

CHAPITRE 13

TOPOLOGIE ET CONTINUITÉ

PARTIE 13.1 : TOPOLOGIE DANS UN EVN

DÉFINITION 13.1 :

Soit E un espace vectoriel normé, U une partie de E et $a \in E$, on dit que :

- a est un **vecteur intérieur** à U si $\exists r > 0, B(a, r) \subset U$.
- U est un **ouvert** de E (ou que U une **partie ouverte** de E) si $\forall a \in U, \exists r > 0, B(a, r) \subset U$.

PROPOSITION 13.1 :

Soit E un espace vectoriel normé.

- Toute boule ouverte est une partie ouverte.
- Toute réunion (quelconque) de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E .
- Toute intersection finie de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E .

DÉFINITION 13.2 :

Soit E un espace vectoriel normé, F une partie de E et $a \in E$, on dit que :

- a est un **vecteur adhérent** à F si $\forall r > 0, B(a, r) \cap F \neq \emptyset$.
- F est un **fermé** de E si son complémentaire (dans E) est une partie ouverte de E .

REMARQUE 13.1 : La notion d'ouvert et de fermé dépend de la norme utilisée dans E .

- \emptyset et E sont à la fois ouverts et fermés dans E .
- U est ouverte si et seulement si tous ses points sont intérieurs à elle-même.
- Si a est intérieur à A alors $a \in A$ mais il existe des points de A qui ne sont pas intérieurs à A .
- Si $a \in A$ alors a est adhérent à A mais il existe des points adhérents à A qui ne sont pas dans A .

PROPOSITION 13.2 :

Soit E un espace vectoriel normé.

- Toute boule fermée et toute sphère est une partie fermée.
- Toute réunion finie de parties fermées de E est une partie fermée de E .
- Toute intersection (quelconque) de parties fermées de E est une partie fermée de E .

THÉORÈME 13.3 :

Soit A et F deux parties d'un espace vectoriel normé E et $a \in E$:

- a est adhérent à A si et seulement s'il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
- F est fermée si et seulement si toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ convergente vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in F$.

DÉFINITION 13.3 :

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E , on définit l'**adhérence** de A comme étant la partie de E contenant les points adhérents à A ; on la note \bar{A} .

REMARQUE 13.2 : Soit E un espace normé, $A \subset E$, alors \bar{A} est fermé.

DÉFINITION 13.4 :

Soit E un espace normé, $A \subset E$, on dit que A est **dense** dans E si $\bar{A} = E$.

PROPOSITION 13.4 :

Soit un espace vectoriel E et N_1, N_2 deux normes équivalentes dans E . Si $A \subset E$ et $a \in E$:

- a est intérieur à A dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \iff a$ est intérieur à A dans (E, N_2) .
- a est adhérent à A dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \iff a$ est adhérent à A dans (E, N_2) .
- A est ouvert dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \iff A$ est ouvert dans (E, N_2) .
- A est fermé dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \iff A$ est fermé dans (E, N_2) .
- A est dense dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \iff A$ est dense dans (E, N_2) .

REMARQUE 13.3 : • Ces notions topologiques dépendent en général des normes employées.

- En dimension finie, elles sont toutes équivalentes : on parle de la **topologie des normes**.

PARTIE 13.2 : LIMITE ET CONTINUITÉ PONCTUELLE
DÉFINITION 13.5 :

Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$, a un point de E adhérent à A , $\ell \in F$, on dit que f **tend vers ℓ en a** si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$.
le vecteur ℓ est noté $\lim_a f$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$: **limite de f en a** .

Soit A est une partie de E , $f : A \rightarrow F$, $a \in A$, on dit que f est **continue en a** si $\lim_a f = f(a)$.

REMARQUE 13.4 : • Si E et F sont de dimensions finies, cela ne dépend pas des normes.

- Si f admet une limite en a alors elle est unique, ce qui justifie la notation $\lim_a f$.

THÉORÈME 13.5 :

Soit $f : A \rightarrow F$, a adhérent à A et $b \in F$, alors on a l'équivalence qui constitue la caractérisation séquentielle de la limite : $(\lim_a f = b) \iff (\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = b)$.

Soit $f : A \rightarrow F$ et $a \in A$, alors on adapte pour obtenir la caractérisation séquentielle de la continuité : $(f \text{ continue en } a) \iff (\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(a))$.

PROPOSITION 13.6 :

Soit E et F des espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ une base de F de dimension p , $f : A \rightarrow F$ et, pour $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, les applications $f_k : A \rightarrow \mathbb{K}$ telles que : $\forall x \in A, f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)v_k$. Si

$b \in F$, on pose $b = \sum_{k=1}^p b_k v_k$. Alors on a : $\lim_a f = b \iff \forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lim_a f_k = b_k$.

PROPOSITION 13.7 :

Soit f et g définies de A dans F et a adhérent à A , $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$:

- si f et g admettent des limites finies en a alors $\lim_a (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_a f + \beta \lim_a g$;
- si f et g sont continues en a alors $\alpha f + \beta g$ est aussi continue en a .

Soit $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow G$ telles que $f(A) \subset B$:

- si $b = \lim_a f$ et $\lim_b g$ existent, alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim_a g \circ f = \lim_b g$;
- si f est continue en a et si g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .

Soit $\lambda : A \rightarrow \mathbb{K}$, $f : A \rightarrow F$ et a adhérent à A :

- si λ et f admettent des limites en a alors λf aussi et $\lim_a (\lambda f) = \lim_a \lambda \times \lim_a f$;
- si λ et f sont continues en a alors λf est continue en a .

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ et a adhérent à A :

- si f admet une limite $\ell \neq 0_F$ en a , f ne s'annule pas au vois. de a et $\lim_a (1/f) = \left(\lim_a f\right)^{-1}$.
- si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors $1/f$ est continue en a .

