DS 6.1 : extrait de MINES MP 2019 MATHS2

PSI 1 2022/2023 **samedi 11 mars 2023**

PARTIE 1 : UNE PROPRIÉTÉ DE PERRON-FROBENIUS

1.1 Comme on a $\int_0^1 t^i dt = \left[\frac{t^{i+1}}{i+1}\right]_0^1 = \frac{1}{i+1}$ si $i \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale, pour un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ comme dans l'énoncé tel que ${}^tX = (x_0\ x_1 \dots x_{n-1})$,

$$\boxed{\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt = \int_0^1 \Big(\sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} x_j x_k t^{j+k}\Big) dt = \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} x_j x_k \int_0^1 t^{j+k} dt = \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} \frac{x_j x_k}{j+k+1}.}$$

1.2 On constate que H_n est symétrique réelle. Par calcul matriciel, ${}^tXH_nX = \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} \frac{x_j x_k}{j+k+1} = \int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt$. Comme $\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt \geqslant 0$, on a ${}^tXH_nX \geqslant 0$, ce qui garantit que H_n est symétrique positive. De plus, si ${}^tXH_nX = 0$, alors $\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt = 0$ et, comme $\widetilde{X}^2$ est une fonction continue et positive sur $[0;1]$, on en déduit que $\widetilde{X}$ est la fonction nulle sur $[0;1]$, donc que le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} x_k X^k$ admet une infinité de racines ; il est donc nul et on a bien $X = 0$ ce qui prouve que $\boxed{H_n \text{ est symétrique définie positive.}}$

1.3 D'après le théorème spectral, H_n n'admet que des valeurs propres réelles car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. De plus, soit $\lambda \in Sp(H_n)$, alors il existe un vecteur $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $H_nX = \lambda X$. Alors ${}^tXH_nX = \lambda {}^tXX = \lambda ||X||^2 > 0$ d'après la question précédente. Or $||X||^2 > 0$ car $X \neq 0$ donc $\lambda = \frac{{}^tXH_nX}{||X||^2} > 0$. On a bien $\boxed{Sp(H_n) \subset \mathbb{R}_+^*.}$

1.4 ($\Longrightarrow$) Si $X \in V$, alors $H_nX = \rho_n X$ par définition, donc on a directement ${}^tXH_nX = \rho_n^t XX = \rho_n ||X||^2$.
($\Longleftarrow$) D'après le théorème spectral, en notant $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r = \rho_n$ les différentes valeurs propres de H_n classées dans l'ordre, on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(H_n)$. Ainsi, pour un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ tel que ${}^tXH_nX = \rho_n^t XX = \rho_n||X||^2$, il existe $(X_1, \dots, X_r) \in E_{\lambda_1}(H_n) \times \dots \times E_{\lambda_r}(H_n)$ tel que $X = \sum_{i=1}^r X_i$, alors ${}^tXH_nX = {}^t\Big(\sum_{i=1}^r X_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^r \lambda_j X_j\Big) = \sum_{k=1}^r \lambda_k^t X_k X_k$ par bilinéarité et car ${}^tX_iX_j = 0$ si $i \neq j$. La condition ${}^tXH_nX = \rho_n^t XX$ donne donc $\rho_n \sum_{i=1}^r ||X_i||^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i ||X_i||^2$, ou encore $\sum_{i=1}^r (\rho_n - \lambda_i)||X_i||^2 = 0$. Ces termes étant tous positifs, $\forall i \in [\![1;r-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_i)||X_i||^2 = 0$ implique $X_i = 0$. Ainsi, $X = X_r \in E_{\rho_n}(H_n) = V$.
Par double implication, on a bien prouvé que $\boxed{X \in V \text{ si et seulement si } {}^tXH_nX = \rho_n||X||^2.}$
Pour ($\Longleftarrow$), on pouvait aussi dire que si ${}^tXH_nX = (X|H_nX) = \rho_n||X||^2$, avec l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $\rho_n||X||^2 \leqslant ||X||\,||H_nX||$ sauf que $||H_nX||^2 = \Big|\Big|\sum_{j=1}^r H_nX_j\Big|\Big|^2 = \Big|\Big|\sum_{j=1}^r \lambda_j X_j\Big|\Big|^2 = \sum_{j=1}^r \lambda_j^2 ||X_j||^2$ par PYTHAGORE donc, comme $\lambda_j^2 \leqslant \lambda_r^2 = \rho_n^2$, cela donne $||H_nX||^2 \leqslant \rho_n^2 \sum_{j=1}^r ||X_j||^2 = \rho_n^2||X||^2$ d'où $||H_nX|| \leqslant \rho_n||X||$. Ainsi, $\rho_n||X||^2 \leqslant ||X||\,||H_nX|| \leqslant \rho_n||X||^2$ et ces inégalités sont des égalités. D'après CAUCHY-SCHWARZ, on en

déduit que (X, H_nX) est liée. Soit $X = 0$ et alors $X \in V$. Soit $X \neq 0$ et alors $H_nX = \lambda X$ mais $||H_nX|| = \rho_n||X||$ implique, comme $\lambda \geqslant 0$ d'après 1.3, que $\lambda = \rho_n$. Dans tous les cas, on a bien $X \in V$.

