PROGRAMME OFFICIEL

DE MATHÉMATIQUES

MP2I, MPSI, PCSI

2021

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 0 : entrée en matière

- partie 0.1 : préambule ..... page 6
- partie 0.2 : premier semestre ..... page 10
- partie 0.3 : deuxième semestre ..... page 11

Premier semestre

Chapitre 1 : raisonnement et vocabulaire ensembliste

- partie 1.1 : rudiments de logique ..... page 12
- partie 1.2 : ensembles ..... page 12
- partie 1.3 : (ensembles de nombres usuels) ..... page 12
- partie 1.4 : applications [et relations] ..... page 13

Chapitre 2 : compléments de calcul algébrique et trigonométrie

- partie 2.1 : sommes et produits ..... page 14
- partie 2.2 : résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot ..... page 14
- partie 2.3 : inégalités ..... page 14
- partie 2.4 : trigonométrie ..... page 15

Chapitre 3 : nombres complexes

- partie 3.1 : nombres complexes ..... page 16
- partie 3.2 : conjugaison et module ..... page 16
- partie 3.3 : nombres complexes de module 1 et trigonométrie ..... page 16
- partie 3.4 : forme trigonométrique ..... page 17
- partie 3.5 : équations algébriques ..... page 17
- partie 3.6 : racines n-ièmes ..... page 17
- partie 3.7 : exponentielle complexe ..... page 17
- partie 3.8 : interprétation géométrique des nombres complexes ..... page 18

Chapitre 4 : techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

- partie 4.1 : généralités sur les fonctions ..... page 19
- partie 4.2 : dérivation ..... page 19
- partie 4.3 : fonctions usuelles ..... page 20
- partie 4.4 : dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle ..... page 20
- partie 4.5 : calcul de primitives ..... page 21
- partie 4.6 : équations différentielles linéaires du premier ordre ..... page 21
- partie 4.7 : équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants ..... page 21

Chapitre 5 : nombres réels et suites numériques

- partie 5.1 : propriété de la borne supérieure ..... page 23
- partie 5.2 : généralités sur les suites réelles ..... page 23
- partie 5.3 : limite d'une suite réelle ..... page 23
- partie 5.4 : suites monotones ..... page 24
- partie 5.5 : suites extraites ..... page 24
- partie 5.6 : [traduction séquentielle de certaines propriétés] ..... page 24
- partie 5.7 : suites complexes ..... page 24
- partie 5.8 : suites particulières ..... page 25

Chapitre 6 : fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité

- partie 6.1 : limite d'une fonction en un point ..... page 26
- partie 6.2 : continuité en un point ..... page 27
- partie 6.3 : continuité sur un intervalle ..... page 27
- partie 6.4 : fonctions complexes ..... page 27
- partie 6.5 : nombre dérivé, fonction dérivée ..... page 27
- partie 6.6 : extremum local et point critique ..... page 28
- partie 6.7 : théorèmes de Rolle et accroissements finis ..... page 28
- partie 6.8 : fonctions de classe C^{k} ..... page 28
- partie 6.9 : fonctions convexes [généralités, fonctions convexes 1 ou 2 fois dérivables] ..... page 29
- partie 6.10 : fonctions complexes ..... page 29

Chapitre 7 : [arithmétique des entiers]

- partie 7.1 : divisibilité et division euclidienne ..... page 30
- partie 7.2 : [PGCD et algorithme d'Euclide] ..... page 30
- partie 7.3 : [entiers premiers entre eux] ..... page 30
- partie 7.4 : [nombres premiers] ..... page 31
- partie 7.5 : [congruences] ..... page 31

Chapitre 8 : [structures algébriques usuelles]

- partie 8.1 : [loi de composition interne] ..... page 32
- partie 8.2 : [structure de groupe] ..... page 32
- partie 8.3 : [structures d'anneaux et de corps] ..... page 32

Chapitre 9 : calcul matriciel et systèmes linéaires

- partie 9.1 : opérations sur les matrices ..... page 34
- partie 9.2 : opérations élémentaires ..... page 34
- partie 9.3 : systèmes linéaires ..... page 34
- partie 9.4 : (ensemble) [anneau] des matrices carrées ..... page 35

Chapitre 10 : polynômes [et fractions rationnelles]

- partie 10.1 : (ensemble) [anneau] des polynômes à une indéterminée ..... page 36
- partie 10.2 : divisibilité et division euclidienne ..... page 36
- partie 10.3 : fonctions polynomiales et racines ..... page 37
- partie 10.4 : dérivation ..... page 37
- partie 10.5 : arithmétiques dans $\mathbb{K}[\mathsf{X}]$ ..... page 37
- partie 10.6 : polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[\mathsf{X}]$ et $\mathbb{R}[\mathsf{X}]$ ..... page 38
- partie 10.7 : formule d'interpolation de Lagrange ..... page 38
- partie 10.8 : fractions rationnelles [décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$] ..... page 38

Deuxième semestre

Chapitre 11 : analyse asymptotique

- partie 11.1 : relations de comparaison : cas des fonctions .... page 40
- partie 11.2 : développements limités .... page 41
- partie 11.3 : relations de comparaison : cas des suites .... page 41
- partie 11.4 : problème d'analyse asymptotique .... page 41

Chapitre 12 : espaces vectoriels et applications linéaires

- partie 12.1 : espaces vectoriels .... page 43
- partie 12.2 : sous-espaces vectoriels .... page 43
- partie 12.3 : familles (finies) de vecteurs .... page 44
- partie 12.4 : somme de deux sous-espaces .... page 44
- partie 12.5 : existence de bases .... page 44
- partie 12.6 : dimension d'un espace de dimension finie .... page 44
- partie 12.7 : sous-espaces et dimension .... page 45
- partie 12.8 : généralités sur les applications linéaires .... page 45
- partie 12.9 : endomorphismes .... page 46
- partie 12.10 : détermination d'une application linéaire (lorsque E est de dimension finie) .... page 46
- partie 12.11 : théorème du rang .... page 47
- partie 12.12 : formes linéaires et hyperplans (en dimension finie) .... page 47
- partie 12.13 : équations linéaires [sous-espaces affines d'un espace vectoriel] .... page 47

Chapitre 13 : matrices et déterminants

- partie 13.1 : matrice d'une application linéaire dans des bases .... page 49
- partie 13.2 : application linéaire canoniquement associée à une matrice(, rang d'une matrice)page 49
- partie 13.3 : changements de bases [matrices équivalentes et semblables] .... page 50
- partie 13.4 : [matrices semblables et trace] .... page 51
- partie 13.5 : systèmes linéaires .... page 51
- partie 13.6 : [groupe symétrique : généralités, signature d'une permutation] .... page 51
- partie 13.7 : [formes n-linéaires alternées] .... page 51
- partie 13.8 : déterminant d'une famille de vecteurs dans une base .... page 52
- partie 13.9 : déterminant d'un endomorphisme .... page 52
- partie 13.10 : déterminant d'une matrice carrée .... page 52
- partie 13.11 : calcul des déterminants .... page 53
- partie 13.12 : [comatrice] .... page 53

Chapitre 14 : intégration

- partie 14.1 : (fonctions en escalier) .... page 54
- partie 14.2 : continuité uniforme .... page 54
- partie 14.3 : fonctions continues par morceaux .... page 54
- partie 14.4 : intégrale d'une fonction continue [par morceaux] sur un segment .... page 55
- partie 14.5 : sommes de RIEMANN .... page 55
- partie 14.6 : lien entre intégrale et primitive .... page 55
- partie 14.7 : (inégalité) [formules] de TAYLOR(-LAGRANGE) [globales] .... page 56
- partie 14.8 : (brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes) .... page 56

Chapitre 15 : dénombrement

- partie 15.1 : cardinal d'un ensemble fini ..... page 57
- partie 15.2 : listes et combinaisons ..... page 57

