ est le multiple d'au moins un nombre premier donc $\mathbb{N}^* \setminus \{1\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{p_k}$ ce qui donne,

en passant au complémentaire, $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_{p_k}} = \{\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k \nmid n\} = \{1\}$. On peut écrire $\{1\} = \bigcap_{N=1}^{+\infty} I_N$ avec

$I_N = \bigcap_{k=1}^N \overline{A_{p_k}}$ et la suite des $(I_N)_{N \geq 1}$ étant décroissante pour l'inclusion, on peut conclure avec le théorème de

continuité décroissante que $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(I_N)$. Or les $(A_{p_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ étant indépendants mutuellement, les $(\overline{A_{p_k}})_{k \in \mathbb{N}^*}$ le sont aussi ce qui montre que $\mathbb{P}(I_N) = \prod_{k=1}^N \mathbb{P}(\overline{A_{p_k}}) = \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$. On a bien, en passant à l'inverse : $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$ qu'on note $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$.

e. On va montrer que la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge. Si $s > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^s}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{k^s} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s}$ par comparaison série-intégrale. On somme pour $k \in \mathbb{N}^*$ (tout converge) et on trouve avec CHASLES $\zeta(s) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1}$. Ainsi, par encadrement, $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$.

Soit $A \geq 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall s \in]1; 1+\alpha]$, $A+1 \leq \zeta(s)$. Or $\zeta(1+\alpha) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-1-\alpha}}$ d'après la question **d.**, donc il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall N \geq N_0$, $\zeta(1+\alpha) - 1 \leq \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-1-\alpha}} (\leq \zeta(1+\alpha))$. Par conséquent, $\forall N \geq N_0$, $\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-1-\alpha}} \geq A$. Or $\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-1}} \geq \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-1-\alpha}}$ donc $\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-1}} \geq A$. Ceci montre que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-1}} = +\infty$ ce qui s'énonce aussi $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \ln \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = -\infty$ en passant au logarithme. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ diverge. Or, comme il existe une infinité de nombres premiers, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$ donc $\ln \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \sim_{+\infty} -\frac{1}{p_n} < 0$ d'où la divergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$.

114 a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $(T = n) = \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} (X_k = 1)\right) \cap (X_n = 0)$ donc, par mutuelle indépendance des X_i , on a

$$\mathbb{P}(T = n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}. \text{ De même, comme } (T > n) = \bigcap_{k=0}^n (X_k = 1), \text{ on a } \mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

b. Comme $(T = +\infty) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (T > n)$ et que la suite $((T > n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, par continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T > n) = 0$ d'après **a.** Plus simplement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut dire que $(T = +\infty) \subset (T > n)$ donc $\mathbb{P}(T = +\infty) \leq \mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ donc, par

encadrement, on en déduit que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. On pouvait aussi écrire $(T < +\infty) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (T = n)$ (réunion

incompatible) donc, par σ -additivité, $\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - (1/2)} = 1$ donc on retrouve à nouveau $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(T < +\infty) = 1 - 1 = 0$.

c. On sait d'après le cours que T admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T > n)$ converge, ce qui est le cas car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$, et qu'on a alors la relation

$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - (1/2)} = 1$. De même, T admet une variance finie si et seulement si T admet un moment d'ordre 2, ce qui équivaut par la formule de transfert à la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} n^2 \mathbb{P}(T = n)$. Or $\frac{n^2}{2^{n+1}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc T admet une variance finie. On

sait qu'alors $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \mathbb{E}(T(T-1)) + \mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(T)^2 = \mathbb{E}(T(T-1))$ car $\mathbb{E}(T) = 1$. Par le théorème de transfert, $\mathbb{E}(T(T-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(T=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Or $\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ qu'on dérive deux fois (sur l'intervalle ouvert de convergence) pour avoir $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ et enfin $\frac{2x^3}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n+1}$. En prenant $x = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(T(T-1)) = \frac{2(1/2)^3}{(1-(1/2))^3} = 2$ donc $\mathbb{V}(T) = 2$. Beaucoup plus simplement, $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}(T+1=n) = \mathbb{P}(T=n-1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2}$ donc $T+1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, d'après le cours, $\mathbb{E}(T+1) = \frac{1}{(1/2)} = 2$ et $\mathbb{V}(T+1) = \frac{1-(1/2)}{(1/2)^2} = 2$. Comme $\mathbb{E}(T+1) = \mathbb{E}(T) + 1$ et $\mathbb{V}(T+1) = \mathbb{V}(T)$, on retrouve $\mathbb{E}(T) = 1$ et $\mathbb{V}(T) = 2$.

d. Par définition de T' ,

- $(T' = 1) = (X_0 = 1, X_1 = 1)$ donc, par indépendance de X_0 et X_1 , $\mathbb{P}(T' = 1) = \frac{1}{4}$.
- $(T' = 2) = (X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1)$. Par indépendance mutuelle de X_0, X_1, X_2 , on a $\mathbb{P}(T' = 2) = \frac{1}{8}$.
- De même, $(T' = 3) = (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$ (peu importe X_0) donc, comme avant, $\mathbb{P}(T' = 3) = \frac{1}{8}$.
- À nouveau, $(T' = 4) \cup (X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 1) = (X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 1)$ donc, par incompatibilité de ces deux événements, $\mathbb{P}(T' = 4) + \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$ ce qui donne $\mathbb{P}(T' = 4) = \frac{3}{32}$.

e. Il est clair que si on a $T' > n$, on a a fortiori $T' > n-2$ et on ne peut pas avoir $X_{n-1} = X_n = 1$ sinon on aurait $T' \leq n$. Ceci se résume en l'inclusion $(T' > n) \subset (T' > n-2) \cap \overline{(X_{n-1} = 1, X_n = 1)}$. Or T' ne dépend que des variables $X_0, \dots, X_{n-2}$ donc, par le lemme des coalitions, $(T' > n-2)$ et $\overline{(X_{n-1} = 1, X_n = 1)}$ sont indépendants. Ainsi, $\mathbb{P}(T' > n) \leq \mathbb{P}(T' > n-2) \times \mathbb{P}(\overline{(X_{n-1} = 1, X_n = 1)}) = \frac{3\mathbb{P}(T' > n-2)}{4}$.

f. Comme avant, la suite $((T' > n))_{n \geq 0}$ est décroissante et on a $(T' = +\infty) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (T' > n)$ donc, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(T' = +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T' = n)$. Comme la suite $(\mathbb{P}(T' > n))_{n \geq 0}$ est décroissante et positive donc converge vers un réel $\ell \geq 0$, en passant à la limite dans l'inégalité $\mathbb{P}(T' > n) \leq \frac{3\mathbb{P}(T' > n-2)}{4}$, il vient $\ell \leq \frac{3\ell}{4}$ ce qui impose $\ell = 0$. Ainsi $\mathbb{P}(T' = +\infty) = 0$ et, comme attendu, T' est presque sûrement finie.

g. Si on a $T' = n$ pour $n \geq 2$, on ne peut pas commencer par $X_0 = X_1 = 1$ sinon ça donnerait $T' = 1$. Ainsi, on peut écrire $(T' = n) = (T' = n, X_0 = 0) \cup (T' = n, X_0 = 1, X_1 = 0)$ (réunion de deux événements incompatibles) donc $\mathbb{P}(T' = n) = \mathbb{P}(T' = n, X_0 = 0) + \mathbb{P}(T' = n, X_0 = 1, X_1 = 0)$. Par les probabilités conditionnelles, $\mathbb{P}(T' = n) = \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \mathbb{P}_{(X_0=0)}(T' = n) + \mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 0) \times \mathbb{P}_{(X_0=1, X_1=0)}(T' = n)$. Si $X_0 = 0$, c'est comme si on repartait au point de départ après un tirage donc $\mathbb{P}_{(X_0=0)}(T' = n) = \mathbb{P}(T' = n-1)$. De même, si $X_0 = 1$ et $X_1 = 0$, on repart au point de départ après deux étapes donc $\mathbb{P}_{(X_0=1, X_1=0)}(T' = n) = \mathbb{P}(T' = n-2)$. On a donc bien $\mathbb{P}(T' = n) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(T' = n-1) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(T' = n-2)$.

Pour être totalement "rigoureux", mais la méthode précédente suffit largement à l'oral, on peut écrire l'égalité $(T' = n, X_0 = 0) = (X_0 = 0) \cap \left(\bigcap_{k=2}^{n-1} \overline{(X_k = X_{k-1} = 1)} \right) \cap (X_n = X_{n-1} = 1)$ donc, par le lemme

des coalitions, $\mathbb{P}(T' = n, X_0 = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=2}^{n-1} (X_k = X_{k-1} = 1)\right) \cap (X_n = X_{n-1} = 1)\right)$. Mais $\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=2}^{n-1} (X_k = X_{k-1} = 1)\right) \cap (X_n = X_{n-1} = 1)\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-2} (X_k = X_{k-1} = 1)\right) \cap (X_{n-1} = X_{n-2} = 1)\right)$ car la famille de variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ suit la même loi que $(X_0, \dots, X_{n-1})$. Et comme on a $(T' = n - 1) = \left(\bigcap_{k=1}^{n-2} (X_k = X_{k-1} = 1)\right) \cap (X_{n-1} = X_{n-2} = 1)$ par définition de T' , on en déduit que $\mathbb{P}(T' = n, X_0 = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 0) \mathbb{P}(T' = n - 1) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(T' = n - 1)$. De la même manière, on montre que $\mathbb{P}(T' = n, X_0 = 1, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 1) \mathbb{P}(X_1 = 0) \mathbb{P}(T' = n - 2)$.

