Problème I (extrait de CCP MP 2014 maths 2) : Partie I : Questions préliminaires

1. Cours !

2. a) Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$, on a $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i$ donc comme β est orthonormale, on a $\boxed{R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}$

b) Si $\|x\| = 1$ alors $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ et comme $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$, on a $\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant R_s(x) \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, ce qui donne bien $\boxed{\lambda_1 ||x||^2 \leqslant R_s(x) \leqslant \lambda_n ||x||^2}$ car β est orthonormale donc $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

c) f est continue sur $[0;\pi/2]$ car $f(t) = \langle \cos(t)\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_n \sin(t)\varepsilon_n | \cos(t)\varepsilon_1 + \sin(t)\varepsilon_n \rangle = \lambda_1 \cos^2(t) + \lambda_n \sin^2(t)$ car $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_n$ sont unitaires. Comme $f(0) = \lambda_1$ et $f(\pi/2) = \lambda_n$, le TVI montre qu'il existe $t \in [0;\pi/2]$ tel que $x = \cos(t)\varepsilon_1 + \sin(t)\varepsilon_n$ vérifie $R_s(x) = \lambda = \lambda||x||^2$ car $||x||^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ par Pythagore.

3. a) Cours !

b) On a $s_{i,j} = \langle e_i | s(e_j) \rangle$ car la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormale donc $s_{i,i} = \langle e_i | s(e_i) \rangle = R_s(e_i)$. Comme le vecteur e_i est unitaire, on en déduit avec **2.b** que $\boxed{\lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n}$

Partie II

1. On a $||C_j||^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ car le j-ième vecteur colonne C_j de A est unitaire, on en déduit que $a_{i,j}^2 \leq ||C_j||^2 = 1$ donc, en passant à la racine : $\boxed{|a_{i,j}| \leqslant 1}$

2. a) Il existe d'après le théorème spectral (version matricielle) une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\Delta\, {}^tP$. On a alors $T(A) = \mathrm{Tr}({}^tPA\,P\Delta)$ et $B = {}^tPA\,P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car ${}^tBB = {}^tP\,{}^tAAP = {}^tPI_nP = {}^tPP = I_n$. Ainsi, on en déduit l'existence souhaitée : $\boxed{B = {}^tPA\,P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifie } T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)}$

b) Si $B = (b_{i,j})$ alors $\mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |b_{i,i}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$ d'après **II.1**. Comme $\mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$ et $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\boxed{\max_{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} T(A) = \mathrm{Tr}(S)}$

Partie III

1. On a $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^n$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique (avec $\lambda_i \geqslant 0$) ce qui donne bien $\boxed{\det(S) \leqslant \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S)\right)^n}$

2. On a ${}^tS_\alpha = {}^tD\,{}^tSD = S_\alpha$ car S est symétrique et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^tXS_\alpha X = {}^t(DX)S(DX) \geqslant 0$ car $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $\boxed{S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$

On vérifie que les coefficients diagonaux de S_α sont $\alpha_i^2 s_{i,i}$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}}$

3. Pour cette valeur de α, on a $\mathrm{Tr}(S_\alpha) = n$ et $\det(S_\alpha) = \det(D)^2 \det(S) = \det(S) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{s_{i,i}}$. En appliquant **8** à la matrice S_α, on a $\det(S) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{s_{i,i}} \leqslant 1^n$ donc $\boxed{\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}}$

4. Il s'agit de montrer que $\det(S) = 0$ s'il existe un indice i tel que $s_{i,i} = 0$; or d'après **I.3.b**, s'il existe i tel que $s_{i,i} = 0$ alors $\lambda_1 \leqslant 0$, on en déduit $\lambda_1 = 0$ donc 0 est valeur propre de S et $\det(S) = 0$.