$\boxed{\textbf{1.5}}$ Comme H_n est positive, on a ${}^tX_0H_nX_0 = |{}^tX_0H_nX_0| = \left|\sum\limits_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} \dfrac{x_jx_k}{j+k+1}\right|$. On utilise alors l'inégalité triangulaire pour avoir $\boxed{{}^tX_0H_nX_0 \leqslant \sum\limits_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} \dfrac{|x_j||x_k|}{j+k+1} ={}^t |X_0|H_n|X_0|.}$

Comme $X_0 \in V$ par hypothèse, d'après la question 1.4, ${}^tX_0H_nX_0 = \rho_n||X_0||^2$ donc $\rho_n||X_0||^2 \leqslant^t |X_0|H_n|X_0|$ d'après l'inégalité ci-dessus. En décomposant comme avant $|X_0| = \sum\limits_{i=1}^{r} V_i$ avec $V_i \in E_{\lambda_i}(H_n)$, comme la famille $(V_1, \ldots, V_r)$ est orthogonale, on a $||\,|X_0|\,||^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} ||V_i||^2$. De plus, comme les carrés des composantes des vecteurs X_0 et $|X_0|$ sont les mêmes, X_0 et $|X_0|$ ont même norme donc $||X_0||^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} ||V_i||^2$, d'où ${}^t|X_0|H_n|X_0| = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i {}^tV_iV_i \leqslant \rho_n \sum\limits_{i=1}^{r} ||V_i||^2 = \rho_n||X_0||^2$. On obtient donc $\rho_n||X_0||^2 \leqslant^t |X_0|H_n|X_0| \leqslant \rho_n||X_0||^2$. Ainsi, ${}^t|X_0|H_n|X_0| = \rho_n||\,|X_0|\,||^2$ ce qui montre, avec 1.4, que $\boxed{|X_0| \in V.}$

$\boxed{\textbf{1.6}}$ X_0 est non nul, or tous les coefficients de H_n étant strictement positifs et $|X_0|$ ayant des coordonnées positives et non toutes nulles, cela impose que $\boxed{\text{toutes les composantes de } H_n|X_0| \text{ sont strictement positives.}}$

Alors, comme $|X_0| \in V$ d'après la question 1.5, on a $H_n|X_0| = \rho_n|X_0|$ et, puisque $\rho_n > 0$, cela implique que

$\boxed{\text{toutes les composantes de } |X_0| \text{ sont strictement positives, celles de } X_0 \text{ sont donc toutes non nulles.}}$

$\boxed{\textbf{1.7}}$ Soit $X_0 = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ un vecteur non nul de V. Soit $Y = (y_0, \ldots, y_{n-1})$ un autre vecteur de V. Comme x_0 est non nul d'après la question 1.6, on peut former le vecteur $X = Y - \dfrac{y_0}{x_0}X_0$ qui appartient à V par structure d'espace vectoriel de V. Or, par construction, la première composante de X est nulle, et la question 1.6 montre alors que ce vecteur ne peut être que le vecteur nul. Ainsi, $Y = \dfrac{y_0}{x_0}X_0 \in \mathrm{Vect}(X_0)$. On vient de montrer que $V \subset \mathrm{Vect}(X_0)$. L'autre inclusion étant évidente, on a $\boxed{V = \mathrm{Vect}(X_0) \text{ est de dimension 1.}}$

PARTIE 2 : INÉGALITÉ DE HILBERT

$\boxed{\textbf{2.1}}$ Comme on a $\displaystyle\int_0^\pi 1\,d\theta = \pi$ et $\displaystyle\int_0^\pi e^{im\theta}d\theta = \left[\frac{e^{im\theta}}{im}\right]_0^\pi = \frac{e^{im\pi}-1}{im\pi} = \frac{(-1)^m - 1}{im\pi}$ si $m \in \mathbb{N}^*$, on a par linéarité,

$$\boxed{\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = \int_0^\pi \sum_{j=0}^{d} a_j e^{i(j+1)\theta}d\theta = \sum_{j=0}^{d} a_j \int_0^\pi e^{i(j+1)\theta}d\theta = -i\sum_{j=0}^{d} \frac{a_j}{(j+1)}[(-1)^{j+1} - 1].}$$