De nouveau, on retrouve la relation $\mathbb{P}(T' = n) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(T' = n - 1) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(T' = n - 2)$.

h. Comme $\mathbb{P}(T' > 0) = 1$ et $\mathbb{P}(T' > 1) = \frac{3}{4}$ d'après **d.**, par récurrence avec **e.**, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T' > 2n) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $\mathbb{P}(T' > 2n + 1) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T' > n)$ converge (comme une série géométrique car $\mathbb{P}(T' > n) = O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n/2}\right)$), ce qui assure l'existence d'une espérance finie pour T' (à valeurs dans $\mathbb{N}$). Et $\mathbb{E}(T') = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(T' = n) = \mathbb{P}(T' = 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} \mathbb{P}(T' = n - 1) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(T' = n - 2)\right)$ d'après **g.**. Comme les deux séries convergent, $\mathbb{E}(T') = \mathbb{P}(T' = 1) + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} (n - 1 + 1) \mathbb{P}(T' = n - 1) + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} (n - 2 + 2) \mathbb{P}(T' = n - 2)$ ce qui devient, après séparation des séries convergentes et ré-indexation et comme $T'(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T' = n) = 1$ d'après **f.**, $\mathbb{E}(T') = \mathbb{P}(T' = 1) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(T') + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \mathbb{E}(T') + \frac{1}{2}$. On trouve finalement, puisque l'on sait que $\mathbb{P}(T' = 1) = \frac{1}{4}$, la valeur $\mathbb{E}(T') = 5$.

115 a. Soit X une variable aléatoire réelle positive admet une espérance finie et $\varepsilon > 0$, alors $\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$.

En effet, on dispose de l'inégalité $X \geq \varepsilon \mathbb{I}_{(X \geq \varepsilon)}$ puisque si $X(\omega) \geq \varepsilon$, elle se résume à $X(\omega) \geq \varepsilon \times 1 = \varepsilon$ et, si $X(\omega) < \varepsilon$, elle revient à $X(\omega) \geq \varepsilon \times 0 = 0$ qui est vrai car X est positive. Par croissance et linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X) \geq \varepsilon \mathbb{E}(\mathbb{I}_{(X \geq \varepsilon)}) = \varepsilon \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ et on divise par $\varepsilon > 0$ pour avoir l'inégalité de MARKOV.

b. D'après l'énoncé, $S_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ donc $S_n - \frac{n}{2}$ est une variable aléatoire bornée mais pas toujours positive. Par contre $\left(|S_n - \frac{n}{2}| > \varepsilon\right) = \left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right) \cup \left(S_n - \frac{n}{2} < -\varepsilon\right) = \left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right) \cup \left(S'_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right)$ en notant $S'_n = \sum_{k=1}^n (1 - X_k)$. En notant $Y_k = 1 - X_k$, la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$ donc $S'_n - \frac{n}{2}$ suit la même loi que $S_n - \frac{n}{2}$. Par conséquent, comme les événements $\left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right)$ et $\left(S_n - \frac{n}{2} < -\varepsilon\right)$ sont incompatibles, on a $\mathbb{P}\left(|S_n - \frac{n}{2}| > \varepsilon\right) = 2\mathbb{P}\left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right)$. Comme S_n est bornée, elle admet un moment d'ordre 2 donc, puisque $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \frac{n}{2}$ et d'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, on a $\mathbb{P}\left(|S_n - \frac{n}{2}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$ mais $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$ par indépendance deux à deux des $X_1, \dots, X_n$ donc

$\mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{4}$ et, comme $\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| > \varepsilon\right) \subset \left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$ et par croissance de $\mathbb{P}$, on a donc la majoration $\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{n}{4\varepsilon^2}$ donc $\mathbb{P}\left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right) \leq \frac{n}{8\varepsilon^2}$.

116

117 a. Le nombre de victoires V de Pierre parmi les $2n$ premières parties suit (les parties sont indépendantes mutuellement) une loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$. Ainsi $a_{2n} = \mathbb{P}(V = n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^{2n-n} = \binom{2n}{n} (p(1-p))^n$. Bien sûr, il ne peut pas y avoir d'égalité du nombre de victoires après un nombre impair de parties.

b. Soit $x \neq 0$, si $u_n = a_{2n} x^{2n}$, alors $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n+1}}{\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n} x^2 = \frac{2(2n+1)}{n+1} p(1-p) x^2$ qui tend vers $\ell = 4p(1-p)x^2$. Par la règle de D'ALEMBERT, si $|x| < \frac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$, alors $\ell < 1$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ce qui prouve que $R_a \geq \frac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$. Si $|x| > \frac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$, on a $\ell > 1$ et, par D'ALEMBERT, $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge donc $R_a \leq \frac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$. Par conséquent, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n}$ vaut $R_a = \frac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$. Il vaut donc $R_a = +\infty$ si $p = 0$ ou $p = 1$ qui sont des cas inintéressants où l'un ou l'autre des deux joueurs gagne presque sûrement toutes les parties.

c. Si $p \neq \frac{1}{2}$, on a $4p(1-p) = 1 - (1-2p)^2 < 1$ (parabole atteignant son maximum en $\frac{1}{2}$) donc $R_a > 1$ et $A(1)$ est bien défini car $1 \in]R_a; R_a[$ (intervalle ouvert de convergence).

Réciproquement, si $p = \frac{1}{2}$, alors $a_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} \times \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{e^{2n}}{(2\pi n)n^{2n}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec la formule de STIRLING donc $\sum_{n \geq 0} a_{2n}$ diverge d'après RIEMANN et $A(1)$ n'est pas défini.

En conclusion : $A(1)$ existe si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$.

d. On sait que $\forall y \in]-1; 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1+y}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} y^n$. Pour $x \in]-R_a; R_a[$, $y = -4p(1-p)x^2 \in]-1; 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} 4^n p^n (1-p)^n (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} p^n (1-p)^n x^{2n} = A(x) + 1$. On en déduit bien que $\forall x \in]-R_a; R_a[$, $A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}} - 1$.

e. Pour $n \geq 1$, posons les événements $B_n =$ "il y a égalité pour la première fois après n parties" tel que $b_{2n} = \mathbb{P}(B_{2n})$ et $A_n =$ "il y a égalité après n parties" tel que $a_{2n} = \mathbb{P}(A_{2n})$. On pose $a_0 = b_0 = 0$.

Pour $n \geq 1$, s'il y a égalité du nombre de parties gagnées après $2n$ parties, alors il y a eu égalité pour la première fois du nombre de parties gagnées au bout de $2k$ parties avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Ceci nous donne la

partition suivante : $A_{2n} = \bigcup_{k=1}^n (A_{2n} \cap B_{2k})$. Comme ces événements sont incompatibles, on en déduit que

$a_{2n} = \mathbb{P}(A_{2n}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_{2n} \cap B_{2k}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{B_{2k}}(A_{2n}) \mathbb{P}(B_{2k})$. Clairement, pour tout entier $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a

$\mathbb{P}_{B_{2k}}(A_{2n}) = a_{2(n-k)}$ (si on a égalité après $2k$ parties, avoir égalité après $2n$ parties revient à avoir égalité sur une période de $2(n-k)$ parties - elles sont indépendantes mutuellement). Par contre, comme $B_{2n} \subset A_{2n}$,

on a $\mathbb{P}_{B_{2n}}(A_{2n}) = 1$. Ainsi $a_{2n} = b_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{2k} a_{2(n-k)} = b_{2n} + \sum_{k=0}^n b_{2k} a_{2(n-k)}$ car on a posé $a_0 = b_0 = 0$. Sous réserve de convergence, c'est-à-dire si $|x| < R$ où $R = \min(R_a, R_b)$ (avec des notations évidentes), on a par produit de CAUCHY de séries absolument convergentes :

$$A(x)B(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n} x^{2n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_{2k} a_{2(n-k)} \right) x^{2n} = A(x) - B(x).$$

Comme $B_{2n} \subset A_{2n}$, on a $0 \leq b_{2n} \leq a_{2n}$ donc $R_a \leq R_b$. On a donc $\forall x \in]-R_a; R_a[$, $B(x) = \frac{A(x)}{A(x)+1}$ d'après

$$\text{la relation de la question b.}. \text{ Ainsi : } \forall x \in]-R_a; R_a[, B(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}} = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}.$$

f. Or, $\forall y \in]-1; 1[$, $\sqrt{1+y} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)} y^n$. Pour $x \in]-R_a; R_a[$, $y = -4p(1-p)x^2 \in]-1; 1[$ donc $B(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)} 4^n p^n (1-p)^n (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)} p^n (1-p)^n x^{2n}$. On peut identifier car les rayons sont strictement positifs et $\forall n \geq 1$, $b_{2n} = \binom{2n}{n} \frac{p^n (1-p)^n}{2n-1}$ (inutile ici).

Mais cette expression de b_{2n} nous permet de trouver R_b . En effet, pour $x \neq 0$, en posant $v_n = b_{2n} x^{2n}$, on a $0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n+1} (2n-1)}{\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n (2n+1)} x^2 = \frac{2(2n-1)}{n+1} p(1-p) x^2$ qui tend aussi vers $\ell = 4p(1-p)x^2$.

Comme à la question c., on a $R_b = R_a = \frac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$. Si $p \neq \frac{1}{2}$, $1 \in]-R_b; R_b[$ donc $B(1)$ existe. Si $p = \frac{1}{2}$,

$b_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)} p^n (1-p)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi n^{3/2}}}$ avec STIRLING à nouveau donc $B(1)$ existe pour tout $p \in [0; 1]$.

Notons l'évènement $J =$ "ne jamais obtenir égalité du nombre de parties gagnées par Pierre et Marie". Alors on a clairement $\bar{J} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{2n}$ (réunion d'évènements deux à deux incompatibles) donc $\mathbb{P}(\bar{J}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_{2n})$ (ce qui prouve que $B(1)$ existe dans tous les cas comme on l'a vérifié ci-dessus).

Ainsi, par σ -additivité : $\eta = \mathbb{P}(J) = 1 - \mathbb{P}(\bar{J}) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} = 1 - B(1)$. Or, en posant $f_n : x \mapsto b_{2n} x^{2n}$, on a $\|f_n\|_{\infty, [0;1]} = b_{2n}$ et $\sum_{n \geq 0} b_{2n}$ converge, ainsi par convergence normale de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[0; 1]$ et continuité de toutes les f_n , on a B continue sur $[0; 1]$ (ce qui était évident si $R_b > 1$ mais pas clair si $p = \frac{1}{2}$). Ainsi $\eta = 1 - B(1) = 1 - \lim_{x \rightarrow 1^-} B(x) = \sqrt{1-4p(1-p)}$.