Chapitre 16 : probabilités

- partie 16.1 : univers, événements, variables aléatoires ..... page 58
- partie 16.2 : espaces probabilisés finis ..... page 58
- partie 16.3 : probabilités conditionnelles ..... page 59
- partie 16.4 : loi d'une variable aléatoire ..... page 59
- partie 16.5 : événements indépendants ..... page 59
- partie 16.6 : variables aléatoires indépendantes ..... page 60
- partie 16.7 : espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe ..... page 60
- partie 16.8 : variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance ..... page 61
- partie 16.9 : inégalités probabilistes ..... page 61

Chapitre 17 : espaces préhilbertiens réels

- partie 17.1 : produit scalaire ..... page 62
- partie 17.2 : norme associée à un produit scalaire ..... page 62
- partie 17.3 : orthogonalité ..... page 62
- partie 17.4 : bases orthonormées ..... page 63
- partie 17.5 : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ..... page 63

Chapitre 18 : (séries numériques) [procédés sommatoires discrets]

- partie 18.1 : convergence et divergence ..... page 64
- partie 18.2 : séries à termes positifs ou nuls ..... page 64
- partie 18.3 : séries absolument convergentes à termes réels ou complexes(, suites sommables) page 65
- partie 18.4 : théorème des séries alternées ..... page 65
- partie 18.5 : familles sommables de nombres réels positifs ..... page 65
- partie 18.6 : familles sommables de nombres complexes ..... page 66

Chapitre 19 : fonctions de deux variables

- partie 19.1 : ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues ..... page 67
- partie 19.2 : dérivées partielles ..... page 67
- partie 19.3 : dérivées partielles et composées ..... page 68
- partie 19.4 : extremums ..... page 68

CHAPITRE 0
ENTRÉE EN MATIÈRE

PARTIE 0.1 : PRÉAMBULE

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

0.1.1 : OBJECTIFS DE FORMATION

En classe préparatoire scientifique, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires aux autres disciplines scientifiques.
La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique: analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

Chercher : mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;

Modéliser : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;

Représenter : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;

Raisonner et argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;

Calculer : utiliser le langage symbolique, manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;

Communiquer à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

0.1.2 : DESCRIPTION ET PRISE EN COMPTE DES COMPÉTENCES

Chercher

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités.

La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence.

Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles.

Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter

La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable.

La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments.

L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique

Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent. Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations.
Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

0.1.3 : UNITÉ DE LA FORMATION SCIENTIFIQUE

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

0.1.4 : ARCHITECTURE ET CONTENU DU PROGRAMME

L'année est découpée en deux semestres.

Les contenus du programme peuvent se répartir en trois champs : algèbre, analyse et probabilités.

L'algèbre et l'analyse occupent le plus grand volume sur les deux semestres, tandis que les probabilités sont introduites au second semestre. Si la géométrie n'apparaît pas comme un champ autonome, son importance dans la représentation des objets du programme ne saurait être sous-estimée.

Ainsi, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour l'étude des nombres complexes, l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions d'une variable réelle. Les notions de géométrie affine et euclidienne étudiées au lycée sont reprises dans un cadre plus général.

L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation et d'établir des liens avec les autres disciplines [et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE].

Outre l'étude des nombres complexes, le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier est l'étude des polynômes à une indéterminée. Le second, nettement plus volumineux, est consacré aux notions de base de l'algèbre linéaire, pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique et numérique. Il importe de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite. Les interactions entre les aspects discret et continu sont mises en valeur. Le programme d'analyse combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. À ce titre, les méthodes de l'analyse asymptotique font l'objet d'une section spécifique, qui est exploité ultérieurement dans l'étude des séries. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation.
Enfin, [les familles sommables et] les fonctions de deux variables préparent au programme de deuxième année.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre des univers finis. Il a vocation à interagir avec le reste du programme. La notion de variable aléatoire permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste. L'accent mis sur cette notion permet de travailler rapidement avec des événements construits en termes de variables aléatoires.

La pratique de calculs simples permet aux étudiants de s'approprier de manière effective les notions du programme. Le choix a donc été fait d'introduire très tôt un module substantiel visant à consolider les pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles). Les théories sous-jacentes sont étudiées ultérieurement, ce qui doit en faciliter l'assimilation. Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants, quel que soit le contexte proposé (cours, travaux dirigés[, TIPE]).

0.1.5 : ORGANISATION DU TEXTE

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; il précise aussi certains points de terminologie et certaines notations. Il fixe clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

À l'intérieur de chaque semestre, le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes.

En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque semestre ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue au cours du premier semestre doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période. Ces objectifs sont détaillés dans le bandeau qui suit le titre “Premier semestre”.

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant "hors programme". Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit en particulier des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme.

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution "démonstration non exigible", le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.

PARTIE 0.2 : PREMIER SEMESTRE

Le premier semestre vise deux objectifs majeurs.

- Aménager un passage progressif de la classe de terminale à l'enseignement supérieur, en commençant par renforcer et approfondir les connaissances des bacheliers. À ce titre, trois sections jouent un rôle particulier.
  - La section "Raisonnement et vocabulaire ensembliste" regroupe des notions dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre. Cette section n'a pas vocation à être enseignée d'un seul tenant ni en tout début de semestre.
  - Les sections "Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie" et "Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral" sont axées sur les techniques de calcul. La seconde est fondée sur des théorèmes admis à ce stade, mais démontrés plus loin dans le programme. Cette présentation en deux temps, destinée à faciliter les apprentissages, peut être modulée par le professeur.
- Susciter la curiosité et l'intérêt des étudiants en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux.
  - La section "Nombres complexes" permet l'étude algébrique et géométrique de ces nombres. Elle aborde des applications à la trigonométrie ainsi qu'une première approche des équations algébriques.
  - Les sections "Nombres réels et suites numériques" et "Limites, continuité, dérivabilité" fondent l'analyse réelle sur des bases solides.
  - La section "Calcul matriciel et systèmes linéaires" fournit le vocabulaire et les techniques de résolution des systèmes linéaires, et prépare l'algèbre linéaire du second semestre.
  - Par les possibilités qu'elle offre de combiner beaucoup d'idées et de techniques étudiées au cours du premier semestre, la section "Polynômes" constitue un objet d'étude pertinent pour la fin du semestre.

Le professeur organise l'enseignement de la manière qui lui semble la plus profitable, en gardant à l'esprit le fait que la maîtrise rapide des techniques de calcul est un impératif, notamment en vue de l'enseignement de physique-chimie.

Les ensembles de nombres usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont supposés connus. Toute construction est hors programme.

PARTIE 0.3 : DEUXIÈME SEMESTRE

Le deuxième semestre s'organise autour de (plusieurs) [trois] objectifs majeurs.

- Introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire et aux espaces préhilbertiens.
- Prolonger les sections d'analyse du premier semestre par l'étude de l'analyse asymptotique et de l'intégration des fonctions continues sur un segment [des séries numériques, des familles sommables et par une brève introduction aux fonctions de deux variables].
- Consolider et enrichir les notions relatives aux variables aléatoires sur un univers fini introduites au lycée.
- (Amorcer l'étude des séries numériques dans un cadre restreint et préparer le calcul différentiel, notions qui seront développées en seconde année.)

Le professeur a la liberté d'organiser l'enseignement du semestre de la manière qui lui semble la mieux adaptée. Il est cependant fortement préconisé de traiter la section “Analyse asymptotique” en début de semestre (pour disposer rapidement d'outils efficaces,) et de traiter la section “Fonctions de deux variables” à la fin.

Le programme d'algèbre linéaire est divisé en deux sections. La première étudie les objets géométriques : espaces, sous-espaces, applications linéaires ; la seconde fait le lien avec le calcul matriciel. Cette séparation n'est qu'une commodité de rédaction et le professeur peut organiser l'ensemble comme il le souhaite.

CHAPITRE 1
LOGIQUE ET ENSEMBLES

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive. Leur acquisition est un objectif pour la fin du premier semestre.
Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique, de la théorie des ensembles ou de l'arithmétique est hors programme.