PARTIE 13.3 : CONTINUITÉ SUR UNE PARTIE

DÉFINITION 13.6 :

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \rightarrow F$.
On dit que f est **continu sur A** si f est continue en tout point (ou vecteur) a de A .
On note $C^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A et à valeurs dans F .

REMARQUE 13.5 : Le caractère continu ou non des applications dépend des normes employées, mais ne change pas si on prend des normes équivalentes. En dimension finie, cela ne dépend pas des normes.

THÉORÈME 13.8 :

Soit $f : A \rightarrow F$, la fonction f est continue sur A si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers un vecteur $a \in A$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(a)$.

REMARQUE 13.6 : Soit E un espace vectoriel normé, $f : E \rightarrow E$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ où f est continue alors $f(\ell) = \ell$ (vecteur fixe de f).

PROPOSITION 13.9 :

Si $(f, g) \in C^0(A, F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors $\alpha f + \beta g \in C^0(A, F)$ (combinaison linéaire).
Ainsi $C^0(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.
Si $f \in C^0(A, F)$, si $g \in C^0(B, G)$ et si $f(A) \subset B$ alors $g \circ f \in C^0(A, G)$ (composition).
Si $f \in C^0(A, F)$ et $B \subset A$ alors $f|_B \in C^0(B, F)$ (restriction).
Si $f \in C^0(A, F)$ alors $\|f\| \in C^0(A, \mathbb{R})$ (norme).

PROPOSITION 13.10 :

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel normé de dimension finie p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F . Si $f : A \rightarrow F$, on note f_1, \dots, f_p les applications de A dans \mathbb{K} définies par $\forall x \in A$, $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)e_k$. Alors on dispose de l'équivalence suivante :

$$(f \text{ est continue sur } A) \iff (f_1, \dots, f_p \text{ sont continues sur } A).$$

PROPOSITION 13.11 :

Si $\lambda \in C^0(A, \mathbb{K})$ et $f \in C^0(A, F)$ alors $\lambda f \in C^0(A, F)$ (multiplication par un scalaire).
Si $\lambda \in C^0(A, \mathbb{K})$ et $\mu \in C^0(A, \mathbb{K})$ alors $\lambda \mu \in C^0(A, \mathbb{K})$ (produit de fonctions scalaires).
Par conséquent : $C^0(A, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
Si $f \in C^0(A, \mathbb{K})$ vérifie $\forall x \in A$, $f(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{f} \in C^0(A, \mathbb{K})$ (inverse d'une fonction scalaire).

THÉORÈME 13.12 :

Soit E un espace vectoriel normé, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur E et $a \in \mathbb{R}$:

- $f^{-1}(]a; +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty; a])$ sont des ouverts de E .
- $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}(]a; +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty; a])$ sont des fermés de E .

THÉORÈME ÉNORME 13.13 :

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur A et $K \subset A$ une partie compacte de E ($K \neq \emptyset$) : $\min_K f$ et $\max_K f$ existent ("f est bornée et atteint ses bornes").

REMARQUE 13.7 : Si K est une partie compacte de E (espace vectoriel de dimension finie) et $f : K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est continue sur K alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in K$, $f(x) \geq \alpha$.

DÉFINITION 13.7 :

Soit $f : A \rightarrow F$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé E , F un espace normé et $k \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est **k -lipschitzienne** si $\forall (x, y) \in A^2$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$.

On dit que f est **lipschitzienne** s'il existe $k \geq 0$ tel que f soit k -lipschitzienne.

PROPOSITION 13.14 :

Si f, g sont lipschitziennes sur $A : \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha f + \beta g)$ est lipschitzienne sur A .

Si f est lipschitzienne sur A , g lipschitzienne sur B , $f(A) \subset B : g \circ f$ est lipschitzienne sur A .

THÉORÈME 13.15 :

Si f est lipschitzienne sur A alors f est continue sur A .

THÉORÈME ÉNORME 13.16 :

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé de dimension finie, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace normé de dimension quelconque. Toute application linéaire de E vers F est lipschitzienne donc continue.

REMARQUE 13.8 : Avec les hypothèses du théorème ci-dessus, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a même mieux : $\|f\| = \max_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$. C'est-à-dire qu'il existe $x \neq 0_E$ dans E tel que $\|f(x)\|_F = \|f\| \times \|x\|_E$.

PROPOSITION 13.17 :

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimensions finies et $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire :

- Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x, y) \in E \times F$, $\|B(x, y)\|_G \leq k \times \|x\|_E \times \|y\|_F$.
- B est continue sur $E \times F$.

REMARQUE 13.9 : • L'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(A, B) = AB$ est continue.

- L'application $\theta : \mathcal{L}(E)^2 \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\theta(u, v) = u \circ v$ est continue si E de dimension finie.
- L'application $\psi : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ telle que $\psi(\lambda, x) = \lambda x$ est continue si E est de dimension finie.
- Tout produit scalaire sur un espace euclidien est continu.

DÉFINITION 13.8 :

Soit $p \geq 1$, F, E_1, \dots, E_p des espaces vectoriels normés. Alors $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ est dite **p -linéaire** si pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et tout $(p-1)$ -uplet $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_p$, l'application $\varphi_k : E_k \rightarrow F$ définie par $f_k(x) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_p)$ est linéaire.

THÉORÈME 13.18 :

Toute application multilinéaire en dimension finie est continue.

DÉFINITION 13.9 :

Soit $p \geq 1$, on dit que $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}$ est une application polynomiale si elle est combinaison linéaire d'applications du type $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}$.

REMARQUE 13.10 : $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est polynomiale en ses coefficients, multilinéaire donc continue.