5. L'inégalité d'Hadamard s'obtient directement en remarquant que $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ car, puisque S est symétrique réelle, elle est diagonalisable donc semble à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Partie IV

1. On vérifie ${}^tB = B$ car ${}^tA = A$, et si $X \neq 0$ alors ${}^tXBX = {}^t(\Omega X)A(\Omega X) > 0$ car comme Ω est inversible, on a $\Omega X \neq 0$. On a donc $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$; enfin, $\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1^3$ donc $\boxed{B \in \mathcal{U}}$ Pour finir, on a $\boxed{\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(A\Omega\Delta\,{}^t\Omega) = \mathrm{Tr}(\,{}^t\Omega A\Omega\Delta) = \mathrm{Tr}(B\Delta)}$

2. D'après la question précédente, l'application $A \mapsto \,{}^t\Omega A\Omega$ est une bijection de $\mathcal{U}$ sur lui-même (dont la bijection réciproque est $B \mapsto \Omega B\,{}^t\Omega$) donc $\boxed{\{\mathrm{Tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta), B \in \mathcal{U}\}}$
Comme $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, ses coefficients diagonaux sont positifs donc ceux de $B\Delta$ aussi et $\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant 0$. On en déduit que $\{\mathrm{Tr}(B\Delta, B \in \mathcal{U}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (car $I_n \in \mathcal{U}$ donc $\mathrm{Tr}(\Delta)$ appartient à cet ensemble) et minorée par 0 donc $\boxed{m = \inf\{\mathrm{Tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} \text{ existe}}$

3. On a $\mathrm{Tr}(B\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \geqslant n\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i}\right)^{1/n}$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique ($\lambda_i b_{i,i} \geqslant 0$).

4. On a $\det(S) = \displaystyle\prod_{i=1}^n \lambda_i$ et, en appliquant l'inégalité d'Hadamard à B, on a $\displaystyle\prod_{i=1}^n b_{i,i} \geqslant \det(B) = 1$. On a donc bien $\boxed{\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant n(\det(S))^{1/n}}$

5. On a déjà $m \geqslant n(\det(S))^{1/n}$. On vérifie que $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\det(D) = \det(S)\displaystyle\prod_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} = 1$ donc $D \in \mathcal{U}$ et $m \leqslant \mathrm{Tr}(D\Delta) = \mathrm{Tr}\left((\det(S))^{1/n} I_n\right) = n(\det(S))^{1/n}$. On en déduit $\boxed{m = n(\det(S))^{1/n}}$

Problème II (inspiré de ESSEC ECE 2016 maths 2) **: Partie I**

1. a) Comme $X_i \geqslant 1$, il existe k tel que $T_k = 1$ si et seulement si $X_1 = 1$ donc $\boxed{u_1 = p_1}$

b) De la même façon, on a $T_k = 2$ si et seulement si $k = 1$ et $X_1 = 2$ ou bien $k = 1$ et $X_1 = X_2 = 1$; on a donc $A_2 = [X_1 = 2] \cup [X_1 = X_2 = 1]$. On a $u_2 = \mathbb{P}(X_1 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$, par incompatibilité de $(X_1 = 2)$ et $(X_1 = 1)$, puis par indépendance de X_1 et X_2, $\boxed{u_2 = p_2 + p_1^2}$ (X_1 et X_2 suivent la même loi).

c) $A_3 = (X_1 = 3) \cup (X_1 = 2, X_2 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 2) \cup (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1)$. Par incompatibilité 2 à 2, puis indépendance mutuelle des X_i, on a $\boxed{u_3 = p_3 + 2p_1p_2 + p_1^3}$

d) Par définition de A_n, on a $A_n = \displaystyle\bigcup_{i\geqslant 1}(T_i = n)$ donc $A_n \cap (X_1 = k) = \displaystyle\bigcup_{i\geqslant 1}(T_i = n, X_1 = k)$ puis, pour $i \geqslant 1$, $(T_i = n, X_1 = k) = (X_1 = k, X_2 + \cdots + X_i = n - k)$; comme $T_1 = X_1$ et $k < n$, l'événement $(T_1 = n, X_1 = k)$ est impossible. On en déduit $A_n \cap (X_1 = k) = \displaystyle\bigcup_{i\geqslant 2}(X_1 = k, X_2 + \cdots + X_i = n - k)$ puis, en posant $j = i - 1$,

$$\boxed{A_n \cap (X_1 = k) = (X_1 = k) \cap \bigcup_{j\geqslant 1}(X_2 + \cdots + X_{j+1} = n - k)}$$