PARTIE 1.1 : RUDIMENTS DE LOGIQUE

Contenus	Capacités & Commentaires
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence - simple, double, forte -.	Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme. [On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.]

PARTIE 1.2 : ENSEMBLES

Contenus	Capacités & Commentaires
Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

PARTIE 1.3 : (ENSEMBLES DE NOMBRES USUELS)

Contenus	Capacités & Commentaires
Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la divisions euclidienne.	
PGCD de deux entiers relatifs dont l'un	Le PGCD de a et b est défini comme étant

au moins est non nul.	le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$ de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.)
PPCM. Algorithme d'EUCLIDE. Nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	(La démonstration est hors programme.) Application au calcul du PGCD et du PPCM.
Nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction des ensembles de nombres usuels, [et] en particulier celle de $\mathbb{R}$, est hors programme.
[Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.] [Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.]	

PARTIE 1.4 : APPLICATIONS [ET RELATIONS]

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Images directe et réciproque.	Notations $f(A)$ et $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.
[Relation binaire sur un ensemble.]	
[Relation d'équivalence, classes d'équivalence.]	[La notion d'ensemble quotient est hors programme. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent. Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b\ [c]$.]
[Relation d'ordre. Ordre partiel, total.]	

CHAPITRE 2
CALCUL ET TRIGONOMÉTRIE

Cette section "boîte à outils" complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- *calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme ;*
- *résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot ;*
- *manipulation d'inégalités et résolution d'inéquations ;*
- *utilisation du cercle trigonométrique, manipulation des lignes et fonctions trigonométriques.*

PARTIE 2.1 : SOMMES ET PRODUITS

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes. Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.
Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	

PARTIE 2.2 : SYSTÈMES LINÉAIRES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$.
Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

PARTIE 2.3 : INÉGALITÉS

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations.

	et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a \rvert \leqslant b$.
Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.

PARTIE 2.4 : TRIGONOMÉTRIE

Contenus	Capacités & Commentaires
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\pi/2 \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\lvert \sin(x) \rvert \leqslant \lvert x \rvert$.	
Fonction tangente.	Notation $\tan$. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	[Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$.]

CHAPITRE 3 COMPLEXES

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- *l'étude algébrique (de l'ensemble) [du corps] $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*
- *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

PARTIE 3.1 : NOMBRES COMPLEXES

Contenus	Capacités & Commentaires
Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Opérations sur les nombres complexes.	
Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct - plan complexe -.

PARTIE 3.2 : CONJUGAISON ET MODULE

Contenus	Capacités & Commentaires
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	Image du conjugué dans le plan complexe.
Module.	Interprétation géométrique de $\lvert z - z' \rvert$, cercles et disques.
Relation $\lvert z \rvert^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	

PARTIE 3.3 : TRIGONOMÉTRIE

Contenus	Capacités & Commentaires
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1.	Notation $\mathbb{U}$.
Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.	
Exponentielle d'une somme.	
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Formule de MOIVRE.	Linéarisation, calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kt)$. Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

PARTIE 3.4 : FORME TRIGONOMÉTRIQUE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \varphi)$.	

PARTIE 3.5 : ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

PARTIE 3.6 : RACINES DE L'UNITÉ

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

PARTIE 3.7 : EXPONENTIELLE COMPLEXE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. [Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.]	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.

PARTIE 3.8 : GÉOMÉTRIE DES COMPLEXES

Contenus	Capacités & Commentaires
Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications ($z \mapsto az$ et $z \mapsto z+b$) [$z \mapsto az+b$] pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.	(Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations.) [Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.]
Interprétation géométrique de la conjugaison.	L'étude générale des similitudes est hors programme.

CHAPITRE 4
FONCTION DE LA VARIABLE RÉELLE

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;*
- *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;*
- *le calcul de dérivées et de primitives ;*
- *la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;*
- *l'application des deux points précédents aux équations différentielles.*

Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

PARTIE 4.1 : GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Contenus	Capacités & Commentaires
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.

PARTIE 4.2 : DÉRIVATION

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{d}{dx}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi	Résultats admis à ce stade.

les fonctions dérivables sur un intervalle. Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe. Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque. Fonction de classe C^1. Dérivées d'ordre supérieur.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités. La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

PARTIE 4.3 : FONCTIONS USUELLES

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. Inégalités $\exp(x) \geqslant 1 + x$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin , Arccos , Arctan .	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch [,th].	Dérivée, variations, représentation graphique. (La fonction tangente hyperbolique et) les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

PARTIE 4.4 : DÉRIVÉE DES FONCTIONS COMPLEXES

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire. Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

PARTIE 4.5 : CALCUL DE PRIMITIVES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\,dt$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales. Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$. Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

PARTIE 4.6 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 1

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de CAUCHY.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.

PARTIE 4.7 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 2

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équation différentielle linéaire du second ordre à	Équation homogène associée.

coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de CAUCHY.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

CHAPITRE 5
NOMBRES RÉELS ET SUITES NUMÉRIQUES

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles(, notamment les suites définies par une relation de récurrence.) [On insiste sur le caractère fondamental de la propriété de la borne supérieure.]

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

PARTIE 5.1 : PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE

Contenus	Capacités & Commentaires
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous a, $b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\mathrm{Sup}(X)$, $\mathrm{Inf}(X)$. On convient que $\mathrm{Sup}\, X = +\infty$ si X est non majorée.

PARTIE 5.2 : GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES RÉELLES

Contenus	Capacités & Commentaires
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

PARTIE 5.3 : LIMITE D'UN SUITE RÉELLE

Contenus	Capacités & Commentaires
Limite finie ou infinie d'une suite.	Les définitions sont écrites avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim(u_n)$.
Suite convergente, divergente.	
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir	

d'un certain rang.	
Existence d'une limite finie (resp. $+\infty$, $-\infty$) par encadrement (resp. minoration, majoration.	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell \rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.

PARTIE 5.4 : SUITES MONOTONES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de la limite monotone.	
Théorème des suites adjacentes.	
(Approximations décimales d'un réel.)	(Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.)

PARTIE 5.5 : SUITES EXTRAITES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Suite extraite.	(Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.)
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. (Le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS est hors programme.)
[Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.]	[Principe de démonstration par dichotomie.]

PARTIE 5.6 : TRADUCTION SÉQUENTIELLE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
[Partie dense de $\mathbb{R}$.] [Caractérisation séquentielle de la densité.]	[Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.] [Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.]
[Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\mathrm{Sup}(X)$ (resp. $+\infty$).]	[Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).]

PARTIE 5.7 : SUITES COMPLEXES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de

[Théorème de Bolzano-Weierstrass.]	parties réelle et imaginaire.

PARTIE 5.8 : SUITES PARTICULIÈRES

Contenus	Capacités & Commentaires
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f

CHAPITRE 6
CONTINUITÉ ET DERIVABILITÉ

Dans cette section, on démontre les théorèmes de base relatifs aux fonctions réelles de variable réelle [et on développe l'étude des fonctions convexes amorcée en terminale]. Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I *de* $\mathbb{R}$ *non vide et non réduit à un point et, sauf dans deux parties, sont à valeurs réelles. On dit qu'une propriété portant sur une fonction* f *définie sur* I *est vraie au voisinage de* a *si elle est vraie sur l'intersection de* I *avec un intervalle ouvert centré en* a *si* a *est réel, avec un intervalle* $]A;+\infty[$ *si* $a=+\infty$*, avec un intervalle* $]-\infty,A[$ *si* $a=-\infty$.

L'étude des suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$ *est l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence. Sur des exemples, on met en évidence divers comportements (convergence lente, géométrique, quadratique) en explicitant le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. On pourra en particulier présenter la méthode de* NEWTON. *De même, l'étude de la dérivabilité donne un prétexte pour présenter la notion de discrétisation, à travers la méthode d'*EULER.

Le paragraphe "Limite ponctuelle" consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

PARTIE 6.1 : LIMITE PONCTUELLE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Étant donné a fini ou infini [un point a de $\overline{\mathbb{R}}$] appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont écrites avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$).	
Théorème de la limite monotone.	