$\boxed{\textbf{2.2}}$ Mais on a aussi $\displaystyle\int_{-1}^1 t^m dt = \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_{-1}^1 = \frac{1-(-1)^{m+1}}{m+1}$ si $m \in \mathbb{N}$, et par linéarité de l'intégrale, on obtient les relations $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)dt = \sum_{j=0}^{d} a_j \int_{-1}^1 t^j dt = \sum_{j=0}^{d} \frac{a_j}{(j+1)}[1-(-1)^{j+1}] = i\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$ (pas d'intégration par parties complexe même si formellement cela coïncide).

Comme $|-i| = 1 = |e^{i\theta}|$ et par inégalité de la moyenne, $\boxed{\displaystyle\left|\int_{-1}^1 P(t)dt\right| = \left|\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|d\theta.}$

2.3 Grâce à la question 1.1, ${}^tXH_nX = \int_0^1 |\widetilde{X}(t)|^2 dt \leqslant \int_{-1}^1 |\widetilde{X}(t)|^2 dt$ car $\widetilde{X}(t)^2 \geqslant 0$ et $-1 < 0$ où l'on a posé $\widetilde{X}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k t^k = Q(t)$ avec $Q = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k X^k$. En appliquant ce qui précède au polynôme $P = Q^2$, comme $|P(e^{i\theta})| = |Q(e^{i\theta})|^2 = |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2$, $\boxed{{}^tXH_nX \leqslant \int_{-1}^1 Q^2(t)dt \leqslant \int_0^\pi |Q^2(e^{i\theta})|d\theta = \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta.}$

2.4 Comme $|\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 = \widetilde{X}(e^{i\theta})\overline{\widetilde{X}(e^{i\theta})} = \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})$ car $\widetilde{X}$ est une fonction polynomiale réelle et que $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Ainsi, $|\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 = \Big(\sum\limits_{p=0}^{n-1} x_p e^{ip\theta}\Big)\Big(\sum\limits_{q=0}^{n-1} x_q e^{iq\theta}\Big) = \sum\limits_{0\leqslant p,q\leqslant n-1} x_p x_q e^{i(p-q)\theta}$ d'où

$$\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n-1} x_p x_q \int_0^\pi e^{i(p-q)\theta} d\theta = \sum_{m=0}^{n-1} x_m^2 \pi + \sum_{0\leqslant p\neq q\leqslant n-1} x_p x_q \frac{(-1)^{p-q}-1}{i(p-q)\pi}.$$

en distinguant selon que $p = q$ ou $p \neq q$ dans la somme précédente et avec les intégrales calculées en 2.1. Comme les x_k sont des réels, la quantité $\sum\limits_{0\leqslant p\neq q\leqslant n-1} x_p x_q \dfrac{(-1)^{p-q}-1}{i(p-q)\pi}$ est clairement un imaginaire pur. Or, cette quantité vaut aussi $\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta - \pi \sum\limits_{m=0}^{n-1} x_m^2$ qui est un réel, on en déduit que cette quantité est nulle (car $i\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \{0\}$) d'où $\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \pi \sum\limits_{m=0}^{n-1} x_m^2$. Ainsi, avec l'inégalité de la question 2.1, on obtient bien $\boxed{{}^tXH_nX \leqslant \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \pi \sum\limits_{m=0}^{n-1} x_m^2 = \pi||X||^2.}$

Autre méthode : comme la fonction $\theta \mapsto |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 = \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})$ est paire, on a facilement la relation $\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta$. Or $\int_{-\pi}^\pi 1 d\theta = 2\pi$ et $\int_{-\pi}^\pi e^{im\theta} d\theta = \Big[\dfrac{e^{im\theta}}{im}\Big]_{-\pi}^\pi = 0$ si $m = 0$, donc

$$\int_{-\pi}^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n-1} x_p x_q \int_{-\pi}^\pi e^{i(p-q)\theta} d\theta = \sum_{m=0}^{n-1} 2\pi x_m^2.$$

Par conséquent, plus simplement qu'avant, on trouve aussi $\int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2}\Big(2\pi \sum\limits_{m=0}^{n-1} x_m^2\Big) = \pi||X||^2$.