On obtient, si $\mathbb{P}(X_1 = k) > 0$, $\mathbb{P}(A_n | X_1 = k) = \mathbb{P}\Big(\displaystyle\bigcup_{j\geqslant 1}(X_2 + \cdots + X_{j+1} = n - k)\Big| X_1 = k\Big)$ et par incompatibilité 2 à 2 des $(X_2 + \cdots + X_{j+1} = n - k)$ (comme $X_i > 0$, on ne pas avoir $(X_2 + \cdots + X_{j+1} = n - k)$ et $(X_2 + \cdots + X_{i+1} = n - k)$ avec $i \neq j$), on obtient $\mathbb{P}(A_n|X_1 = k) = \displaystyle\sum_{j\geqslant 1}\mathbb{P}(X_2 + \cdots + X_{j+1} = n - k|X_1 = k)$ donc $\mathbb{P}(A_n|X_1 = k) = \displaystyle\sum_{j\geqslant 1}\mathbb{P}(X_2 + \cdots + X_{j+1} = n - k)$ puisque X_1 et $X_2 + \cdots + X_{j+1}$ sont indépendantes.
Enfin, on a $\mathbb{P}(A_n|X_1 = k) = \mathbb{P}\Big(\displaystyle\bigcup_{j\geqslant 1}(X_2 + \cdots + X_{j+1} = n - k)\Big)$ est donc la probabilité qu'il existe un entier $j \geqslant 1$ tel que $X_2 + \cdots + X_{j+1} = n - k$ qui est la même que la probabilité de A_{n-k} puisque les X_i ont la même loi. On a donc bien $\boxed{\mathbb{P}(A_n|X_1 = k) = \mathbb{P}(A_{n-k})}$

e) D'après la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n|X_1 = k)\,\mathbb{P}(X_1 = k)$, $(X_1 = k)_{k\geqslant 1}$ étant un système complet d'événements. D'après **I.1.c**, on a $\mathbb{P}(A_n|X_1 = k) = \mathbb{P}(A_{n-k}) = u_{n-k}$ pour $k < n$ alors que $\mathbb{P}(A_n|X_1 = k) = 0$ si $k > n$ et $\mathbb{P}(A_n|X_1 = n) = 1$ puisque si $(X_1 = n)$ est réalisé, on a $T_1 = n$ donc A_n est réalisé. Ainsi, $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{n-k}\,\mathbb{P}(X_1 = k) + \mathbb{P}(X_1 = n)$, donc $\boxed{u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k u_{n-k}}$ avec $u_0 = 1$ et $p_0 = 0$.

2. a) On a $u_{n+1} = (1-p)u_n + pu_{n-1}$ donc $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$; il suffit donc de prendre $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

On montre facilement par récurrence que $U_n = M^{n-1}U_1$ pour tout $n \geq 1$.

b) On a $\mathcal{X}_M = X^2 - (1-p)X - p = (X-1)(X+p)$ donc $X^n = Q\mathcal{X}_M + a_nX + b_n$ avec $a_n = \dfrac{1-(-p)^n}{1+p}$ et $b_n = \dfrac{p+(-p)^n}{1+p}$ en évaluant cette égalité en 1 et en p. On a donc $M^n = a_nM + b_nI_2$ en évaluant en M et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} M^n = \dfrac{1}{1+p}M + \dfrac{p}{1+p}I_2 = \dfrac{1}{1+p}\begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & p \end{pmatrix}}$ Comme $u_n = [M^{n-1}]_{1,1}u_1 + [M^{n-1}]_{1,2}u_0$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1+p}}$

3. a) On a $u_n \in [0,1]$ donc la suite (u_n) est bornée et $\boxed{R \geqslant 1}$ car le rayon de convergence de $\sum t^n$ vaut 1.