118 a. Bien sûr, les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

En effet, $(X_1 = n, X_2 = n) = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = n) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X_1 = n) = p^n$ (par indépendance des personnes appelées) et $\mathbb{P}(X_2 = n) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = n) = \mathbb{P}(X_2 = n | X_1 = 0) \mathbb{P}(X_1 = 0) = p^n (1-p)^n \neq 0$. Par conséquent, $\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = n) \neq \mathbb{P}(X_1 = n) \mathbb{P}(X_2 = n)$.

b. X_1 suit naturellement la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par indépendance des réponses des n personnes. La famille $((X_1 = j))_{0 \leq j \leq n}$ constitue un système complet d'évènements donc $\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k)$ pour tout pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Or $\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k) = 0$ si $n-j < k$ et, comme la loi de X_2 sachant $(X_1 = j)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n-j, p)$ si $n-j \geq k$, on a $\mathbb{P}(X_2 = k | X_1 = j) = \binom{n-j}{k} p^k (1-p)^{n-j-k}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{k} p^k (1-p)^{n-j-k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = \binom{n}{k} (1-p)^k p^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} ((1-p)^2)^{n-j-k} p^j$$

donc $\mathbb{P}(X_2 = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k ((1-p)^2 + p)^{n-k} = \binom{n}{k} (p(1-p))^k (1-p(1-p))^{n-k} : X_2 \sim \mathcal{B}(n, p(1-p))$.

Y_i est le premier succès dans une répétition infinie de variables aléatoires suivant une loi de BERNOULLI de paramètre p donc, d'après le cours, Y_i suit la loi géométrique de paramètre p pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ donc $\forall m \geq 1, \mathbb{P}(Y_i = m) = p(1-p)^{m-1}$.

c. Par construction, pour $k \geq 3$, on a $X_k(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et, si $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, pour que l'on ait $X_k = j$, il est nécessaire et suffisant qu'exactly j clients vérifient $Y_i = k$ (eus au téléphone exactement lors de l'appel k) et $n-j$ clients vérifient $Y_i \neq k$ (pas eus lors de l'appel k). Ainsi, $(X_k = j) = \bigcup_{\substack{I \subset \llbracket 1; n \rrbracket \\ \text{card}(I)=j}} \left(\bigcap_{i \in I} (Y_i = k) \cap \bigcap_{i \notin I} (Y_i \neq k) \right)$.

Cette réunion est disjointe, comporte $\binom{n}{j}$ termes de probabilités égales car les $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendants et suivent la même loi. Or $\mathbb{P}(Y_i = k) = p(1-p)^{k-1}$ car Y_i suit la loi géométrique de paramètre p et donc $\mathbb{P}(Y_i \neq k) = 1 - p(1-p)^{k-1}$. Par conséquent, $\mathbb{P}(X_k = j) = \binom{n}{j} (p(1-p)^{k-1})^j (1 - p(1-p)^{k-1})^{n-j}$ donc X_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p(1-p)^{k-1})$. Plus simplement, on aurait pu écrire que $X_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(Y_i=k)}$ et les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{(Y_i=k)})_{1 \leq i \leq n}$ suivent la loi de BERNOULLI de paramètre $p(1-p)^{k-1}$ d'après la question **b.** puisque Y_i suit la loi géométrique de paramètre p . D'après le cours, la somme X_k de ces n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p(1-p)^{k-1})$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p(1-p)^{k-1})$.

d. Par définition, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $S_k(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et, si $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, pour que l'on ait $S_k = j$, il est nécessaire et suffisant qu'exactly j clients vérifient $Y_i \leq k$ (eus au téléphone avant l'appel k) et $n-j$ clients vérifient $Y_i > k$ (pas eus lors des k premiers appels). Ainsi, $(S_k = j) = \bigcup_{\substack{I \subset \llbracket 1; n \rrbracket \\ \text{card}(I)=j}} \left(\bigcap_{i \in I} (Y_i \leq k) \cap \bigcap_{i \notin I} (Y_i > k) \right)$.

Cette réunion est disjointe, comporte $\binom{n}{j}$ termes de probabilités égales car les $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendants et suivent la même loi. Or $\mathbb{P}(Y_i > k) = (1-p)^k$ car Y_i suit la loi géométrique de paramètre p et donc $\mathbb{P}(Y_i \leq k) = 1 - \mathbb{P}(Y_i > k) = 1 - (1-p)^k$. Par conséquent, $\mathbb{P}(S_k = j) = \binom{n}{j} (1 - (1-p)^k)^j (1-p)^{k(n-j)}$ donc S_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1 - (1-p)^k)$. Plus simplement, on aurait pu écrire que $S_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(Y_i \leq k)}$ et les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{(Y_i \leq k)})_{1 \leq i \leq n}$ suivent la loi de BERNOULLI de paramètre $1 - (1-p)^k$ d'après la question **b.** puisque Y_i suit la loi géométrique de paramètre p . D'après le cours, la somme S_k de ces n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(1 - (1-p)^k)$ suit la loi $\mathcal{B}(n, 1 - (1-p)^k)$.

e. Par définition de la variable aléatoire N , on a $N = \text{Max}(Y_1, \dots, Y_n)$ de sorte que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(N \leq k) = \bigcap_{i=1}^n (Y_i \leq k)$ donc, par indépendance mutuelle entre les personnes appelées, on parvient à la relation

$$\mathbb{P}(N \leq k) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i \leq k) = (1 - (1-p)^k)^n. \text{ Comme, pour } k \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } (N \leq k) = (N = k) \cup (N \leq k-1) \text{ (incompatibles), on a } \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N \leq k) - \mathbb{P}(N \leq k-1) = (1 - (1-p)^k)^n - (1 - (1-p)^{k-1})^n.$$

On aurait aussi pu écrire que $(N \leq k) = (S_k = n)$ avec directement $\mathbb{P}(N = k) = (1 - (1-p)^k)^n$ avec la question **d.** ou que $(N = k) = (S_k = n) \setminus (S_{k-1} = n)$ (le premier instant où on a contacté les n personnes) avec $(S_{k-1} = n) \subset (S_k = n)$ donc $\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(S_k = n) - \mathbb{P}(S_{k-1} = n)$ avec la même conclusion.

On sait que N admet une espérance finie si et seulement si $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(N > k)$ converge. Or, avec ce qui précède, il vient $\mathbb{P}(N > k) = 1 - \mathbb{P}(N \leq k) = 1 - (1 - (1 - p)^k)^n = 1 - \exp(n \ln(1 - (1 - p)^k))$ et, comme $\ln(1 - (1 - p)^k) = -(1 - p)^k + o((1 - p)^k)$ et que $e^u = 1 + u + o(u)$, en composant les développements limités d'ordre 1, on a $\mathbb{P}(N > k) = n(1 - p)^k + o((1 - p)^k) \underset{+\infty}{\sim} n(1 - p)^k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ donc la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(N > k)$ converge. Ainsi, N admet une espérance finie et $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N > k)$. Or, par le binôme de NEWTON, $\mathbb{P}(N > k) = 1 - (1 - (1 - p)^k)^n = 1 - \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} ((1 - p)^k)^j = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} (1 - p)^{kj}$ et toutes les séries géométriques $\sum_{k \geq 0} (1 - p)^{kj}$ convergent pour $j \geq 1$ car $|(1 - p)^j| < 1$. Ainsi, par somme d'un nombre fini de séries convergentes, on a $\mathbb{E}(N) = \sum_{j=1}^n \left((-1)^{j+1} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - p)^{kj} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1} \binom{n}{j}}{1 - (1 - p)^j}$.

119 Si $n = 1$, la seule permutation de $\llbracket 1; 1 \rrbracket = \{1\}$ est l'identité donc $F_1 = 1$ et $\mathbb{E}(F_1) = 1$, $V(F_1) = 0$.

Si $n \geq 2$, soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on définit l'évènement $A_k = \text{"k est fixe"}$ et on pose $X_k = \mathbb{1}_{A_k}$ de sorte que $X_k = 1$ si k est fixe et $X_k = 0$ s'il ne l'est pas. Par définition, on a $F_n = \sum_{k=1}^n X_k$ donc, par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(F_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$. Parmi les $n!$ permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$, il y a en a $(n - 1)!$ qui laisse fixe l'élément k (il faut permuter les $n - 1$ autres éléments), ainsi, comme on prend les permutations selon la loi uniforme, on a $\mathbb{P}(A_k) = \frac{(n - 1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Alors, $\mathbb{E}(F_n) = 1$.

Comme $V(F_n) = \mathbb{E}(F_n^2) - \mathbb{E}(F_n)^2$, on calcule $F_n^2 = \sum_{k=1}^n X_k^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} X_i X_j = \sum_{k=1}^n X_k + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$ car $X_k^2 = X_k$. Or, si $i \neq j$, $X_i X_j = \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{A_i \cap A_j}$ donc $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{(n - 2)!}{n!} = \frac{1}{n(n - 1)}$ comme avant. Il y a $\frac{n(n - 1)}{2}$ couples $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $i < j$, d'où $\mathbb{E}(F_n^2) = n \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{n(n - 1)}{2} \times \frac{1}{n(n - 1)} = 2$ et $V(F_n) = 2 - 1 = 1$. En ce qui concerne l'espérance et la variance, c'est comme si F_n suivait la loi de POISSON de paramètre $\lambda = 1$ car $\mathbb{E}(F_n) = V(F_n) = 1$.

En notant d_n le nombre de dérangements de S_n , c'est-à-dire les permutations sans aucun point fixe, alors

$\mathbb{P}(F_n = k) = \frac{\binom{n}{k} \times d_{n-k}}{n!}$ car il faut d'abord choisir les k points fixes parmi les n entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$ et ensuite

"déranger" les $n - k$ autres entiers pour ne pas faire évoluer le nombre de points fixes. On se rappelle que $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ donc $d_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n!}{e}$. Ainsi, pour k fixé, dès que $n \geq k$, on a $\mathbb{P}(F_n = k) = \frac{1}{ek!} = \frac{1^k e^{-1}}{k!}$ ce qui prouve que la suite de variables aléatoires $(F_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de POISSON de paramètre 1 comme attendu.