2.5 Comme la sous-matrice contenant les n premières lignes et les n premières colonnes de H_{n+1} est la matrice H_n, on va pouvoir trouver un lien entre ρ_n et ρ_{n+1}. En effet, soit $X_n \neq 0 \in V$ un vecteur propre de H_n associé à la valeur propre ρ_n, on pose alors le vecteur $X = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, alors $X \neq 0$ et on trouve ${}^tX_nH_nX_n ={}^t XH_{n+1}X$ en effectuant le calcul. D'après la question 1.4, ${}^tX_nH_nX_n = \rho_n||X_n||^2$. Comme à la question 1.5, il vient aussi ${}^tXH_{n+1}X \leqslant \rho_{n+1}||X||^2$. Tout ceci implique que $\rho_n||X_n||^2 \leqslant \rho_{n+1}||X||^2$ or il est clair que $||X|| = ||X_n||$ donc, comme $||X_n||^2 > 0$, on a $\rho_n \leqslant \rho_{n+1}$ et la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. De plus, si $X \in V$ non nul, d'après les questions 1.4 et 2.2, ${}^tXH_nX = \rho_n||X||^2 \leqslant \pi||X||^2$ donc $\rho_n \leqslant \pi$ car $||X||^2 > 0$. Ainsi, la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par π.

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(\rho_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante et converge vers un réel } \ell \leqslant \pi.}$

PARTIE 3 : UN OPÉRATEUR INTÉGRAL

3.1 Comme K_n est une fonction polynomiale donc continue sur le segment $[0;1]$, elle y est bornée et on peut définir $M = ||K_n||_{\infty,[0;1]}$. En fait, comme K_n est croissante et positive sur $[0;1[$, on a $M = K_n(1) = n$ mais c'est sans importance. Soit $f \in E$, alors pour tout réel $x \in [0;1[$, la fonction $\varphi_x : t \mapsto K_n(tx)f(t)$ est continue sur $[0;1[$ et $\forall t \in [0;1[,\ |\varphi_x(t)| \leqslant M|f(t)|$ car $xt \in [0;1[$. Par conséquent, comme $\varphi_x(t) \underset{1^-}{=} O(f(t))$, le théorème de comparaison montre que φ_x est intégrable sur $[0;1[$ donc que la fonction $T_n(f)$ est bien définie sur $[0;1[$.

Pour la continuité de $T_n(f)$, on a le choix entre deux approches :

• Pour $x \in [0;1[$, alors $T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)dt = \int_0^1 \Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} t^k x^k\Big) f(t)dt$ or toutes les fonctions $t \mapsto t^k f(t)$ sont intégrables sur $[0;1[$ car $\forall t \in [0;1[,\ |t^k f(t)| \leqslant |f(t)|$, ainsi $T_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Big(\int_0^1 t^k f(t)dt\Big) x^k$ par linéarité de l'intégrale et la fonction $T_n(f)$ est polynomiale donc continue sur $[0;1[$.

• Soit $h : [0;1[^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = K_n(tx)f(t)$ de sorte que $T_n(f) = \int_0^1 h(x,t)dt$.

- Pour $t \in [0;1[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0;1[$ car K_n l'est.
- Pour $x \in [0;1[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0;1[$ (on vient de le faire).
- Pour $(x,t) \in [0;1[^2$, $|h(x,t)| \leqslant M|f(t)|$ et f est intégrable sur $[0;1[$.

Par théorème de continuité sous le signe somme, $T_n(f)$ est continue sur $[0;1[$: T_n va bien de E dans E.

De plus, si $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale, pour tout réel $x \in [0;1[$, on a

$$T_n(\lambda f + g)(x) = \int_0^1 K_n(tx)(\lambda f(t) + g(t))dt = \lambda \int_0^1 K_n(tx)f(t)dt + \int_0^1 K_n(tx)g(t)dt = \lambda T_n(f)(x) + T_n(g)(x)$$

ce qui montre que $T_n(\lambda f + g) = \lambda T_n(f) + T_n(g)$ donc que T_n est linéaire.