b) Le rayon de convergence de G étant lui aussi $\geqslant 1$, on a, par produit de Cauchy, $f(t)G(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_nt^n$, pour $|t| < 1$ avec $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_kp_{n-k}$. On a donc $c_n = u_n$ pour $n \geqslant 1$ et $c_0 = u_0p_0 = 0$. On en déduit, pour $|t| < 1$, $f(t)G(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_nt^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_nt^n = f(t) - 1$, ce qui donne bien $\boxed{f(t)[1-G(t)] = 1 \text{ pour } |t| < 1}$

c) Pour $|t| < \dfrac{1}{1-p}$, $G(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ donc $1 - G(t) = \dfrac{1-t}{1-(1-p)t} \neq 0$ si $|t| < 1$, puis $f(t) = \dfrac{1-(1-p)t}{1-t}$ donc $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n - (1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} t^n = 1 + p\sum_{n=1}^{+\infty} t^n$. Par unicité des coefficients d'un DSE, on a $\boxed{u_n = p \text{ pour } n \geqslant 1}$

Partie II

1. a) Pour $j \geq 0$, $\mathbb{P}(X_1 = j) = \mathbb{P}(X_1 \geqslant j) - \mathbb{P}(X_1 \geqslant j+1) = q_j = \dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \geqslant 0$ par hypothèse sur X_1. De plus, par dualité suite-série, comme la suite $\left(\dfrac{1}{j^\alpha}\right)$ converge, la série $\sum q_j$ converge et $\boxed{\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} q_j = 1 - \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{(j+1)^\alpha} = 1}$

b) On a $P(X_1 \geqslant j) = \dfrac{1}{j^\alpha}$ et $\alpha > 1$ donc $\sum \mathbb{P}(X_1 \geqslant j)$ converge par Riemann et $\boxed{X_1 \text{ admet une espérance}}$

On pourrait aussi montrer que $\sum j\,\mathbb{P}(X_1 = j)$ *converge absolument avec l'équivalent qui suit.*

c) Par linéarité de l'espérance, on $\boxed{\mathbb{E}(T_k) = k\mu}$ car $\mathbb{E}(X_i) = \mu$.

d) $\mathbb{P}(X_1 = j) = \dfrac{1}{j^\alpha}\left(1 - \left(1 + \dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha}\right) \underset{j\to+\infty}{=} \dfrac{1}{j^\alpha}\left(1 - \left(1 - \dfrac{\alpha}{j} + o\left(\dfrac{1}{j}\right)\right)\right)$ donc $\mathbb{P}(X_1 = j) \sim \dfrac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$. On en déduit $j^2\,\mathbb{P}(X_1 = j) \sim \dfrac{\alpha}{j^{\alpha-1}}$ (positif) donc $\sum j^2\,\mathbb{P}(X_1 = j)$ converge absolument si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, ie $\boxed{X_1 \text{ admet une variance si et seulement si } \alpha > 2}$

2. Les X_i sont 2 à 2 indépendantes, suivent toutes la même loi et possèdent une variance, on a donc, pour $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{T_k}{k} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$ donc $1 \geqslant P\left(\left|\dfrac{T_k}{k} - \mu\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \dfrac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ et $\boxed{\lim_{k\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{T_k}{k} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1}$

3. a) Si $X_i \leqslant m$ alors $Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = X_i + 0$ et sinon $Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = 0 + X_i$ donc $\boxed{Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = X_i}$

b) D'après II.1.a, $\mathbb{P}(X_1 = j) = f(j+1) - f(j) = (j+1-j)f'(c)$ si $f : t \mapsto -t^{-\alpha}$ par le TAF. Puisque si $t \in [j, j+1]$ on a $f'(t) = \alpha t^{-\alpha-1} \leq \alpha j^{-\alpha-1}$, on conclut que $\boxed{\mathbb{P}(X_1 = j) \leqslant \dfrac{\alpha}{j^{\alpha+1}}}$

c) $\mathbb{E}(Z_i^{(m)})$ existe car $\mathbb{P}(Z_i^{(m)} = j) = \mathbb{P}(X_i = j)$ si $j \geqslant m+1$. De plus $\mathbb{E}(Z_i^{(m)}) = \displaystyle\sum_{j=m+1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(X_i = j)$ et on a $j\,\mathbb{P}(X_1 = j) \leqslant \dfrac{\alpha}{j^\alpha} \leqslant \alpha\displaystyle\int_{j-1}^{j} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$; $\displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge donc $\mathbb{E}(Z_i^{(m)}) \leqslant \alpha\displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \boxed{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}}$

d) Si $X_i \leqslant m$ alors $(Y_i^{(m)})^2 = X_i^2 \leqslant mX_i$ et sinon, $(Y_i^{(m)})^2 = 0 \leqslant mX_i$. On en déduit que $\mathbb{E}((Y_i^{(m)})^2)$ existe ($(Y_i^{(m)})^2$ est à valeurs dans $[0, m^2]$) et $\mathbb{V}(Y_i^{(m)}) \leqslant \mathbb{E}((Y_i^{(m)})^2) \leqslant m\,\mathbb{E}(X_i)$ donc $\boxed{\mathbb{V}((Y_i^{(m)})^2) \leqslant m\mu}$