PARTIE 6.2 : CONTINUITÉ PONCTUELLE

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$
Continuité à gauche, à droite. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	

PARTIE 6.3 : CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue.	
Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Image d'un segment par une fonction continue.	
[Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.]	[La démonstration n'est pas exigible.]
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.

PARTIE 6.4 : FONTIONS COMPLEXES

Contenus	Capacités & Commentaires
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

PARTIE 6.5 : NOMBRE DÉRIVÉ, FONCTION DÉRIVÉE

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivabilité en un point, nombre dérivé.	Définition par le taux d'accroissement.
La dérivabilité entraîne la continuité.	Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si

Dérivabilité à gauche, à droite.	et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.

PARTIE 6.6 : EXTREMUM LOCAL ET POINT CRITIQUE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.

PARTIE 6.7 : ROLLE ET ACCROISSEMENTS FINIS

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de ROLLE.	
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.

PARTIE 6.8 : FONCTIONS DE CLASSE C^k

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe C^k.	
Opérations sur les fonctions de classe C^k : combinaison linéaire, produit (formule de LEIBNIZ), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

PARTIE 6.9 : FONCTIONS CONVEXES

Contenus	Capacités & Commentaires
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0;1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.	Interprétation géométrique. (L'inégalité de Jensen et les développements généraux sur les barycentres sont hors programme.)
[Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1,\dots,x_n$ de I.] [Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.] [Caractérisation des fonctions convexes dérivables.]	[Tout développement général sur les barycentres est hors programme.]
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	Exemples d'inégalités de convexité.

PARTIE 6.10 : FONCTIONS COMPLEXES

Contenus	Capacités & Commentaires
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe C^1.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section "Intégration".

CHAPITRE 7
[ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS]

[L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences. L'approche préconisée reste élémentaire en ce qu'elle ne fait pas appel au langage des structures algébriques.]

PARTIE 7.1 : DIVISIBILITÉ

Contenus	Capacités & Commentaires
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.	[Caractérisation des couples d'entiers associés.]
Théorème de la division euclidienne.	

PARTIE 7.2 : [PGCD ET ALGORITHME D'EUCLIDE]

Contenus	Capacités & Commentaires
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Algorithme d'Euclide.	[L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$.] [$a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.] [Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb.]
[Extension au cas de deux entiers relatifs.]	
[Relation de Bézout.]	[Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.]
[PPCM.]	[Notation $a \vee b$.]

PARTIE 7.3 : [ENTIERS PREMIERS ENTRE EUX]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Couple d'entiers premiers entre eux.]	
[Théorème de Bézout.]	[Forme irréductible d'un rationnel.]
[Lemme de Gauss.]	
[Si a et b sont premiers entre eux et divisent n, alors ab divise n.]	
[Si a et b sont premiers à n, alors ab est premier à n.]	

[PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout.] [Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.]	

PARTIE 7.4 : [NOMBRES PREMIERS]

Contenus	Capacités & Commentaires
Nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	[Crible d'Ératosthène.]
[Pour p premier, valuation p-adique.]	[Notation $v_p(n)$.]
[Valuation p-adique d'un produit.]	[Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques.] [Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.]

PARTIE 7.5 : [CONGRUENCES]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$.]	[Notation $a \equiv b\ [n]$.]
[Opérations sur les congruences : somme, produit. [Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n.] [Petit théorème de Fermat.]	[Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme.]

CHAPITRE 8
[STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES]

[Cette section a pour but l'introduction des notions les plus élémentaires relatives aux groupes, anneaux, corps, afin de traiter de manière unifiée un certain nombre de situations.]

PARTIE 8.1 : [LOI DE COMPOSITION INTERNE]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Loi de composition interne.]	*[On évite l'étude de lois artificielles.]*
[Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.]	*[Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.]*
[Partie stable.]	

PARTIE 8.2 : [STRUCTURE DE GROUPE]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Groupe.]	*[Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif.]* *[Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.]*
[Groupe des permutations d'un ensemble.]	*[Notation S_X.]*
[Groupe produit.]	
[Sous-groupe : définition, caractérisation.]	
[Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.]	
[Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité.]	*[Notations $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$.]*
[Isomorphisme.]	

PARTIE 8.3 : [STRUCTURES D'ANNEAU ET DE CORPS]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Anneau.]	*[Tout anneau est unitaire.]* *[Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.]*
[Calcul dans un anneau.]	*[Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b*

	commutent.]
[Groupe des inversibles d'un anneau.]	
[Anneau intègre. Corps.]	*[Les corps sont commutatifs.]*
[Sous-anneau.]	
[Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.]	

CHAPITRE 9
CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES

Cette section a pour but de présenter une initiation au calcul matriciel, de préparer l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre et de revenir sur l'étude des systèmes linéaires [et d'obtenir des exemples fondamentaux d'anneaux].
Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

PARTIE 9.1 : OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

Contenus	Capacités & Commentaires
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	*Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.*
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	*Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.*
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	*Symbole de* Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	*Notation $A^\top$.*
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	

PARTIE 9.2 : OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Contenus	Capacités & Commentaires
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	

PARTIE 9.3 : SYSTÈMES LINÉAIRES

Contenus	Capacités & Commentaires
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire.	
Système homogène associé.	
Système compatible.	*Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.*

Les solutions du système compatible $AX = B$ *sont les* $X_0 + Y$*, où* X_0 *est une solution particulière et où* Y *parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.*	*On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.*

PARTIE 9.4 : (ENSEMBLE) [ANNEAU] DES MATRICES CARRÉES

Contenus	Capacités & Commentaires
(Ensemble) [Anneau] $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	*Non commutativité si* $n \geqslant 2$. *Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.*
Matrice identité, matrice scalaire.	*Notation* I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	*Notations* $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	*Application au calcul de puissances.*
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	*Notation* $GL_n(\mathbb{K})$. *(On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.)*
Inverse d'une transposée.	
(Inverse d'un produit de matrices inversibles.)	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	*Toute technicité est exclue.*
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire matrice inversible est triangulaire.	*Cas particulier des matrices diagonales.*

CHAPITRE 10
POLYNÔMES

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes [et fractions rationnelles] (et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques).

[Il s'agit d'objets particulièrement riches, dont l'étude interagit avec beaucoup de thèmes abordés pendant le semestre. Par exemple :

- *l'étude des équations algébriques enrichit le calcul algébrique et suggère des problèmes de localisation des racines, mettant en jeu des techniques analytiques dans le cas réel, plus géométriques dans le cas complexe ;*
- *l'interpolation de* LAGRANGE *permet de reconstituer un polynôme en fonction de ses valeurs en suffisamment de points et donne lieu à des problèmes issus de la théorie de l'approximation (majoration de l'erreur d'interpolation).]*

(On présente la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles, uniquement dans des situations simples. L'objectif est de présenter aux étudiants un outil qui leur permette de mener à bien des calculs d'intégration, de dérivation, de somme, etc.)

[L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$, ce qui autorise un exposé allégé.]

Le programme se limite aux polynômes [et fractions rationnelles] à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

PARTIE 10.1 : (ENSEMBLE) [ANNEAU] DES POLYNÔMES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
(Ensemble) [Anneau] $\mathbb{K}[X]$.	*La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.*
(Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme.)	
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	*Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.*
Degré d'une somme, d'un produit.	*(Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.) [L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.]*
Composition.	