Enfin, comme on a vu que $T_n(f)$ est une fonction polynomiale, elle est intégrable sur $[0;1[$ (sur $[0;1]$ aussi d'ailleurs car elle y est continue). Tout ce qui précède justifie bien que $\boxed{T_n \text{ est un endomorphisme de } E.}$

E est un espace de dimension infini puisqu'il contient toutes les fonctions polynomiales par exemple. En notant $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ le sous-espace de E formé par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$, on vient de montrer ci-dessus que $\mathrm{Im}(T_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$. L'endomorphisme T_n ne saurait donc être injectif. En effet, même sa restriction à $R_n[x] \subset E$ ne l'est pas car $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1 > n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[x])$ grâce à la formule du rang. Il existe donc une fonction non nulle $f \in E$ (et même mieux $f \in \mathbb{R}_n[x] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[x]$ donc polynomiale de degré n exactement) telle que $T_n(f) = 0$ ce qui montre que $\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } T_n.}$

Autre méthode : dans la même veine que les polynômes de Legendre, en posant $f : t \mapsto [(t(t-1))^n]^{(n)}$, f est polynomiale de degré n exactement donc non nulle, et on a, en effectuant des intégrations par parties successives, $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $\int_0^1 t^k f(t)dt = 0$ donc $T_n(f) = 0$ ce qui montre à nouveau, mais de manière constructive, l'existence d'un vecteur propre de T_n associé à la valeur propre 0.

3.2 En notant ${}^tX = (x_0 \ \cdots x_{n-1})$, pour $x \in [0;1[$, $T_n(\widetilde{X})(x) = \int_0^1 K_n(tx)\widetilde{X}(t)dt = \int_0^1 (\sum_{i=0}^{n-1} t^i x^i)(\sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j)dt$ donc

$$T_n(\widetilde{X})(x) = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} x^i x_j \int_0^1 t^{i+j}dt = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} \frac{x^i x_j}{i+j+1}.$$

Or on se rappelle avoir déjà vu ce style de calcul matriciel en question 1.1, et en posant $Y_x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne tel que ${}^tY_x = (1 \ x \cdots x^{n-1})$, on a $T_n(\widetilde{X})(x) = {}^t Y_x H_n X = {}^t X H_n Y_x$.

On a vu en question 1.1 que H_n est définie positive, donc 0 n'est pas une valeur propre de H_n, alors qu'on a vu à la question précédente que 0 est une valeur propre de T_n.

• Soit un réel λ valeur propre de H_n, il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que ${}^tX = (x_0 \ x_1 \ldots x_{n-1})$ et $H_n X = \lambda X$. Si on reporte ceci dans l'égalité ci-dessus, $T_n(\widetilde{X})(x) = {}^t Y_x H_n X = \lambda {}^t Y_x X = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} x_k x^k = \lambda \widetilde{X}(x)$, donc $T_n(\widetilde{X}) = \lambda \widetilde{X}$ avec $\widetilde{X} \neq 0$ qui est un vecteur propre de T_n : λ est une valeur propre de T_n.

• Soit un réel non nul λ valeur propre de T_n, il existe donc une fonction non nulle $f \in E$ telle que $T_n(f) = \lambda f$ ce qui justifie, comme $\lambda \neq 0$, que $f = \frac{1}{\lambda} T_n(f) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Ainsi, f est une fonction polynomiale de degré inférieur à $n-1$. On peut donc poser $\forall x \in [0;1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k x^k = \widetilde{X}(x) = {}^t Y_x X$ en posant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tX = (x_0 \ x_1 \ldots x_{n-1})$. Comme f est non nulle, ses coefficients ne sont pas tous nuls donc $X \neq 0$. À nouveau, si $x \in [0;1[$, $T_n(\widetilde{X})(x) = \lambda \widetilde{X}(x) = \lambda {}^t Y_x X = {}^t Y_x H_n X$. En notant ${}^t(H_n X - \lambda X) = (a_0 \ a_1 \ldots a_{n-1})$, on a $\forall x \in [0;1[$, $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = 0$ ce qui prouve que le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ admet une infinité de racines ; il est donc nul et $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$ d'où $H_n X = \lambda X$ et λ est une valeur propre de H_n car $X \neq 0$.

Remarque : on a établi que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors X est un vecteur propre de H_n associé à λ si et seulement si $\widetilde{X}$ est un vecteur propre de T_n associé à λ.

Toujours est-il que, par double implication, $\boxed{T_n \text{ et } H_n \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles.}}$

3.3 • Puisque $\rho_n \neq 0$ et que c'est une valeur propre de H_n, il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul qu'on écrit ${}^tX = (x_0 \ldots x_{n-1})$ tel que $H_n X = \rho_n X$. Avec les notations de la partie 1, $X \in V$ mais on sait d'après les questions 1.5 et 1.7 que $|X| \in V$ et que $V = \text{Vect}(X)$. Ainsi, $|X|$ et X sont colinéaires ce qui justifie d'après 1.6 que les coefficients de X ont même signe strict. Quitte à remplacer X par $-X$, on peut supposer que X a tous ses coefficients strictement positifs : $X = |X|$. On a vu à la question 3.2 qu'en posant $f = \widetilde{X} : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$, on avait $f \in E$ et $T_n(f) = \rho_n f$. La fonction f est strictement positive sur $[0;1]$ d'où $f \in \mathcal{A}$ et, puisque $T_n(f) = \rho_n f$, on a $\forall x \in]0;1[$, $\rho_n = \frac{1}{f(x)} \int_0^1 K_n(tx) f(t)dt = F(x)$ donc $\underset{x \in]0;1[}{\text{Sup}} \frac{1}{f(x)} \int_0^1 K_n(xt) f(t)dt = \rho_n$ (F est constante).