4. Comme $1 - \alpha < 0$, on a $\lim_{m\to+\infty} m^{1-\alpha} = 0$ et, par définition de la limite, $\boxed{m_0 \text{ existe}}$

5. $\boxed{U_k^{(m)} + V_k^{(m)} = T_k}$ d'après **II.3.a**.

6. a) $\mathbb{E}(V_k^{(m)}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(Z_i^{(m)}) \boxed{\leqslant k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}}$

$V_k^{(m)}$ est positive, admet une espérance, $k\varepsilon > 0$, donc (Markov) $\mathbb{P}(V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(V_k^{(m)})}{k\varepsilon} \boxed{\leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}}$

b) On a $|\,\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu| = |\,\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - \mathbb{E}(T_k)| = \mathbb{E}(V_k^{(m)}) \leqslant k\dfrac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha} \leqslant k\varepsilon$ car $m \geqslant m_0$ et $V_k^{(m)} \geqslant 0$ d'où $\mathbb{E}(V_k^{(m)}) \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{|\,\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu| \leqslant k\varepsilon}$

c) Si $|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon$ alors $|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| = |(U_k^{(m)} - k\mu) - (\,\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu)| \geqslant |U_k^{(m)} - k\mu| - |\,\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu|$ donc $|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant 2k\varepsilon - k\varepsilon = k\varepsilon$, on en déduit $\boxed{\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right] \subset \left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right]}$

d) Les X_i étant 2 à 2 indépendants, les $Y_i^{(m)}$ le sont aussi ($Y_i^{(m)}$ est l'image de X_i par l'application f telle que $f(t) =$ si $t \leqslant m$ et $f(t) = 0$ sinon) donc $V(U_k^{(m)}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} V(Y_i^{(m)})$ et $\boxed{V(U_k^{(m)}) \leqslant km\mu}$ d'après **II.3.d**.

Par inégalité de Bienaymé-Tchebichev, $\mathbb{V}(U_k^{(m)})$ existe donc $\mathbb{P}(|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(U_k^{(m)})}{k^2\varepsilon^2} \leqslant \dfrac{m\mu}{k\varepsilon^2}$.
Enfin, avec la question précédente, on a $\mathbb{P}(|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon) \boxed{\leqslant \dfrac{m\mu}{k\varepsilon^2}}$

7. a) On a $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = -\mathbb{P}(A \cup B) \geqslant -1$ car $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$.

b) Si $\mathbb{V}_k^{(m)} < k\varepsilon$ et $|U_k^{(m)} - k\mu| < 2k\varepsilon$ alors $|T_k - k\mu| \leqslant |U_k^{(m)} - k\mu| + V_k^{(m)} \leqslant 3k\varepsilon$ donc $A \cap B \subset \left[\left|\dfrac{T_k}{k} - \mu\right| < 3\varepsilon\right]$.
On en déduit $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{T_k}{k} - \mu\right| < 3\varepsilon\right) \geqslant \mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \geqslant \left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}\right) + \left(1 - \dfrac{m\mu}{k\varepsilon^2}\right) - 1$ donc
$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{T_k}{k} - \mu\right| < 3\varepsilon\right) \geqslant 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \dfrac{m\mu}{k\varepsilon^2}}$

c) Pour k assez grand, on choisit $m_k = \lfloor\sqrt{k}\rfloor + 1$ de sorte que $m_k \geqslant m_0$ et on a $\dfrac{m_k}{k} \sim \dfrac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $m_k^{1-\alpha} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m_k^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \dfrac{m\mu}{k\varepsilon^2} = 1$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{T_k}{k} - \mu\right| < 3\varepsilon\right) = 1}$