120 a. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$, par définition d'une probabilité conditionnelle, on a déjà $u_n \in [0; 1]$. Si on avait $u_n = \frac{\mathbb{P}(X = n, X > n - 1)}{\mathbb{P}(X > n - 1)} = 1$, on aurait $\mathbb{P}(X = n, X > n - 1) = \mathbb{P}(X > n - 1) = \mathbb{P}(X = n)$ car $(X = n, X > n - 1) = (X = n)$. Or $(X > n - 1) = (X = n) \cup (X > n)$ et ces deux évènements sont

incompatibles donc $\mathbb{P}(X > n-1) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X > n)$ et on aurait donc $\mathbb{P}(X > n) = 0$ contrairement à l'hypothèse de l'énoncé. On a montré par l'absurde que $u_n \neq 1$ et on a bien $u_n \in [0; 1[$.

De plus, comme $(X > n-1) = (X > 1) \cap (X > 2) \cap \dots \cap (X > n-1)$, d'après la formule des probabilités composées et car $\bigcap_{i=1}^{k-1} (X > i) = (X > k-1)$ pour $k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(X > n-1) = \mathbb{P}(X > 1) \prod_{k=2}^{n-1} \mathbb{P}(X > k | X > k-1)$. À nouveau, pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a $(X > k-1) = (X = k) \cup (X > k)$ donc $\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X > k)$ ce qui, en divisant par $\mathbb{P}(X > k-1)$, devient $1 = \mathbb{P}(X = k | X > k-1) + \mathbb{P}(X > k | X > k-1)$ puis $\mathbb{P}(X > k | X > k-1) = 1 - u_k$. Ainsi, comme $\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X > 1 | X > 0) = 1 - u_1$ car $(X > 0) = \Omega$ sachant que X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a bien $\mathbb{P}(X > n-1) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - u_k)$.

b. D'après la question **a.**, $\ln(\mathbb{P}(X > n-1)) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - u_k)$. Or la suite d'événements $((X > n-1))_{n \geq 1}$ est décroissante et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (X > n-1) = \emptyset$ car X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc, par continuité décroissante, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X > n-1) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\mathbb{P}(X > n-1)) = -\infty$ ce qui justifie avec la relation précédente que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(1 - u_n)$ diverge car la suite de ses sommes partielles tend vers $-\infty$. Traitons deux cas :

- si $(u_n)_{n \geq 1}$ ne tend pas vers 0, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge grossièrement.
- si $(u_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0, alors $\ln(1 - u_n) \underset{+\infty}{\sim} -u_n < 0$ et, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

Dans les deux cas, on a la même conclusion, $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

c. On admet qu'une telle variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ existe si on arrive à trouver une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \in [0; 1]$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ et qu'on impose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = p_n$.

Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - v_k) - \prod_{k=1}^n (1 - v_k) = v_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - v_k)$. Par hypothèse, on a bien $p_n \in [0; 1[$. De plus, $p_1 = v_1$, $p_2 = v_2(1 - v_1)$ donc $p_1 + p_2 = v_1 + v_2 - v_1 v_2 = 1 - (1 - v_1)(1 - v_2)$, ce qui nous fait conjecturer que $\sum_{k=1}^n p_k = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - v_k)$. Cette relation est vérifiée si $n = 1$. Supposons-la vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, alors $p_{n+1} = v_{n+1} \prod_{k=1}^n (1 - v_k)$ donc, par hypothèse de récurrence, il vient $\sum_{k=1}^{n+1} p_k = p_{n+1} + \sum_{k=1}^n p_k = v_{n+1} \prod_{k=1}^n (1 - v_k) + 1 - \prod_{k=1}^n (1 - v_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n+1} (1 - v_k)$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n p_k = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - v_k)$. Or $\ln\left(\prod_{k=1}^n (1 - v_k)\right) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - v_k) \leq -\sum_{k=1}^n v_k$ par l'inégalité classique $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$. Comme $\sum_{n \geq 1} v_n$ diverge, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^n (1 - v_k)\right) = -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - v_k) = 0$ et on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n p_k = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ comme attendu.

Il existe donc une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = p_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y > n-1) = \sum_{k=n}^{+\infty} p_k = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - v_k) > 0$ car $(Y > n-1) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (Y = k)$ (réunion incompatible) et $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $v_k < 1$ par hypothèse. Enfin, $\mathbb{P}(Y = n | Y > n-1) = \frac{\mathbb{P}(Y = n, Y > n-1)}{\mathbb{P}(Y > n-1)}$ or

$$(Y = n, Y > n - 1) = (Y = n) \text{ donc } \mathbb{P}(Y = n | Y > n - 1) = \frac{v_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - v_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (1 - v_k)} = v_n \text{ avec ce qui précède.}$$

121

122 a. D'après l'énoncé et par indépendance mutuelle des $n = 5$ tirages puisque les tirages se font avec remise, comme la probabilité de tirer une boule blanche est de $p = \frac{2}{2+8} = \frac{1}{5}$, la variable aléatoire X suit la loi

binomiale $\mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{5}\right)$. D'après le cours, $\mathbb{E}(X) = np = 1$ et $\mathbb{V}(X) = np(1 - p) = \frac{4}{5}$.

b. Le nombre de boules noires tirées vaut $X' = 5 - X$ et, d'après l'énoncé, $Y = 2X - 3X' = 2X - 3(5 - X) = 5X - 15$. Ainsi, $Y(\Omega) = \{-15, -10, -5, 0, 5, 10\}$ et $\forall k \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$, $\mathbb{P}(Y = 5k - 15) = \binom{5}{k} p^k (1 - p)^{5-k}$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) - 15 = -10$. De plus, on sait que $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(5X - 15) = 5^2 \mathbb{V}(X) = 20$.

c. Cette fois-ci, comme il n'y a plus remise, on a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Or, en notant $B_k =$ "on tire une boule blanche au tirage k ", on a $(X = 0) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}$ donc, par la formule des probabilités composées, on obtient $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5 \times 4}{10 \times 9} = \frac{2}{9}$. De même, on peut décomposer l'évènement $(X = 1)$ en les cinq évènements incompatibles suivants :

- $B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}$: une boule blanche au premier tirage et, après, des boules noires.
- $\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}$: une boule blanche au second tirage uniquement.
- $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}$: une boule blanche au troisième tirage exclusivement.
- $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4 \cap \overline{B_5}$: une boule blanche au quatrième tirage seulement.
- $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap B_5$: quatre boules noires d'affilée et on termine par une boule blanche.

Ainsi, toujours par la formule des probabilités composées, on obtient $\mathbb{P}(X = 1)$ sous forme de somme avec $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} + \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} + \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} + \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6}$, ce qui donne après calculs $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{5}{9}$ car ces cinq évènements sont la même probabilité qui vaut $\frac{1}{9}$. Enfin, comme $(X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2) = \Omega$, on a $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{9}$.

On revient à la définition de l'espérance $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = 1$ (comme dans le cas "avec remise") et de la variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = (0 - 1)^2 \times \frac{2}{9} + (1 - 1)^2 \times \frac{5}{9} + (2 - 1)^2 \times \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$.

d. À nouveau, on a $Y = 5X - 15$ donc $\mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) - 15 = -10$ et $\mathbb{V}(Y) = 25\mathbb{V}(X) = \frac{100}{9}$.

123 a. Comme $\text{rang}(U^t U) \leq \min(\text{rang}(U), \text{rang}(U^t)) \leq 1$ car U est une matrice colonne, on a $\text{rang}(M) \in \{0, 1\}$.

Or $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(U^t U) = \|U\|^2$ donc si $M = 0$, on a $U = 0$ et, si $U = 0$, il est clair que $M = 0$. Ainsi, $M = 0 \iff \text{rang}(M) = 0 \iff U = 0$ donc $\text{rang}(M)$ suit la loi de BERNOULLI de paramètre $q = \mathbb{P}(U \neq 0)$.

Comme $(U = 0) = \bigcap_{k=1}^n (X_k = 0)$ et que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, $\mathbb{P}(\text{rang}(M) = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = 0) = (1 - p)^n$ d'où $\mathbb{P}(\text{rang}(M) = 1) = 1 - (1 - p)^n$.

Ainsi, $\text{rang}(M)$ suit une loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(q)$ de paramètre $q = 1 - (1 - p)^n$.

De plus $\text{Tr}(M) = \sum_{k=1}^n X_k^2 = \sum_{k=1}^n X_k$ car comme X_i suit une loi de BERNOULLI, on a $X_i^2 = X_i$. À nouveau, comme $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de BERNOULLI de paramètre p , on sait d'après le cours que $\text{Tr}(M)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

b. Classiquement, on a $M^2 = U^t U U^t U = U(t U U)^t U = \|U\|^2 M$ et $\|U\|^2 = \text{Tr}(U^t U) = \text{Tr}(U^t U) = \text{Tr}(M)$ donc $M^2 = \text{Tr}(M)M$. On en déduit que $(M^2 = M) = (\text{Tr}(M) = 1) \cup (M = 0)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 1) + \mathbb{P}(M = 0)$ mais d'après la question **a.** on a $\mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 1) = \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}$ car $\text{Tr}(M)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. La probabilité que la matrice M soit une matrice de projection est donc $\mathbb{P}(M^2 = M) = np(1-p)^{n-1} + (1-p)^n = (1-p)^{n-1}((n-1)p + 1)$.

c. On calcule $S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} X_i X_j = \text{Tr}(M) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$, il s'agit de la somme de toutes les cases de la matrice M . Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(\text{Tr}(M)) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j)$ car X_i et X_j sont indépendantes. Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tels que $i < j$, $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $\mathbb{E}(\text{Tr}(M)) = np$ d'après la question **a.** donc $\mathbb{E}(S) = np + 2 \frac{n(n-1)}{2} p^2 = np(1 + (n-1)p)$.

On sait que $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2$. Or $S^2 = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} X_i X_j \right) \left(\sum_{1 \leq k, \ell \leq n} X_k X_\ell \right) = \sum_{1 \leq i, j, k, \ell \leq n} X_i X_j X_k X_\ell$. En considérant les quadruplets (i, j, k, ℓ) selon le cardinal de $A = \{i, j, k, \ell\}$, la contribution à $\mathbb{E}(S^2)$ est :

- np pour les n quadruplets (i, i, i, i) .
- $4n(n-1)p^2$ pour les $4n(n-1)$ quadruplets $(i, i, i, j), \dots, (j, i, i, i)$ avec $i \neq j$ car $X_i^3 = X_i$ et que X_i et X_j sont des variables aléatoires indépendantes.
- $3n(n-1)p^2$ pour les $3n(n-1) = \binom{4}{2} \binom{n}{2}$ quadruplets $(i, i, j, j), \dots, (j, j, i, i)$ avec $i \neq j$ car i et j jouent des rôles symétriques.
- $6n(n-1)(n-2)p^3$ pour les $6n(n-1)(n-2) = 12n \binom{n-1}{2}$ quadruplets $(i, i, j, k), \dots, (j, k, i, i)$ tels que $\text{card}(A) = 3$ car j et k jouent des rôles symétriques.
- $n(n-1)(n-2)(n-3)p^4$ pour les $n(n-1)(n-2)(n-3)$ quadruplets (i, j, k, ℓ) tels que $\text{card}(A) = 4$.