• Soit $\varphi \in \mathcal{A}$ quelconque, a fortiori $\varphi \in E$ donc, pour $x \in]0;1[$, $T_n(\varphi)(x) = \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt$ existe comme $\frac{1}{\varphi(x)}$ car $\varphi(x) > 0$ donc on peut considérer la quantité $\frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt$. De plus, $T_n(\varphi)$ est polynomiale donc continue sur le segment $[0;1]$, comme est continue la fonction $\frac{1}{\varphi}$ par hypothèse sur ce même segment ; ainsi, la fonction $\Phi : x \mapsto \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$, elle y est donc bornée ce qui justifie l'existence du réel $S(\varphi) = \underset{x \in]0;1[}{\text{Sup}} \Big(\frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt\Big)$.

Pour obtenir l'inégalité de l'énoncé, il suffit de montrer que ρ_n minore $I = \{S(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{A}\}$, c'est-à-dire que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}$, $S(\varphi) \geqslant \rho_n$, ou encore qu'il existe $x \in]0;1[$ tel que $\Phi(x) \geqslant \rho_n = F(x)$ (voir les notations introduites ci-dessus). Pour $x \in]0;1[$, et même pour $x \in [0;1]$ puisque ces deux fonctions se prolongent par continuité au segment $[0;1]$, travaillons l'expression $\Phi(x) - \rho_n = \Phi(x) - F(x)$:

$$\Phi(x) - F(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)dt - \frac{1}{f(x)} \int_0^1 K_n(tx)f(t)dt = \frac{1}{f(x)} \int_0^1 \varphi(t)K_n(xt)\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)}\Big)dt.$$

Or la fonction $\psi = \dfrac{f}{\varphi}$ est continue sur le segment $[0;1]$ (en tous cas elle s'y prolonge par continuité) donc elle y est bornée et y atteint ses bornes. En considérant $a \in [0;1]$ tel que $\psi(a) = \underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Max}}(\psi(t))$, on a donc $\Phi(a) - F(a) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)K_n(at)\big(\psi(a) - \psi(t)\big)dt \geqslant 0$ car $f(a) > 0$ et $\forall t \in [0;1],\ K_n(at) > 0$ et $\psi(t) \leqslant \psi(a)$. Ainsi, $\Phi(a) \geqslant \rho_n = F(a)$ donc $\underset{x\in[0;1]}{\mathrm{Max}}(\Phi(x)) \geqslant \rho_n$ et, par continuité de Φ sur $[0;1]$, $S(\Phi) = \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Sup}}(\Phi(x)) \geqslant \rho_n$. Par conséquent, l'ensemble I est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par ρ_n, sa bornée inférieure existe et, étant le plus grand des minorants, $\boxed{\mathrm{Inf}(I) = \underset{\varphi\in\mathcal{A}}{\mathrm{Inf}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Sup}} \dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt = \underset{\varphi\in\mathcal{A}}{\mathrm{Inf}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Sup}}\ \Phi(x) \geqslant \rho_n.}$

3.4 On a vu au début de la question que si $\varphi = f \in \mathcal{A}$, on a $F : x \mapsto \rho_n$ donc $\underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Sup}}(F(x)) = \rho_n$ donc le minorant ρ_n de I est dans I ; cette borne inférieure est donc un minimum et $\boxed{\rho_n = \underset{\varphi\in\mathcal{A}}{\mathrm{Min}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Sup}} \dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt.}$

De même, avec $b \in [0;1]$ tel que $\psi(b) = \underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Min}}(\psi(t))$, $\Phi(b) - F(b) = \dfrac{1}{f(b)} \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)K_n(bt)\big(\psi(b) - \psi(t)\big)dt \leqslant 0$ donc $\underset{x\in[0;1]}{\mathrm{Min}}(\Phi(x)) \leqslant \rho_n$ qui montre à nouveau que $\underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Inf}}(\Phi(x)) \leqslant \rho_n$. Comme avant, on en déduit la majoration $\underset{f\in\mathcal{A}}{\mathrm{Sup}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Inf}}(\Phi(x)) \leqslant \rho_n$. Puisqu'on a égalité en prenant $\varphi = f$, cela donne aussi l'égalité dans la majoration précédente, à savoir $\boxed{\rho_n = \underset{\varphi\in\mathcal{A}}{\mathrm{Sup}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Inf}} \dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt = \underset{\varphi\in\mathcal{A}}{\mathrm{Max}}\ \underset{x\in]0;1[}{\mathrm{Inf}} \dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt.}$