PARTIE 10.2 : DIVISIBILITÉ

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples.	
[Caractérisation des couples de polynômes associés.]	
Théorème de la division euclidienne.	*Algorithme de la division euclidienne.*

PARTIE 10.3 : FONCTIONS POLYNOMIALES

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	*Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section "Nombres complexes".*
	Méthode de Horner *pour l'évaluation polynomiale.*
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	*Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.*
Multiplicité d'une racine.	
Polynôme scindé. [Relations entre coefficients et racines (formules de Viète*).]*	*[Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement.]*
(Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.)	*(Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.)*

PARTIE 10.4 : DÉRIVATION

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivée formelle d'un polynôme.	*Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.*
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz*.*	
Formule de Taylor *polynomiale.*	
Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	

PARTIE 10.5 : [ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES]

Contenus	Capacités & Commentaires
[PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.]	*[Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B.]*
*[Algorithme d'*Euclide*.]*	*[L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}$.]*
[Relation de Bézout*.]*	*[Détermination d'un couple de* Bézout *par l'algorithme d'*Euclide *étendu.]*

[PPCM]. *[Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de* BÉZOUT. *Lemme de* GAUSS.*]* *[PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de* BÉZOUT. *Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.]*	*[Notation $A \vee B$.]* *[Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.]*

PARTIE 10.6 : POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
*Théorème de d'*ALEMBERT-GAUSS.	*La démonstration est hors programme.*
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	*Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.* *[Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.]* *Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.*
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	*Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de$\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.*

PARTIE 10.7 : [INTERPOLATION DE LAGRANGE]

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
[Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.]	*[Expression de P.]* *[Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i.]*

PARTIE 10.8 : FRACTIONS RATIONNELLES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
[Corps $\mathbb{K}(X)$.]	*[La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.]*
[Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.]	
[Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.]	
(Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.)	*(La démonstration est hors programme.)* *(Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.)*

[Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.] *[Si λ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$.]* *[Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.]*	*[La démonstration est hors programme.]* *[Toute technicité dans les exemples est exclue.]* *Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.*

CHAPITRE 11 ANALYSE ASYMPTOTIQUE

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

PARTIE 11.1 : RELATIONS DE COMPARAISON

Contenus	Capacités & Commentaires
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de ($\mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$) [de $\overline{\mathbb{R}}$].	*Notations* $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$
Lien entre ces relations.	*La relation* $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ *est définie à partir du quotient* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *sous l'hypothèse que la fonction* g *ne s'annule pas localement.* *Pour la relation* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$*, on donne les deux formes* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ *et* $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$*, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs.* *Pour mener une étude locale de* f *au voisinage de* $a \neq 0$*, on étudie* $f(a+h)$ *pour* $h \to 0$*.* *Traduction à l'aide du symbole* o *des croissances comparées de* $\ln^{\beta}(x)$*,* x^{α}*,* $e^{\gamma x}$ *en* $+\infty$*, de* $\ln^{\beta}(x)$*,* x^{α} *en* 0*.*
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o *et* O*.* *Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles* f*,* g*,* h *vérifient* $f \leqslant g \leqslant h$ *et si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$*, alors* $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$*.* *Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.*	

PARTIE 11.2 : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Contenus	Capacités & Commentaires
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	*Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0.* *Signe de f au voisinage de a.*
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. *Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.*	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	*On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement.* *Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.*
Primitivation d'un développement limité. *Formule de* Taylor-Young *: pour f de classe C^n, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.* *Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$, $\sin$, $\cos$, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan.* *Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$.*	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	*Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.*
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	

PARTIE 11.3 : RELATIONS DE COMPARAISON/SUITES

Contenus	Capacités & Commentaires
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	*Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.*

PARTIE 11.4 : ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Contenus	Capacités & Commentaires
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques,	*La notion d'échelle de comparaison est hors programme.*

équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	
[Formule de STIRLING. *Traduction comme développement asymptotique de* $\ln(n!)$.*]*	*[La démonstration n'est pas exigible.]*

CHAPITRE 12
ESPACES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*
- *reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires.*
- *[présenter quelques notions de géométrie affine, afin d'interpréter géométriquement certaines situations.]*

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général : on en tirera parti par de nombreuses figures.

$\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.*

PARTIE 12.1 : ESPACES VECTORIELS

Contenus	Capacités & Commentaires
Structure de $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*	*Espaces* $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	*Espace* $\mathbb{K}^\Omega$, *cas particulier* $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
(Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.)	
[Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.]	*[On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.]*

PARTIE 12.2 : SOUS-ESPACES VECTORIELS

Contenus	Capacités & Commentaires
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	*Sous-espace nul. Droite vectorielle.* *Plan vectoriel de* $\mathbb{R}^3$. *Sous-espace* $\mathbb{K}_n[X]$ *de* $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	*[Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.]*
Sous-espace vectoriel engendré par (une famille finie de vecteurs.) [par une partie A*.]*	*Notation [*$\mathrm{Vect}(A)$*,]* $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. *Tout sous-espace vectoriel contenant [*A*] les* x_i *contient [*$\mathrm{Vect}(A)$*]* $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.

PARTIE 12.3 : FAMILLES (FINIES) DE VECTEURS

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Famille [partie] génératrice.	
Famille [partie] libre, liée.	*Ajout d'un vecteur à une famille [partie] libre.* *Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.*
Base, coordonnées.	*Bases canoniques de* $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ *[,* $\mathbb{K}[X]$*]. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans [*$\mathbb{K}[X]$ *et]* $\mathbb{K}_n[X]$.

PARTIE 12.4 : SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. *Caractérisation par l'intersection.*	*La somme* $F+G$ *est directe si la décomposition de tout vecteur de* $F+G$ *comme somme d'un élément de* F *et d'un élément de* G *est unique.*
Sous-espaces supplémentaires.	*On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension* 2 *et* 3.

PARTIE 12.5 : EXISTENCE DE BASES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *engendre* E *et si* $(x_i)_{i\in I}$ *est libre pour une certaine partie* I *de* $\{1,\dots,n\}$*, alors il existe une partie* J *de* $\{1,\dots,n\}$ *contenant* I *pour laquelle* $(x_j)_{j\in J}$ *est une base de* E.	*Existence de bases en dimension finie.* *Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).*

PARTIE 12.6 : DIMENSION D'UN ESPACE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dans un espace engendré par n *vecteurs, toute famille de* $n+1$ *vecteurs est liée.*	
Dimension d'un espace de dimension finie.	*Dimension de* $\mathbb{K}^n$*, de* $\mathbb{K}_n[X]$*, de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre* 1*, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire*

	homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
[Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.]	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	*Notation $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n)$.*

PARTIE 12.7 : SOUS-ESPACES ET DIMENSION

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de GRASSMANN.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

PARTIE 12.8 : LINÉARITÉ

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	*Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F.* *Bilinéarité de la composition.*
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	*(Notation $\mathrm{Im}\, u$.)*
Noyau d'une application linéaire.	*(Notation $\mathrm{Ker}\, u$.) Caractérisation de l'injectivité.*
Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\,(u(x_i))_{i \in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	*Notation $\mathrm{rg}(u)$.*
Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\mathrm{Min}(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.	

Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

PARTIE 12.9 : ENDOMORPHISMES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Identité, homothéties. *(Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.)* *[Anneau* $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$*.]*	*Notations* id_E, id. *Notation* u^k *pour* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *[Non commutativité si* $\dim E \geqslant 2$*.]* *[Notation* vu *pour la composée* $v \circ u$*.]*
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, *par* $s^2 = \mathrm{id}$.	*On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension* 2 *et* 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	*Notation* $\mathrm{GL}(E)$. *(On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.)* *Notation* u^k *pour* $u \in \mathrm{GL}(E)$ *et* $k \in \mathbb{Z}$.

PARTIE 12.10 : DÉTERMINATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si $(e_i)_{i\in I}$ *est une base de* E *(de dimension finie) et* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs de* F, *alors il existe une unique application* $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *telle que, pour tout* $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	*Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de* u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ *si* E *et* F *sont de dimension finie.*	*(La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*.)*
Si E_1 *et* E_2 *sont des sous-espaces de* E *tels que* $E = E_1 \oplus E_2$, *si* $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, *il existe une unique application* $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *coïncidant avec* u_1 *sur* E_1 *et avec* u_2 *sur* E_2.	