Comme il y a n^4 quadruplets $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1; n \rrbracket^4$, on vérifie qu'on n'a oublié aucun quadruplet ci-dessus car $n^4 = n + 4n(n-1) + 3n(n-1) + 6n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)$.

Ainsi, $\mathbb{E}(S^2) = np + 7n(n-1)p^2 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)p^4$ et, avec la formule de KÖNIG-HUYGENS, on a donc $\mathbb{V}(S) = np + 7n(n-1)p^2 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 - (np(1 + (n-1)p))^2$.

124 a. Par définition, $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et, comme $X \leq N$, on a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On suppose qu'il y a indépendance mutuelle pour le genre des N enfants. Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, traitons deux cas :

- Si $k > n$, comme $X \leq N$ par définition, on a $\mathbb{P}(N = n, X = k) = 0$.
- Si $0 \leq k \leq n$, à $N = n$ fixé, le nombre de filles suit, par l'indépendance mutuelle supposée, la loi binomiale de paramètres n et p de sorte que $\mathbb{P}(N = n, X = k) = \mathbb{P}(N = n) \times \mathbb{P}(X = k | N = n)$ donne la loi conjointe $\mathbb{P}(N = n, X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $(X = k) = \bigcup_{n=k}^{+\infty} (X = k, N = n)$ (réunion incompatible) donc, par σ -additivité, on a $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$. Bien sûr, comme $((N = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne aussi $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X = k)$ car $\mathbb{P}(X = k, N = n) = 0$ si $n < k$. On pose $i = n - k$ et $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} = \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}$ en reconnaissant une série exponentielle. Ainsi, X suit la loi de POISSON de paramètre λp .

125 a. Comme Y est à valeurs positives, on a $0 \leq X \leq Z$. Et comme Z suit une loi géométrique, Z admet une espérance finie. On en déduit par comparaison que X admet aussi une espérance finie.

De même, Z^2 admet aussi une espérance finie car Z admet une variance finie. Ainsi, comme $0 \leq X^2 \leq Z^2$, la variable aléatoire X^2 admet une espérance finie donc X admet une variance finie.

Par linéarité de l'espérance et d'après le cours, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p} = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + 1 = 2\mathbb{E}(X) + 1$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{2p}$. Puisque X et Y sont indépendantes, $\mathbb{V}(Z) = \frac{1-p}{p^2} = \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2\mathbb{V}(X)$ donc $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{2p^2}$.

b. Comme le rayon de convergence de toute série génératrice est supérieur à 1, et que d'après le cours $\forall t \in]-1; 1[$, $G_Z(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$, on a $\forall t \in]-1; 1[$, $G_{X+Y+1}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y+1}) = \mathbb{E}(tt^{X+Y}) = t\mathbb{E}(t^{X+Y})$ par linéarité de l'espérance. De plus, comme X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(t^{X+Y}) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ donc $G_{X+Y}(t) = tG_X(t)G_Y(t)$. Mais comme X et Y suivent la même loi, on a $G_X = G_Y$ donc $G_Z(t) = tG_X(t)^2$. On en déduit donc que $\forall t \in]-1; 1[$, $G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1 - (1-p)t}}$ car G_X est positive sur $] - 1; 1[$.

c. On sait que $\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} x^n$ ce qui donne, en remplaçant x par $-(1-p)t$, $\forall t \in [-1; 1]$ $G_X(t) = \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} (-1)^n (1-p)^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{p} (2n)! (1-p)^n}{4^n (n!)^2} t^n$. En identifiant les coefficients, comme le rayon R de convergence vérifie $R \geq 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\sqrt{p} (2n)! (1-p)^n}{4^n (n!)^2}$.

126 a. On a $Y(\Omega) \subset (\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}) \setminus \{1\}$ par construction. Pour $k \geq 2$, en notant N_i le numéro du jeton obtenu

au tirage i , on a $(Y = k) = \bigcup_{\substack{1 \leq a, b \leq 3 \\ a \neq b}} (N_1 = a, \dots, N_{k-1} = a, N_k = b)$ (on tire d'abord tout le temps le numéro a et enfin, au tirage k , on obtient le numéro b). Ces événements étant incompatibles, comme il y a 6 couples (a, b) possibles, que les N_i sont mutuellement indépendantes par hypothèse et suivent toutes la loi uniforme

sur $[[1; 3]]$, $\mathbb{P}(Y = k) = 6 \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(N_i = a) \right) \mathbb{P}(N_k = b) = \frac{6}{3^k}$. $(Y \neq +\infty) = \bigcup_{k=2}^{+\infty} (Y = k)$ (réunion incompatible)

donc, par σ -additivité, $\mathbb{P}(Y \neq +\infty) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{6}{3^k} = \frac{6}{9} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-2}} = \frac{6}{9} \times \frac{1}{1 - (1/3)} = 1$. Comme attendu, on en conclut que $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir deux numéros différents).

b. D'après la question précédente, $(Y-1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y-1 = k) = \frac{6}{3^{k+1}} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ donc $Y-1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. Ainsi, d'après le cours et par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y-1) + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(Y-1) = \frac{1 - (2/3)}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}.$$

c. Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $\mathbb{P}(Y = m, Z = n) = 0$ si $n \leq m$ ou si $m = 1$ par construction. Si $n > m \geq 2$, on a $(Y = m, Z = n) = (Y = m, Z - Y = n - m)$ et $Z - Y$ représente le temps d'attente du troisième numéro une fois obtenus les deux premiers. $Z - Y$ et Y sont donc indépendants et $Z - Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ donc $\mathbb{P}(Y = m, Z = n) = \mathbb{P}(Y = m) \mathbb{P}(Z - Y = n - m) = \frac{6}{3^m} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{n-m}}{3^{n-1}}$.

d. Par construction, $Z(\Omega) \subset (\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}) \setminus \{1, 2\}$. Pour $n \geq 3$, $(Z = n) = \bigcup_{m=2}^{n-1} (Y = m, Z = n)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{m=2}^{n-1} \frac{2^{n-m}}{3^{n-1}} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} \sum_{m=2}^{n-1} \frac{1}{2^{m-2}} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} \times \frac{1 - (1/2)^{n-2}}{1 - (1/2)} = \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}}$.

À nouveau, $(Z \neq +\infty) = \bigcup_{n=3}^{+\infty} (Z = n)$ donc $\mathbb{P}(Z \neq +\infty) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}} = \frac{4}{9} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^{n-3}}{3^{n-3}} - \frac{2}{9} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-3}}$ donc $\mathbb{P}(Z \neq 0) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{1 - (2/3)} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{1 - (1/3)} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$. Comme attendu, on a $\mathbb{P}(Z = +\infty) = 0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir les trois numéros). $\sum_{n \geq 3} n \mathbb{P}(Z = n)$ converge car, par croissances comparées,

$n \mathbb{P}(Z = n) = n \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=3}^{+\infty} n \mathbb{P}(Z = n) = \sum_{n=3}^{+\infty} n \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}}$. Or, pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=3}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=3}^{+\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} - 1 - 2x$ en dérivant terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence. En écrivant $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=3}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \sum_{n=3}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, on a donc $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{(1 - (2/3))^2} - 1 - 2(2/3) - 2\left(\frac{1}{(1 - (1/3))^2} - 1 - 2(1/3)\right) = \frac{11}{2}$.

On pouvait dire, par indépendance de Y et $Z - Y$, que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z - Y) = \frac{5}{2} + 3$ puisque $Z - Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

127 a. Par la formule des probabilités totales, comme $\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'événements,

on a $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n) \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n) \mathbb{P}(C_n)$ donc, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} (\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n))$ car la puce "change" de point. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} M u_n$.

b. La matrice M est symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral. Comme

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et que } \mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3$$

si $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$, par la formule de changement de base, $M = P D P^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Classiquement } M^n = P D^n P^{-1} \text{ or, comme } v_1 + v_2 + v_3 = 3e_1,$$

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = 3e_2 \text{ et } v_1 + v_2 - 2v_3 = 3e_3, \text{ on a } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par un calcul fastidieux, on a donc } M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

c. Il est clair que $J^3 = 3J$ donc $P = X(X - 3)$ est annulateur de J . On écrit la division euclidienne de

$(X-1)^n$ par P , à savoir $(X-1)^n = PQ_n + R_n$ avec $R_n = a_n X + b_n$ car $\deg(R_n) < \deg(P) = 2$. En évaluant en 0 et en 3, on a donc le système $(-1)^n = b_n$, $2^n = 3a_n + b_n$ donc $b_n = (-1)^n$ et $a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$. Ainsi, $(X-1)^n = PQ_n + \frac{2^n - (-1)^n}{3}X + (-1)^n$ ce qui, en remplaçant X par A , devient comme à la question précédente, car $P(J) = 0$ et $M = J - I_3$, $M^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}J + (-1)^n I_3$.

d. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}Mu_n$, par récurrence simple, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n}M^n u_0$.