DS 6.2 : X-ENS 2018 PC

PSI 1 2022/2023 **samedi 11 mars 2023**

PARTIE 1 : CAS PARTICULIERS

1.1 En identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$, $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ étant un n^2-uplet de ± 1, $\boxed{\text{card}\,(\mathcal{M}_n(\{-1,1\})) = 2^{n^2}.}$

Comme il ne contient par la matrice nulle, $\boxed{\mathcal{M}_n(\{-1,1\}) \text{ n'est-pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

1.2 Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \{-1,1\}^n$ et $Y = (y_j)_{1\leqslant j\leqslant n}\{-1,1\}^n$. Alors ${}^t XAY = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_i a_{i,j} y_j\right)$ est un entier relatif comme somme d'entiers relatifs, par inégalité triangulaire, $|{}^t XAY| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |x_i a_{i,j} y_j|\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right)$ car $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ x_i, y_j, a_{i,j} \in \{-1,1\}$: $\boxed{S(A) \subset [\![-n^2;n^2]\!].}$

Pour tout $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, notons $E = \{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \mid x_i a_{i,j} y_j = 1\}$, $e = \text{card}\,(E)$, $F = \{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \mid x_i a_{i,j} y_j = -1\}$ et $f = \text{card}\,(F)$. Il est clair que (E,F) forme une partition de $[\![1;n]\!]^2$ donc $e + f = n^2$. De plus, on a vu ci-dessus que ${}^t XAY = e - f$ donc ${}^t XAY = n^2 - 2f$ a la même parité que n^2 d'où $\boxed{S(A) \subset \{n^2 - 2f \mid f \in [\![0;n]\!]\} \text{ strictement inclus dans } [\![-n^2;n^2]\!]}$ (par exemple, $n^2 - 1 \notin S(A)$).

Enfin, si $k \in S(A)$, alors il existe $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ tels que $k = {}^t XAY$ et, en prenant $X' = -X \in \{-1,1\}^n$, on a ${}^t X'AY = -{}^t XAY = -k \in S(A)$, donc $\boxed{S(A) \text{ est bien un ensemble symétrique par rapport à } 0.}$

1.3 Si $k \in S(B)$, alors il existe par définition $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ tels que $k = {}^t XBY$. En posant $X' = CX$ et $Y' = DY$, X' et Y' sont dans $\{-1,1\}^n$, car l'ensemble $\{-1,1\}$ est stable par multiplication, on en déduit que $k \in S(A)$ car ${}^t X'AY' = {}^t(CX)A(DY) = {}^t X {}^t CADY = {}^t XCADY = {}^t XBY = k$. Par conséquent, $S(B) \subset S(A)$.
Comme $C^2 = I$ et $D^2 = I$, les matrices C et D sont leur propre inverse. Puisque $B = CAD$, on a donc $CBD = C^2AD^2 = A$. D'après ce qui précède, on a donc aussi $S(A) \subset S(B)$.
Par double inclusion, si $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})^2$ et s'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $B = CAD$, on a $\boxed{S(A) = S(B).}$

1.4 Soit $X = (x_1,x_2)$ et $Y = (y_1,y_2)$ dans $\{-1,1\}^2$. Alors ${}^t XIY = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = (x_1+x_2)(y_1+y_2)$. Comme $(x_1+x_2, y_1+y_2) \in \{-2,0,2\}^2$, on a ${}^t XAY \in \{-4,0,4\}$: $S(I) \subset \{-4,0,4\}$. De plus, pour $X = (1,1)$ et $Y = (1,1)$, il vient ${}^t XIY = 4$, donc $4 \in S(I)$. Pour $X = (-1,1)$ et $Y = (1,1)$, ${}^t XIY = 0$ donc $0 \in S(I)$. Enfin, $S(I)$ est un ensemble symétrique par rapport à 0, donc $-4 \in S(I)$. Au final, on a $\boxed{S(I) = \{-4,0,4\}.}$
De même, ${}^t XJY = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 = \underbrace{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}_{\in\{-4,0,4\}} - \underbrace{2x_2y_2}_{\in\{-2,2\}}$ donc ${}^t XJY \in \{-6,-2,2,6\}$, ainsi $S(J) \subset \{-6,-2,2,6\}$. De plus, d'après la question 1.2, on a $S(J) \subset [\![-4;4]\!]$ donc $S(J) \subset \{-2,2\}$. Or $2 \in S(J)$ en prenant $X = (1,1)$ et $Y = (1,1)$, donc $-2 \in S(J)$ par symétrie. Par conséquent, $\boxed{S(J) = \{-2,2\}.}$