PARTIE 12.11 : THÉORÈME DU RANG

Contenus	Capacités & Commentaires
Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *et si* S *est un supplémentaire de* $\operatorname{Ker} u$ *dans* E*, alors* u *induit un isomorphisme de* S *sur* $\operatorname{Im} u$*.* *Théorème du rang : si* E *est de dimension finie* n *et* $u \in \mathcal{L}(E, F)$*, alors* $n = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$*.*	

PARTIE 12.12 : FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

Contenus	Capacités & Commentaires
Forme linéaire. *Hyperplan[, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.].*	*[Formes coordonnées relativement à une base.]* *(Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.)* *Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.*
Si H *est un hyperplan de* E *et* D *une droite non contenue dans* H*, alors* $E = H \oplus D$*.*	
[Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.]	*[En dimension* n*, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension* $n-1$*.]*
[Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.]	
[Si E *est un espace de dimension finie* n*, l'intersection de* m *hyperplans est de dimension au moins* $n-m$*.* *Réciproquement, tout sous-espace de* E *de dimension* $n-m$ *est l'intersection de* m *hyperplans.]*	*[Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de* $\mathbb{R}^2$*, des droites et plans vectoriels de* $\mathbb{R}^3$*.]* *[L'étude de la dualité est hors programme.]*

PARTIE 12.13 : (ÉQUATIONS LINÉAIRES) [SOUS-ESPACES AFFINES]

[Le but de cette partie, qu'il convient d'illustrer par de nombreuses figures, est double :

- *montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.*
- *modéliser un problème affine par une équation* $u(x) = a$ *où* u *est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.]*

Contenus	Capacités & Commentaires
[Présentation informelle de la structure affine d'un espace	*[L'écriture* $B = A + \overrightarrow{u}$ *est équivalente à la*

vectoriel : points et vecteurs. Translation.]	*relation* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$*.]*
[Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction.]	*[Sous-espaces affines de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$*.]*
[Hyperplan affine.]	
[Intersection de sous-espaces affines.]	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ *où* $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $a \in F$. *L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit (de la forme* $x_0 + \operatorname{Ker} u$*) [un sous-espace affine dirigé par* $\operatorname{Ker} u$*.]*	*Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques[, la recherche de polynômes interpolateurs].*

CHAPITRE 13 MATRICES ET DÉTERMINANTS

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres - géométrique, numérique, formel - ;*
- *étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire (et d'un vecteur) [et la relation d'équivalence qui s'en déduit sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$] ;*
- *[introduire brièvement la relation de similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;]*
- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des endomorphismes et des matrices carrées, et indiquer quelques méthodes simples de calcul.*
- *[le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.]*

PARTIE 13.1 : MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE DANS DES BASES

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	*(Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.)* *[Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.]*
Isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases. *[Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.]* *Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.*	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	*Cas particulier des endomorphismes.* *(Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.)*

PARTIE 13.2 : APPLICATION CANONIQUEMENT ASSOCIÉE(, RANG D'UNE MATRICE)

Contenus	Capacités & Commentaires
Application linéaire canoniquement associée à une	*On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.*

matrice.	
Noyau, image et rang d'une matrice.	*Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.*
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	*Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.* *Lien entre les diverses notions de rang.*
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	*Application : calcul du rang.*
(Invariance du rang par transposition.)	*(Ce résultat est admis.)*

PARTIE 13.3 : CHANGEMENTS DE BASES[, ÉQUIVALENCE ET SIMILITUDE]

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	*Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.*
Matrices semblables.	*[Interprétation géométrique.]* *Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.*
[Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r, il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.]	*[La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.]*
[Matrices équivalentes.]	
[Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.]	*[Classification des matrices équivalentes par le rang.]*
[Invariance du rang par transposition.]	
[Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.]	

PARTIE 13.4 : [SIMILITUDE ET TRACE]

Contenus	Capacités & Commentaires
Trace d'une matrice carrée.	*Notation* $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, *invariance par similitude.*	
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	*Notation* $\mathrm{tr}(u)$.
Linéarité, relation $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$..	*Trace d'un projecteur.*

PARTIE 13.5 : SYSTÈMES LINÉAIRES

Contenus	Capacités & Commentaires
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ *est compatible si et seulement si* B *appartient à l'image de* A.	*[Structure affine de l'ensemble des solutions.]*
Si A *est carrée et inversible, le système* $AX = B$ *possède une unique solution.*	*Dans ce cas, le système est dit de* Cramer.

PARTIE 13.6 : [GROUPE SYMÉTRIQUE]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.*]*	*[Notation* S_n.*]*
[Cycle, transposition.]	*[Notation* $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$.*]*
[Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.]	*[La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.]*
[Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.]	
[Signature : il existe un unique morphisme de groupes de S_n *dans* $\{-1, 1\}$ *envoyant toute transposition sur* -1.*]*	*[La démonstration n'est pas exigible.]*

PARTIE 13.7 : [FORMES n-LINÉAIRES ALTERNÉES]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Forme n*-linéaire alternée sur un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n.*]*	*[La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.]*

[Antisymétrie, effet d'une permutation.]	*[Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.]*

PARTIE 13.8 : DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

Contenus	Capacités & Commentaires
(Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et si e est une base de E, il existe une unique application $\mathrm{det}_e : E^n \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque variable, alternée, et vérifiant $\mathrm{det}_e(e) = 1$.) *(Si $f : E^n \to \mathbb{K}$ est linéaire par rapport à chaque variable, alternée, alors elle est un multiple de det_e.)*	*(La démonstration de ce théorème et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme.)*
[Si e est une base, il existe une unique forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$; toute forme n-linéaire alternée est un multiple de det_e.]	*[Notation det_e.]* *[La démonstration de l'existence n'est pas exigible.]*
(En dimension 2 et 3, expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.) *[Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.]* *Comparaison, si e et e' sont deux bases, de det_e et $\mathrm{det}_{e'}$.* *La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si et seulement si* $\mathrm{det}_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.	*Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).*

PARTIE 13.9 : DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

Contenus	Capacités & Commentaires
Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	*Caractérisation des automorphismes.*

PARTIE 13.10 : DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Contenus	Capacités & Commentaires
Déterminant d'une matrice carrée.	*Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.*
Déterminant d'un produit.	*Relation* $\mathrm{det}(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{det}(A)$.

Caractérisation des matrices inversibles. [L'application det *induit un morphisme de* $\mathsf{GL}(E)$ *(resp.* $\mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$*) sur* $\mathbb{K}^*$*.]*	
(Déterminant de l'inverse.)	
Déterminant d'une transposée.	*(La démonstration est hors programme.)* *[Caractère* n*-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.]*

PARTIE 13.11 : CALCUL DES DÉTERMINANTS

Contenus	Capacités & Commentaires
Effet des opérations élémentaires.	
[Cofacteur.] Développement par rapport à une ligne ou une colonne.	*(La démonstration n'est pas exigible.)* *(La comatrice est hors programme.)*
Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Déterminant de Vandermonde*.]*	*[Lien avec les polynômes de* Lagrange*.]*

PARTIE 13.12 : [COMATRICE]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Comatrice.]	*[Notation* $\mathsf{Com}(A)$*.]*
[Relation $A\,\mathsf{Com}(A)^\top = \mathsf{Com}(A)^\top A = \mathsf{det}(A)I_n$*.]*	*[Expression de l'inverse d'une matrice inversible.]*

CHAPITRE 14
INTÉGRATION

(Cette section a pour objectif d'établir les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de manière à achever la justification des propriétés présentées dans la section "Techniques fondamentales de calcul en analyse".) [Cette section a pour principal objectif de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment et d'en établir les propriétés principales.] Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

(La construction de l'intégrale n'est pas un attendu du programme, mais les étudiants doivent avoir été sensibilisés à cette problématique.)

[La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues n'est pas un attendu du programme.]

[Le corps $\mathbb{K}$ est pris égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le professeur peut soit se placer d'emblée dans le cadre des fonctions à valeurs complexes, soit traiter en premier lieu le cas réel avant de procéder à une brève extension.]