Par hypothèse, $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, avec b_* , $u_n = \frac{1}{3 \times 2^n} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

e. Si $u_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ n'est pas imposé, avec le même calcul $u_n = \frac{1}{3 \times 2^n} \begin{pmatrix} (a+b+c)2^n + (2a-b-c)(-1)^n \\ (a+b+c)2^n + (2b-a-c)(-1)^n \\ (a+b+c)2^n + (2c-a-b)(-1)^n \end{pmatrix}$. Comme on a tout de même $a+b+c = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(C_0) = 1$, comme ci-dessus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

128 a. Par construction, $(X_n, Y_n)(\Omega) = \{(x, y) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \mid x \geq y\}$. Et comme on peut supposer que la loi de X_n est uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ et que la loi de Y_n sachant $(X_n = x)$ est aussi uniforme sur $\llbracket 1; x \rrbracket$, on a $\forall x \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\forall y \in \llbracket 1; x \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_n = x, Y_n = y) = \mathbb{P}(X_n = x) \mathbb{P}(Y_n = y \mid X_n = x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{nx}$.

b. On a $Y_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et, pour $y \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(Y_n = y) = \bigcup_{x=y}^n (X_n = x, Y_n = y)$ (car on ne peut tirer la boule numéro y que dans une urne de numéro x tel que $y \leq x \leq n$). Comme ces événements sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(Y_n = y) = \sum_{x=y}^n \mathbb{P}(X_n = x, Y_n = y) = \sum_{x=y}^n \frac{1}{nx}$.

c. Y_n est bornée donc admet une espérance finie, $\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{y=1}^n y \mathbb{P}(Y_n = y) = \sum_{y=1}^n \sum_{x=y}^n \frac{y}{nx} = \sum_{1 \leq y \leq x \leq n} \frac{y}{nx}$ et, en inversant les sommes doubles, $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n \left(\frac{1}{x} \sum_{y=1}^x y \right) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n+3}{4}$. On vérifie bien que si $n = 1$, on a $\mathbb{E}(Y_1) = 1$ ce qui est logique car, dans ce cas, on a $X_1 = Y_1 = 1$ sûrement.

d. De même, Y_n^2 étant bornée, elle admet une espérance finie et $\mathbb{E}(Y_n^2) = \sum_{y=1}^n y^2 \mathbb{P}(Y_n = y)$ par la formule de transfert. Comme avant, $\mathbb{E}(Y_n^2) = \sum_{y=1}^n \sum_{x=y}^n \frac{y^2}{nx} = \sum_{1 \leq y \leq x \leq n} \frac{y^2}{nx} = \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^x \frac{y^2}{nx} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n \left(\frac{1}{x} \sum_{y=1}^x y^2 \right)$ donc $\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n \frac{(x+1)(2x+1)}{6} = \frac{1}{6n} \sum_{x=1}^n (2x^2 + 3x + 1) = \frac{1}{6n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{3n(n+1)}{2} + n \right)$ et on trouve $\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{4n^2 + 15n + 17}{36}$. Par la formule de KÖNIG-HUYGENS, comme $\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - \mathbb{E}(Y_n)^2$, on obtient $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{4n^2 + 15n + 17}{36} - \left(\frac{n+3}{4} \right)^2 = \frac{(n-1)(7n+13)}{144}$ après calcul. Encore une fois, c'est logique qu'on retrouve $\mathbb{V}(Y_1) = 0$ car Y_1 est constante.

ORAUX 2022 THÈME 9

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

129 a. Soit $x \in [a; b]$ et $w_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $w_x(t) = v_t(x) = (x, \varphi_t(x), \varphi'_t(x)) = v(x) + t(0, \varphi(x), \varphi'(x))$.

Comme les trois coordonnées de w_x sont affines en fonction de t , elles sont continues sur $\mathbb{R}$ donc w_x l'est aussi par théorème. Or $w_x(0) = v_0(x) = v(x) \in U$ par hypothèse et U est un ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(v(0), \varepsilon) \subset U$. Par continuité de w_x en 0, $\exists \alpha > 0$, $\forall t \in [-\alpha; \alpha]$, $|w_x(t) - w_x(0)| = |v_t(x) - v(x)| < \varepsilon$. Ainsi, $\forall t \in [-\alpha; \alpha]$, $|v_t(x) - v(x)| < \varepsilon$ donc $v_t(x) \in B(v(0), \varepsilon) \subset U$ d'où $v_t(x) \in U$.

b. D'abord, l'intégrale I_{φ_t} est bien définie car, par opérations, $x \mapsto f(v_t(x)) = f(x, \varphi(x) + t g(x), \varphi'(x) + t g'(x))$ est continue sur le segment $[a; b]$. Dérivons sous le signe somme et définissant $\varphi : [-\alpha; \alpha] \times [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation $\varphi(t, x) = f(v_t(x)) = f(x, \varphi(x) + t g(x), \varphi'(x) + t g'(x))$.

- $\forall x \in [a; b]$, $t \mapsto \varphi(t, x)$ est de classe C^1 sur $[-\alpha; \alpha]$ par la règle de la chaîne et on a la relation suivante : $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = g(x) \frac{\partial f}{\partial y}(v_t(x)) + g'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(v_t(x))$.
- $\forall t \in [-\alpha; \alpha]$, $x \mapsto \varphi(t, x)$ est continue sur le segment $[a; b]$ donc y est intégrable. De plus, l'application $x \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)$ est continue sur $[a; b]$ par opérations.
- Comme f est de classe C^2 sur U , $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont de classe C^1 donc continues. Comme φ et g sont de classe C^1 sur $[a; b]$, φ_t est de classe C^1 sur $[a; b]$ donc $(t, x) \mapsto v_t(x) = (x, \varphi(x) + t g(x), \varphi'(x) + t g'(x))$ est continue sur le fermé borné $K = [-\alpha; \alpha] \times [a; b]$. Par opérations, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est continue sur K donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes. Il existe $M \geq 0$ tel que $\forall (t, x) \in K$, $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right| \leq M = \psi(t)$ et ψ est continue et intégrable sur $[a; b]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, h est dérivable sur $[-\alpha; \alpha]$ donc en particulier en 0 où l'on a $h'(0) = \int_a^b \left(g(x) \frac{\partial f}{\partial y}(v_0(x)) + g'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(v_0(x)) \right) dx$. Ainsi, $h'(0) = \int_a^b g(x) \frac{\partial f}{\partial y}(v(x)) dx + \int_a^b g'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(v(x)) dx$ par linéarité. Dans la seconde intégrale, on pose $u(x) = g(x)$ et $w(x) = \frac{\partial f}{\partial z}(v(x))$, u et w sont bien de classe C^1 sur $[a; b]$ car f est de classe C^2 sur U . Comme $w'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x)) \right)$, $u(a) = u(b) = 0$, par intégration par parties, on trouve $\int_a^b g'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(v(x)) dx = - \int_a^b g(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x)) \right) dx$ de sorte qu'on a comme attendu $h'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(v(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x)) \right) \right] g(x) dx$.

130 a. Soit $r > 0$ tel que $\forall x \in]-r; r[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $(1 + x^2)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0$ et $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Comme $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$, on a déjà $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. De plus, comme on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, pour tout $x \in]-r; r[$, on a $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ donc $xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ (nul pour $n = 0$), $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

donc $x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$ (nul pour $n = 0$ et $n = 1$). Ainsi, en reportant dans (E), on obtient $y''(x) + x^2 y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + 2na_n - 2a_n]x^n = 0$. Par unicité du développement en série entière, $(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + 2na_n - 2a_n = 0$ pour tout entier naturel n donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+1}a_n$.

Comme $a_1 = 0$, on obtient par une récurrence simple $a_{2n+1} = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Comme $a_0 = 1$, par une récurrence simple aussi, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

131 a. On définit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y, z) = z - g(x, y)$ de sorte que $S : f(x, y, z) = 0$. Les points réguliers

$M = (x, y, z)$ de S sont ceux pour lesquels on a $\vec{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ et ce vecteur $\vec{\nabla}$ est alors normal au plan tangent Π à la surface S en M . Or $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \vec{k} - \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \vec{j}$ de sorte que g vérifié la propriété (P) si et seulement si $(\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) | \vec{u}) = 0 \iff 2\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée.

Ainsi, g vérifié (P) si et seulement si g est solution de (E).

b. φ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi(x, y) = (0, 0) \iff x = y = 0$ donc $\text{Ker}(\varphi) = \{(0, 0)\}$ de sorte que φ est injectif. C'est donc un automorphisme car $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie. On résout le système $(x', y') = \varphi(x, y) = (x - 2y, y) \iff (x = x' + 2y', y' = y)$. Ainsi $\varphi^{-1}(x', y') = \psi(x', y') = (x' + 2y', y')$.

c. Si on pose $h(s, t) = g \circ \psi(s, t) = g(s + 2t, t)$, alors h est de classe C^1 par composée car g et ψ le sont puis $\frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial g}{\partial x}(s + 2t, t)$ et $\frac{\partial h}{\partial t}(s, t) = 2\frac{\partial g}{\partial x}(s + 2t, t) + \frac{\partial g}{\partial y}(s + 2t, t)$ par la règle de la chaîne.

d. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (E), alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$. Comme φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ d'après **b.**, on peut aussi écrire $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$, $2\frac{\partial g}{\partial x}(\psi(s, t)) + \frac{\partial g}{\partial y}(\psi(s, t)) = 0$ ce qui, d'après la question **c.**, s'écrit aussi $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$, $2\frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(s, t)) + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(s, t)) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) = 0$. On a donc $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$, $h(s, t) = f(s)$ avec f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = h(\varphi(x, y)) = f(x - 2y)$.

Réciproquement, si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = f(x - 2y)$ avec f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f'(x - 2y) - 2f'(x - 2y) = 0$.

Les solutions de (E) sont donc, par analyse-synthèse, les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = f(x - 2y)$.

132

133

134

135 a. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\varphi : (x, y) \mapsto \int_x^y f(t)dt$ est de

classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -f(x)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = f(y)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$ comme la fonction f . Comme $(x, y) \rightarrow y - x$ est de classe C^1 car polynomiale et ne s'annule pas sur D par définition, g est de classe C^1 sur D par opérations.

De plus, $\forall (x, y) \in D$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y f(t)dt - \frac{f(x)}{y-x} = \frac{1}{(y-x)^2} \left(\int_x^y f(t)dt - (y-x)f(x) \right)$. Comme on a $(y-x)f(x) = \int_x^y f(x)dt$, on a la formule plus compacte $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (f(t) - f(x))dt$.

De même, on a $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y f(t)dt + \frac{1}{y-x} f(y) = \frac{1}{(y-x)^2} \left((y-x)f(y) - \int_x^y f(t)dt \right)$, ou encore $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (f(y) - f(t))dt$, relation qu'on aurait pu obtenir aussi car $g(x, y) = g(y, x)$ ce qui montre, en dérivant ceci par rapport à x par la règle de la chaîne, que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(y, x)$.

b. Soit $h \neq 0$, $g(a, a+h) - g(a) = \frac{1}{h} \left(\int_a^{a+h} f(t)dt \right) - f(a)$. La fonction $F : h \mapsto \int_a^{a+h} f(t)dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car $F'(h) = f(a+h)$ (f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) et on a $\forall h \neq 0$, $g(a+h, a) - g(a) = \frac{F(h) - hf(a)}{h}$.

D'après TAYLOR-YOUNG, puisque F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, le développement limité d'ordre 2 de F en 0 est donné par $F(h) = F(0) + F'(0)h + \frac{F''(0)}{2}h^2 + o(h^2)$. Or $F(0) = 0$, $F'(0) = f(a)$ et $F''(0) = f'(a)$, donc

$F(h) - hf(a) = \frac{f'(a)}{2}h^2 + o(h^2)$ d'où $\frac{g(a, a+h) - g(a, a)}{h} = \frac{f'(a)}{2} + o(1)$. On en déduit que $\frac{\partial g}{\partial y}(a, a) = \frac{f'(a)}{2}$.

Comme $g(a+h, a) = g(a, a+h)$, on a aussi $\frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{f'(a)}{2}$.

c. Si $x \neq y$, d'après **a.**, on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (f(t) - f(x))dt$. En posant $u : t \mapsto f(t) - f(x)$

et $v : t \mapsto -(y-t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\widetilde{[x; y]}$ donc, par intégration par parties, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (f(t) - f(x))dt = \frac{1}{(y-x)^2} \left([u(t)v(t)]_x^y + \int_x^y (y-t)f'(t)dt \right) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (y-t)f'(t)dt$.

Or $\frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{f'(a)}{2} = f'(a) \times \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (y-t)dt$ car $\int_x^y (y-t)dt = \left[-\frac{(y-t)^2}{2} \right]_x^y$. Ainsi, en soustrayant

les deux expressions, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a))dt$ si $(x, y) \in D$.

d. Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, f' est continue en a . Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]a-\alpha; a+\alpha[$, $|f'(t) - f'(a)| < 2\varepsilon$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x, y) - (a, a)\|_\infty < \alpha$, traitons deux cas :

- si $x = y$, alors $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| = \frac{|f'(x) - f'(a)|}{2} < \varepsilon$ car $|x - a| < \alpha$.
- si $x \neq y$, avec la question précédente et par inégalité de la moyenne, on obtient la majoration $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{(y-x)^2} \left| \int_x^y (y-t)|f'(t) - f'(a)|dt \right| < \frac{\varepsilon}{(y-x)^2} \left| \left[-\frac{(y-t)^2}{2} \right]_x^y \right| = \varepsilon$.

Ceci prouve que $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue en (a, a) pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc, avec **a.**, que $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même, $\frac{\partial g}{\partial y}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^2$. Par définition, la fonction g est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

136 a. On cherche une fonction $y :]0; r[\rightarrow \mathbb{R}$ (avec $r > 0$) solution de (E) et développable en série entière qu'on

écrit $\forall x \in]0; r[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-2}$ avec $r > 0$. On sait d'après le cours que y est de classe C^∞ sur $]0; r[$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Pour $x \in]0; r[$, y est solution de (E) donc $x^2 y''(x) - 6xy'(x) + (12+x^2)y(x) = x^2 y''(x) - 6xy'(x) + 12y(x) + x^2 y(x)$

qu'on écrit $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n$. Ainsi, en isolant les deux premiers

termes, $x^2 y''(x) - 6xy'(x) + (12+x^2)y(x) = 12a_0 + 12a_1 x - 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} [n(n-1)a_n - 6na_n + 12a_n + a_{n-2}]x^n = 0$.

Par unicité du développement en série entière, $a_0 = a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2$, $n(n-1)a_n - 6na_n + 12a_n + a_{n-2} = 0$ donc $(n-3)(n-4)a_n = -a_{n-2}$. Pour $n = 2$, on a $a_2 = 0$. Pour $n \geq 5$, $a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n-3)(n-4)}$ donc les termes a_{2n} pour $n \geq 2$ dépendent de a_4 et les termes a_{2n+1} pour $n \geq 1$ dépendent de a_3 .

On montre par une récurrence simple que $\forall n \geq 2$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n a_4}{(2n-3)!}$ et que $\forall n \geq 1$, $a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1} a_3}{(2n-2)!}$.

$$\text{Ainsi, } y(x) = a_4 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-3)!} + a_3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n-2)!} = a_4 x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-3}}{(2n-3)!} + a_3 x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

et on reconnaît des développements usuels d'où $y(x) = a_4 x^3 \sin(x) + a_3 x^3 \cos(x)$.

Réciproquement, si y est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $y(x) = \lambda x^3 \sin(x) + \mu x^3 \cos(x)$, posons une nouvelle fonction $z : x \mapsto \frac{y(x)}{x^3} = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$ qui est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui vérifie classiquement $z'' + z = 0$. Calculons

$$z'(x) = \frac{y'(x)}{x^3} - 3 \frac{y(x)}{x^4} \text{ et } z''(x) = \frac{y''(x)}{x^3} - 6 \frac{y'(x)}{x^4} + 12 \frac{y(x)}{x^5} \text{ donc } \frac{y''(x)}{x^3} - 6 \frac{y'(x)}{x^4} + 12 \frac{y(x)}{x^5} + \frac{y(x)}{x^3} = 0 \text{ ce qui,}$$

en multipliant par x^5 , devient $x^2 y''(x) - 6x y'(x) + (12 + x^2)y(x) = 0$ et y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \lambda x^3 \sin(x) + \mu x^3 \cos(x)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Comme les fonctions $x \mapsto x^3 \sin(x)$ et $x \mapsto x^3 \cos(x)$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ forment une famille libre, et qu'on sait que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de cette équation différentielle (E) linéaire normalisée homogène est un plan vectoriel d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, on a trouvé toutes les solutions de (E), elles sont donc toutes développables en série entière.

b. De même, les solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les $y : x \mapsto \lambda' x^3 \sin(x) + \mu' x^3 \cos(x)$ avec $(\lambda', \mu') \in \mathbb{R}^2$.

Analyse : si y est solution réelle de (E) sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et à $\mathbb{R}_-^*$ sont solutions de (E) donc, avec ce qui précède, il existe $(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \lambda x^3 \sin(x) + \mu x^3 \cos(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, y(x) = \lambda' x^3 \sin(x) + \mu' x^3 \cos(x)$. On a aussi $y(0) = 0$ en prenant $x = 0$ dans (E).

Synthèse : soit $(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{R}^4$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \lambda x^3 \sin(x) + \mu x^3 \cos(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, y(x) = \lambda' x^3 \sin(x) + \mu' x^3 \cos(x)$, alors y est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = y''(0) = 0$ (avec les taux d'accroissements ou parce que y est développable en série entière sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ et que ceci donne les dérivées successives en 0) donc y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'espace des solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 4, il s'agit de $\text{Vect}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ avec $y_1(x) = 0$ si $x \geq 0$ et $y_1(x) = x^3 \sin(x)$ si $x < 0$, $y_2(x) = 0$ si $x \geq 0$ et $y_2(x) = x^3 \cos(x)$ si $x < 0$, $y_3(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $y_3(x) = x^3 \sin(x)$ si $x > 0$, $y_4(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $y_4(x) = x^3 \cos(x)$ si $x > 0$.

137 a. Avec $\sin(x-t) = \sin(x) \cos(t) - \cos(x) \sin(t)$ et la linéarité de l'intégrale, comme toutes les fonctions sont continues sur le segment $[0; x] : \forall x \geq 0, g(x) = f(x) + \sin(x) \int_0^x \cos(t) u(t) f(t) dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t) u(t) f(t) dt$.

Par le théorème fondamental de l'intégration, la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_0^x \cos(t) u(t) f(t) dt$ est la fonction $x \mapsto \cos(x) u(x) f(x)$, et, avec l'abus de notation classique, $\left(\int_0^x \sin(t) u(t) f(t) dt \right)' = \sin(x) u(x) f(x)$, donc $g'(x) = f'(x) + \cos(x) \int_0^x \cos(t) u(t) f(t) dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t) u(t) f(t) dt$. On recommence pour obtenir $g''(x) = f''(x) - \sin(x) \int_0^x \cos(t) u(t) f(t) dt + \cos(x) \int_0^x \sin(t) u(t) f(t) dt + \cos^2(x) u(x) f(x) + \sin^2(x) u(x) f(x)$ donc $g''(x) = f''(x) + f(x) - g(x) + u(x) f(x) = -g(x)$ donc (F) : $g'' + g = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de cette équation différentielle (F) sont les fonctions $g : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x)$ pour lesquelles $|g| \leq |A| + |B| = c$ donc ces solutions g sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\forall x \geq 0, f(x) = g(x) - \int_0^x \sin(x-t) u(t) f(t) dt$, en passant aux valeurs absolues avec l'inégalité de la moyenne, on a $\forall x \geq 0, |f(x)| \leq |g(x)| + \int_0^x |\sin(x-t)| |u(t)| |f(t)| dt \leq c + \int_0^x |u(t) f(t)| dt$ car $|\sin| \leq 1$.

c. Posons $h : x \mapsto \int_0^x |u(t)f(t)|dt$, alors h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(x) = |u(x)||f(x)| \leq c|u(x)| + |u(x)|h(x)$ d'après la question b.. En notant $U(x) = \int_0^x |u(t)|dt$, on a $(e^{-U(x)}h(x))' \leq c|u(x)|e^{-U(x)} = c(-e^{-U(x)})'$. On intègre cette inégalité entre 0 et x pour avoir $\forall x \geq 0, e^{-U(x)}h(x) \leq c(1 - e^{-U(x)}) \leq c$ par croissance de l'intégrale. Alors $\forall x \geq 0, h(x) \leq ce^{U(x)}$ et comme u est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, U est croissante et possède une limite finie en $+\infty$ donc U est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, h est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et enfin, comme on a $|f| \leq c + h$, la fonction f est aussi bornée sur $\mathbb{R}_+$.