PARTIE 14.1 : (FONCTIONS EN ESCALIER)

Contenus	Capacités & Commentaires
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. *(Fonction en escalier.)* *(Intégrale d'une fonction en escalier.)*	*Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans ($\mathbb{R}$).*

PARTIE 14.2 : [CONTINUITÉ UNIFORME]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Continuité uniforme.]	*[Exemple des fonctions lipschitziennes.]*
[Théorème de Heine.]	*[La démonstration n'est pas exigible.]*

PARTIE 14.3 : [FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX]

Contenus	Capacités & Commentaires
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. *Fonction en escalier, [fonction continue par morceaux.]*	*Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans [$\mathbb{K}$].* *[Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau*

	de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$*.]*

PARTIE 14.4 : INTÉGRALE DE FONCTIONS CONTINUES [PAR MORCEAUX] SUR UN SEGMENT

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégrale d'une fonction continue [par morceaux] sur un segment à valeurs dans ($\mathbb{R}$*) [*$\mathbb{K}$*].*	*[Le programme n'impose pas de construction particulière.]* *Interprétation géométrique de l'intégrale.* *Notations* $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)dt$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. *Inégalité triangulaire intégrale :* $\left\lvert \int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f \rvert$.	
Relation de Chasles.	*Extension de la notation* $\int_a^b f(t)dt$ *au cas où* $b \leqslant a$*.* *Propriétés correspondantes.*
Si f *est continue, à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$ *et si* $\int_{[a,b]} f = 0$, *alors* $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0*. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.*	*Valeur moyenne d'une fonction continue [par morceaux] sur un segment.*

PARTIE 14.5 : SOMMES DE RIEMANN

Contenus	Capacités & Commentaires
Pour f *continue [par morceaux] sur le segment* $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt \quad .$$	*Interprétation géométrique.* *La démonstration (pourra être proposée) [est exigible] dans le cas où* f *est lipschitzienne.*

PARTIE 14.6 : LIEN ENTRE INTÉGRALE ET PRIMITIVE

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *pour* f *continue.* *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*	

PARTIE 14.7 : (INÉGALITÉ) [FORMULES] DE TAYLOR(-LAGRANGE) [GLOBALES]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Formule de Taylor avec reste intégral.] *Inégalité de* Taylor-Lagrange.	*(La formule de* Taylor *avec reste intégral n'est pas exigible.)* *L'égalité de* Taylor-Lagrange *est hors programme.* *On souligne la différence de nature entre la formule de* Taylor-Young *(locale) et (l'inégalité de* Taylor-Lagrange*) [les formules] (globale[s]).*

PARTIE 14.8 : (EXTENSION AUX COMPLEXES)

Contenus	Capacités & Commentaires
(Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$.) *(Linéarité, majoration du module de l'intégrale.)* *(Inégalité de* Taylor-Lagrange.*)*	*(Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.)*

CHAPITRE 15 DÉNOMBREMENT

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés de la partie 1, les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

PARTIE 15.1 : CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI

Contenus	Capacités & Commentaires
Cardinal d'un ensemble fini.	*Notations* $\|A\|$, $\operatorname{card}(A)$. *Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.*
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. *Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.*	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	*La formule du crible est hors programme.*
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. *Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.*	

PARTIE 15.2 : LISTES ET COMBINAISONS

Contenus	Capacités & Commentaires
Nombre de p*-listes (ou* p*-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal* n*, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal* n*.*	*Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal* p *dans un ensemble de cardinal* n*.*
Nombre de parties à p *éléments (ou* p*-combinaisons) d'un ensemble de cardinal* n*.*	*Démonstration combinatoire des formules de* Pascal *et du binôme.*

CHAPITRE 16 PROBABILITÉS

Cette section, qui a vocation à interagir avec l'ensemble du programme, a pour objectif de donner aux étudiants une bonne pratique des variables aléatoires dans le cadre fini.

Pour enrichir la pratique de la modélisation probabiliste développée au lycée, on met en évidence qu'une situation probabiliste finie peut être décrite par un n-uplet de variables aléatoires, l'univers étant vu dans cette optique comme une source suffisante d'aléa. L'objectif de cette présentation est de pouvoir travailler le plus tôt possible avec des événements construits en termes de variables aléatoires. La construction d'un univers fini susceptible de porter un n-uplet de variables aléatoires peut être présentée, mais ne constitue pas un objectif du programme.

Les exemples et activités proposés sont de nature plus conceptuelle qu'au lycée. On pourra faire travailler les étudiants sur des marches aléatoires ou des chaînes de Markov *en temps fini, des graphes aléatoires, des inégalités de concentration.*

Le programme de probabilités de première année s'achève sur une approche non asymptotique de la loi faible des grands nombres qui justifie l'approche fréquentiste des probabilités.

PARTIE 16.1 : UNIVERS, ÉVÉNEMENTS, VARIABLES ALÉATOIRES

Contenus	Capacités & Commentaires
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	*On se limite au cas d'un univers fini.* *Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).*
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	*Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.*

PARTIE 16.2 : ESPACES PROBABILISÉS FINIS

Contenus	Capacités & Commentaires
Probabilité sur un univers fini.	*Espace probabilisé fini (Ω, P).* *Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.*
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.	*Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$.*
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	*La formule du crible est hors programme.*

PARTIE 16.3 : PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si $P(B) > 0$, *la probabilité conditionnelle de* A *sachant* B *est définie par la relation* $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. *L'application* P_B *est une probabilité.* *Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de* BAYES.	*Par convention,* $P(A\|B)P(B) = 0$ *lorsque* $P(B) = 0$.

PARTIE 16.4 : LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Loi P_X *d'une variable aléatoire* X *à valeurs dans* E.	*La probabilité* P_X *est déterminée par la distribution de probabilités* $(P(X = x))_{x \in E}$. *On note* $X \sim Y$ *la relation* $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	*Si* $X \sim Y$ *alors* $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	*Notation* $X \sim \mathcal{U}(E)$.
Variable de BERNOULLI *de paramètre* $p \in [0, 1]$.	*Notation* $X \sim \mathcal{B}(p)$. *Interprétation comme succès d'une expérience.*
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [0, 1]$.	*Notation* $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X *sachant un événement* A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	*Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.* *Notation* $P(X = x, Y = y)$. *Extension aux* n*-uplets de variables aléatoires.*

PARTIE 16.5 : ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Les événements A *et* B *sont indépendants si* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	*Si* $P(B) > 0$, *l'indépendance de* A *et* B *s'écrit* $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	*L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.*
Si A *et* B *sont indépendants,* A *et* $\overline{B}$ *le sont aussi.*	*Extension au cas de* n *événements.*

PARTIE 16.6 : VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	*Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $P\big((X,Y) = (x,y)\big) = P(X = x)P(Y = y)$.*
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	*Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.*
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.	*Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.*
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	*La démonstration est hors programme.* *Extension au cas de plus de deux coalitions.*

PARTIE 16.7 : ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Espérance $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ d'une variable aléatoire X.	*L'espérance est un indicateur de position.* *Formule $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.* *Variable aléatoire centrée.*
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	
Espérance d'une variable constante, de BERNOULLI, *binomiale.*	*Exemple : $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.*
Formule de transfert : $E\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.	*On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.*
Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.	*Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.*

PARTIE 16.8 : VARIANCE, ÉCART TYPE ET COVARIANCE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	*Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.*
Relation $V(aX+b) = a^2V(X)$.	*Si* $\sigma(X) > 0$, *la variable* $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ *est centrée réduite.*
Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.	
Variance d'une variable de BERNOULLI, *d'une variable binomiale.*	
Covariance de deux variables aléatoires.	*Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.*
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, *cas de deux variables indépendantes.*	
Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	*On retrouve la variance d'une variable binomiale.*

PARTIE 16.9 : INÉGALITÉS PROBABILISTES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Inégalité de MARKOV.	*Application à l'obtention d'inégalités de concentration.*
Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.	*Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.*

CHAPITRE 17 ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

PARTIE 17.1 : PRODUIT SCALAIRE

Contenus	Capacités & Commentaires
Produit scalaire.	*Notations* $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ *[, sur* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*].*	*Expression* $X^\top Y$ *[,* $\mathrm{tr}(A^\mathsf{T}B)$*].*
Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ *sur* $C\big([a, b], \mathbb{R}\big)$.	*Exemples de produits scalaires intégraux sur* $\mathbb{R}[X]$ *et* $C\big([a, b], \mathbb{R}\big)$.