138 a. Par opérations, la fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur l'ouvert $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme

$|f(x,y)| \leq |xy| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x||y| \leq \|(x,y)\|_2^2$ donc, comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \|(x,y)\|_2 = 0$, par encadrement, on trouve $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est aussi continue en $(0,0)$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$ en revenant à la définition et, par un calcul brutal, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}$. Le second calcul n'était pas nécessaire puisque $f(x,y) = -f(y,x)$ (1) donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ en dérivant (1) par rapport à x avec la règle de la chaîne. De même $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert D . De plus, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \leq \frac{|y|(2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y| \leq 2\|(x,y)\|_2$ et, comme en a., $\frac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en $(0,0)$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.

Ainsi, par définition, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

c. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1$. On peut aussi calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0$.

d. D'après la contre-apposée du théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

139 a. Comme f et g sont continues, le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ permet d'affirmer qu'il existe une

unique solution au problème de CAUCHY $y' + fy = g$ avec $y(a) = b$. Si on note F une primitive de f , les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(E_0) : y' + fy = 0$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-F}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y : x \mapsto (\lambda + \int_0^x g(t)e^{F(t)}dt)e^{-F(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Parmi celles-ci, l'unique solution qui vérifie $y(a) = b$ est telle que $(\lambda + \int_0^a g(t)e^{F(t)}dt)e^{-F(a)} = b$ d'où $\lambda = be^{F(a)} - \int_0^a g(t)e^{F(t)}dt$. C'est donc la fonction $y_0 : x \mapsto (be^{F(a)} - \int_0^a g(t)e^{F(t)}dt + \int_0^x g(t)e^{F(t)}dt)e^{-F(x)}$ ce qui se simplifie par CHASLES en $y_0(x) = e^{-F(x)} \int_a^x g(t)e^{F(t)}dt + be^{F(a)-F(x)}$.

b. En prenant $f : x \mapsto -\alpha$ et $g = h$, f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ donc, d'après a., les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $y : x \mapsto (\lambda + \int_0^x h(t)e^{-\alpha t}dt)e^{\alpha x}$. D'abord, comme $\forall t \geq 0, |h(t)e^{-\alpha t}| \leq \|h\|_{\infty, \mathbb{R}}e^{-\alpha t} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le cours donc, par comparaison, $\int_0^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t}dt$ converge. Pour avoir y bornée sur $\mathbb{R}_+$, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} = +\infty$ car $\alpha > 0$, on doit forcément avoir une indétermination et avoir

$\lambda + \int_0^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t} dt = 0$. La seule fonction candidate est $y_1 : x \mapsto -e^{\alpha x} \int_x^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t} dt$. Pour $x \geq 0$, par l'inégalité de la moyenne, $|y_1(x)| \leq \|h\|_{\infty, \mathbb{R}} e^{\alpha x} \int_x^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \|h\|_{\infty, \mathbb{R}} e^{\alpha x} [-e^{-\alpha t}]_x^{+\infty} = \|h\|_{\infty, \mathbb{R}}$.

Par conséquent, (E) possède une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ qui est $y_1 : x \mapsto -e^{\alpha x} \int_x^{+\infty} h(t)e^{-\alpha t} dt$.

140 a. Comme f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, d'après le cours, f y est de classe C^∞ ainsi que toutes

ses dérivées avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = x^2 f''(x) - x^3 f''(x) - x^2 f'(x) - x f'(x) + f(x)$ qu'on écrit $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Or $n(n-1)$ est nul pour $n=0$ ou $n=1$ et n est nul pour $n=0$ donc on peut faire commencer toutes ces sommes à $n=0$. Dans la seconde et la troisième, on effectue le changement d'indice $p = n+1$ ce qui permet d'écrire $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-1)a_{n-1} - n a_n + a_n] x^n$.

Par conséquent, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) - f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (a_n - a_{n-1}) x^n$ avec $b_n = (n-1)^2$ puisque $n(n-1) - n + 1 = (n-1)^2$ et $(n-1)(n-2) + (n-1) = (n-1)^2$.

c. Soit f une solution développable en série entière de (E) sur $] -1; 1[$, d'après la question précédente, $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 2$, $a_n = a_{n-1}$ donc $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_1 x^n = \frac{a_1 x}{1-x}$ (série géométrique). Réciproquement, si on pose $y_1 : x \mapsto \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$, on a $y_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $y_1''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$ donc pour tout réel $x \in] -1; 1[$, on obtient $x^2(1-x)y_1''(x) - x(1+x)y_1'(x) + y_1(x) = x^2(1-x) \times \frac{2}{(1-x)^3} - x(1+x) \times \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} = 0$ d'où $x^2(1-x)y_1''(x) - x(1+x)y_1'(x) + y_1(x) = \frac{2x^2 - x(1+x) + x(1-x)}{(1-x)^2} = 0 : y_1$ est solution de (E) sur $] -1; 1[$.

d. On vient de voir qu'en fait $y_1 : x \mapsto \frac{x}{1-x}$ est solution de (E) sur chaque intervalle où (E) est sous forme normalisée, à savoir $I_1 =] -\infty; 0[$, $I_2 =]0; 1[$ et $I_3 =]1; +\infty[$. Effectuons une variation de la constante, cherchons les solutions de (E) sous la forme $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)x}{1-x} = \lambda(x)y_1(x)$ avec λ deux fois dérivable sur l'un des intervalles I_k . En remplaçant dans (E), $x^2(1-x)\lambda''(x)y_1(x) + 2x^2(1-x)\lambda'(x)y_1'(x) - x(1+x)\lambda'(x)y_1(x) = 0$ car y_1 est solution de (E) donc les $\lambda(x)$ s'éliminent. Comme $y_1(x) = \frac{x}{1-x}$ et $y_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, après simplifications, la fonction λ vérifie (F) : $x\lambda''(x) + \lambda'(x) = 0$. Les solutions sont les fonctions λ telles que $\lambda'(x) = \frac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ donc $\lambda(x) = a \ln(|x|) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de (E) sur l'un des trois

intervalles I_k sont les fonctions $y_k : x \mapsto \frac{x(a_k \ln(|x|) + b_k)}{1-x}$ avec $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$.

À détailler mais en termes de raccord, l'équation (E)

- admet comme solutions les fonctions $y : x \mapsto \frac{bx}{1-x}$ avec $b \in \mathbb{R}$ sur $] -\infty; 1[$.
- admet comme solutions les fonctions $y : x \mapsto \frac{a \ln(x)}{1-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.
- admet sur $\mathbb{R}$ seulement la fonction nulle.

La dimension de l'espace des solutions de (E) sur I est donc :

- 2 si $I =] -\infty; 0[$ ou $I =]0; 1[$ ou $I =]1; +\infty[$.
- 1 si $I =] -\infty; 1[$ ou $I =]0; +\infty[$.

• 0 si $I = \mathbb{R}$.

- 141 a.** Comme les deux fonctions $t \mapsto \cos(t)e^{-\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \sin(t)e^{-\sqrt{t}}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration et par opérations, la fonction y_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a l'expression $y_0'(x) = \cos(x) \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}} dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}} dt + \sin(x) \cos(x)e^{-\sqrt{x}} - \cos(x) \sin(x)e^{-\sqrt{x}}$ donc $y_0'(x) = \sin(x) \int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}} dt + \cos(x) \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}} dt$. De même, y_0' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a $y_0''(x) = -\sin(x) \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}} dt + \cos(x) \int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}} dt + \sin^2(x)e^{-\sqrt{x}} + \cos^2(x)e^{-\sqrt{x}} = -y_0(x) + e^{-\sqrt{x}}$ donc y_0 est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E).
- b.** Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène $(E_0) : y'' + y = 0$, comme les solutions de l'équation caractéristique $z^2 + 1 = 0$ sont $z = \pm i$, sont les fonctions $y : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Par théorème de structure, comme on connaît une solution particulière de (E) d'après **a.** et que, par linéarité de l'intégrale, $y_0(x) = \int_0^x (\sin(x) \cos(t) - \cos(x) \sin(t))e^{-\sqrt{t}} dt = \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}} dt$, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}} dt$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- c.** La fonction $g : t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et que $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^4 e^{-u} = 0$ par croissances comparées, la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.
- d.** Bien sûr, si $\ell_a = \ell_b = 0$, il est clair que $f : x \mapsto a(x) \cos(x) + b(x) \sin(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Réciproquement, si $f : x \mapsto a(x) \cos(x) + b(x) \sin(x)$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n\pi) = \ell$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n a(n\pi) = \ell$ ce qui prouve que $\ell_a = \ell = 0$. De même, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \ell$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n b\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \ell$ ce qui prouve que $\ell_b = \ell = 0$. Par double implication, on a bien montré que pour deux fonctions $a, b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ayant des limites finies ℓ_a et ℓ_b respectivement en $+\infty$, la fonction $f : x \mapsto a(x) \cos(x) + b(x) \sin(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\ell_a = \ell_b = 0$.
- e.** Les deux fonctions $f_1 : t \mapsto \cos(t)e^{-\sqrt{t}}$ et $f_2 : t \mapsto \sin(t)e^{-\sqrt{t}}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $|f_1(t)| \leq e^{-\sqrt{t}}$ et $|f_2(t)| \leq e^{-\sqrt{t}}$, on en déduit que f_1 et f_2 sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison avec la question **c.** On peut écrire $y : x \mapsto \left(a - \int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}} dt\right) \cos(x) + \left(b + \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}} dt\right) \sin(x)$ les solutions de (E) et les fonctions $x \mapsto a - \int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}} dt$ et $x \mapsto b + \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}} dt$ admettent respectivement pour limite $\ell_a = a - \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}} dt$ et $\ell_b = b + \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}} dt$ en $+\infty$. D'après la question **d.**, la fonction y admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\ell_a = \ell_b = 0$ c'est-à-dire si et seulement si on a $a = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}} dt$ et $b = -\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}} dt$. Ainsi, la seule fonction y solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est la fonction y_1 dont l'expression est donnée par $y_1 : x \mapsto \left(\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}} dt - \int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}} dt\right) \cos(x) - \left(\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}} dt - \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}} dt\right) \sin(x)$ qui se simplifie en $y_1(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \cos(t)e^{-\sqrt{t}} dt = \int_x^{+\infty} \sin(t-x)e^{-\sqrt{t}} dt$.