PARTIE 17.2 : NORME ASSOCIÉE

Contenus	Capacités & Commentaires
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz*, cas d'égalité.*	*Exemples : sommes finies, intégrales.*
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\|\|x + y\|\|^2 = \|\|x\|\|^2 + \|\|y\|\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.	*Formule de polarisation associée.*

PARTIE 17.3 : ORTHOGONALITÉ

Contenus	Capacités & Commentaires
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	*Notation* $X^\perp$. *L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.*
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale).	
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.	
Théorème de Pythagore.	
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	

PARTIE 17.4 : BASES ORTHONORMÉES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	

PARTIE 17.5 : PROJECTION ORTHOGONALE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F *de dimension finie. Projection orthogonale sur* F.	*En dimension finie : dimension de* $\mathsf{F}^\perp$, *vecteur normal à un hyperplan.*
Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x *dans une base orthonormée de* F.	
Distance d'un vecteur à F.	*Notation* $\mathsf{d}(x, \mathsf{F})$.
Le projeté orthogonal de x *sur* F *est l'unique élément de* F *qui réalise la distance de* x *à* F.	*[En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan* $\mathsf{Vect}(u)^\perp$ *; distance de* x *à* $\mathsf{Vect}(u)^\perp$*.]*

CHAPITRE 18
(SÉRIES NUMÉRIQUES)
[PROCÉDÉS SOMMATOIRES DISCRETS]

Cette section a pour but de prolonger l'étude des suites et de permettre d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique pour étudier les séries numériques. [Les objectifs majeurs en la matière portent sur les séries à termes positifs et la convergence absolue. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.]

(La notion de suite sommable est introduite mais n'appelle aucun développement théorique.)

[L'étude des familles sommables est menée dans un deuxième temps. On prolonge les calculs de sommes finies effectués en début d'année, en mettant en évidence un cadre permettant de sommer "en vrac" une famille infinie et procurant ainsi un grand confort de calcul. Dans le cas d'une famille positive, le calcul dans $[0, +\infty]$ se suffit à lui-même et contient l'étude de la sommabilité. Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer par un calcul formel à justifier dans un second temps.]

[On se concentre sur la pratique, qui jouera un rôle important en deuxième année.]

PARTIE 18.1 : CONVERGENCE ET DIVERGENCE

Contenus	Capacités & Commentaires
Sommes partielles d'une série numérique.	*La série est notée* $\sum u_n$.
Convergence, divergence, somme.	*En cas de convergence, sa somme est notée* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	*Divergence grossière.*
Reste d'une série convergente.	
Lien suite-série.	*La suite* (u_n) *et la série télescopique* $\sum(u_{n+1} - u_n)$ *sont de même nature.*
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ *pour* $z \in \mathbb{C}$.	

PARTIE 18.2 : SÉRIES À TERMES POSITIFS

Contenus	Capacités & Commentaires
Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.	*On note* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ *si la série* $\sum u_n$ *d'éléments de* $\mathbb{R}_+$ *diverge.*
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	

Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.* *Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.* *Séries de* Riemann.	 *Application à l'étude de sommes partielles.*

PARTIE 18.3 : ABSOLUE CONVERGENCE (SUITES SOMMABLES)

Contenus	Capacités & Commentaires
Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$(, encore appelée sommabilité de la suite (u_n)).	*Notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n\rvert < +\infty$.* *Le critère de* Cauchy *(et la notion de semi-convergence sont hors programme).*
Une série numérique absolument convergente est convergente. *Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.*	*(Somme d'une suite sommable.)*

PARTIE 18.4 : [SÉRIES ALTERNÉES]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.]	*[Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.]*

PARTIE 18.5 : [FAMILLES SOMMABLES DE NOMBRES RÉELS POSITIFS]

Contenus	Capacités & Commentaires
[Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.] *[Borne supérieure dans $[0, +\infty]$.]*	
[Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum\limits_{i\in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble	*[La somme est notée $\sum\limits_{i\in I} u_i$.]* *[Cas où I est fini, où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries).]* *[On note $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments*

des parties finies de I.*]*	*de* $\mathbb{R}_+$ *diverge.]*
	[Invariance de la somme par permutation.]
[La famille $(u_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* $\mathbb{R}_+$ *est dite sommable si* $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.*]*	*[On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.]*
[Opérations : somme, multiplication par un réel positif.]	
[Théorème de sommation par paquets : si I *est réunion disjointe des* I_j *pour* $j \in J$ *et si* $(u_i)_{i\in I}$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *alors* $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$.*]*	*[La démonstration est hors programme.]*
[Cas où I *est un produit : théorème de* FUBINI *positif.]*	

PARTIE 18.6 : [FAMILLES SOMMABLES DE NOMBRES COMPLEXES]

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
[La famille $(u_i)_{i\in I}$ *de* $\mathbb{C}^I$ *est dite sommable si* $\sum_{i\in I} \lvert u_i\rvert < +\infty$.*]*	*[Notation* $\ell^1(I)$.*]* *[Pour* $I = \mathbb{N}$, *lien avec les séries.]* *[Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.]*
[Somme d'une famille sommable de nombres complexes.]	*[Si* $(a_i)_{i\in I}$ *est sommable et si* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, *il existe une partie finie* F *de* I *telle que* $\left\lvert \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i \right\rvert \leqslant \varepsilon$.*]* *[Invariance de la somme par permutation.]*
[Soit $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de nombres complexes et soit* $(v_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout* $i \in I$, $\lvert u_i\rvert \leqslant v_i$. *Alors* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable.]*	
[Linéarité de la somme.]	
[Théorème de sommation par paquets : si I *est réunion disjointe des* I_j *pour* $j \in J$, *si* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable, alors* $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$.*]*	*[La démonstration est hors programme.]*
[Cas où I *est un produit : théorème de* FUBINI.*]*	
[Si $(a_i)_{i\in I}$ *et* $(b_{i'})_{i'\in I'}$ *sont sommables alors* $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ *est sommable et* $$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}.$$ *]*	*[Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.]*
[Produit de CAUCHY *de deux séries absolument convergentes.]*	*[On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de* $(\mathbb{C},+)$ *dans* $(\mathbb{C}^*,\times)$.*]*

CHAPITRE 19
FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la "règle de la chaîne", et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

PARTIE 19.1 : OUVERTS DE $\mathbb{R}^2$, FONCTIONS CONTINUES

Contenus	Capacités & Commentaires
Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique.	
Ouverts.	
Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	*Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface.*
	La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.

PARTIE 19.2 : DÉRIVEÉS PARTIELLES

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	*Notations $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.*
Fonction de classe C^1 sur un ouvert.	*Définition par la continuité des dérivées partielles.* *La notion de fonction différentiable est hors programme.*
Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe C^1: $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h,k)\|)$.	*Démonstration hors programme.* *On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation de $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0)$ comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.*
Gradient d'une fonction de classe C^1.	*Notation $\nabla f(x_0, y_0)$.*
Expression du développement limité à l'aide du gradient.	*Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.*

PARTIE 19.3 : DÉRIVÉES PARTIELLES ET COMPOSÉES

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivée selon un vecteur.	*Expression à l'aide du gradient* $\langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle$.
Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe C^1, *la fonction* $t \mapsto f(x(t), y(t))$ *est de classe* C^1 *et* $\frac{d}{dt}\Big(f\big(x(t), y(t)\big)\Big) =$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$.	*Interprétation comme dérivée de* f *le long d'un arc* γ *donné par* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *et expression à l'aide du gradient* $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$ *où* $\gamma'(t)$ *est défini par* $(x'(t), y'(t))$. *Le gradient de* f *est orthogonal aux lignes de niveau de* f.
Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.	

PARTIE 19.4 : EXTREMUMS

Contenus	Capacités & Commentaires
Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.	
Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe C^1 *sur un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *est un point critique.*	*Exemples d'étude de points critiques.*