En choisissant judicieusement C et D, on peut, en effectuant le produit CAD, multiplier les lignes et les colonnes de A par 1 ou -1 de toutes les manières possibles. Par exemple, en prenant $D = \mathrm{diag}(-1,1)$ et $C = \mathrm{diag}(1,-1)$, on multiplie la deuxième ligne de A et la première colonne par -1 en calculant CAD. De plus, ces opérations laissent $S(A)$ inchangé d'après la question 1.3.

• Les matrices qui contiennent exactement 0, 2 ou 4 fois le chiffre 1 s'obtiennent en partant de I et vérifient $S(A) = S(I) = \{-4,0,4\}$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1,1) \times I \times \mathrm{diag}(-1,1)$.

• Les matrices qui contiennent exactement 1 ou 3 fois le chiffre 1 s'obtiennent en partant de J et vérifient $S(A) = S(J) = \{-2,2\}$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,-1) \times J \times \mathrm{diag}(1,-1)$.

Au final, on n'a que deux choix si $n = 2$ et $A \in \mathcal{M}_2(\{-1,1\})$, c'est $\boxed{S(A) = \{-4,0,4\} \text{ ou } S(A) = \{-2,2\}.}$

1.5 On peut penser à tourner ces implications dans les deux sens. Commençons dans le sens direct :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Pour $(X,Y) \in (\{-1,1\})^2$ avec ${}^tX = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$ et ${}^tY = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$, la matrice ${}^tXAY$ s'obtient à partir de A en multipliant les lignes L_i de A par x_i et les colonnes C_j par y_j (à gauche on modifie les lignes, et à droite les colonnes). Ainsi, si $n^2 \in S(A)$, avec les notations de 1.2, cela signifie que $f = 0$: il n'y a pas de -1, donc que des 1, dans tous les termes $a_{i,j}x_iy_j$. Ainsi, en notant $D = \mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(y_1,\cdots,y_n)$, on a $DAD' = (a_{i,j}x_iy_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = J = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Comme $J = U{}^tU$ avec ${}^tU = (1\ \cdots\ 1)$, $D = D^{-1}$ et $D' = D'^{-1}$, cela donne $A = DU{}^tUD' = X{}^tY$ (faire le calcul matriciel).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Si $A = X{}^tY$ avec $(X,Y) \in (\{-1,1\})^2$, les colonnes de A sont les $y_jX \neq 0$, d'où $\mathrm{rg}(A) = 1$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Si $\mathrm{rg}(A) = 1$, comme toutes les colonnes de A sont non nulles, il existe, pour $i \in [\![1;n]\!]$, un entier $y_i = \pm 1$ tel que $C_i = y_iC_1$ (avec $y_1 = 1$). En notant Y le vecteur colonne tel que ${}^tY = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$, la matrice AY est la matrice colonne contenant nC_1 puisque $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^2 = n$. Par conséquent, en notant $X = C_1 \in \{-1,1\}^n$, ${}^tXAY = n{}^tC_1C_1 = n||C_1||^2 = n^2 \in S(A)$.

Mais on pouvait aussi bien sûr le faire dans le sens inverse :

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Si A est de rang 1, en notant $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de A, comme $C_1 \neq 0$, les autres colonnes sont multiples de C_1 et il existe donc, pour $i \in [\![1;n]\!]$, un entier $y_i = \dfrac{a_{1,i}}{a_{1,1}} = \pm 1$ tel que $C_i = y_iC_1$ (avec $y_1 = 1$ bien sûr). Ainsi $A = C_1 \times (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$ et, en notant X et Y les deux vecteurs colonnes de $\{-1,1\}^n$ tels que $X = C_1$ et ${}^tY = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$, alors $A = X{}^tY$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Si $A = X{}^tY$ avec $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$, alors ${}^tXAY = {}^tX(X{}^tY)Y = ({}^tXX)({}^tYY) = ||X||^2||Y||^2 = n^2 \in S(A)$.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Si $n^2 \in S(A)$, alors il existe deux vecteurs colonnes X et Y de $\{-1,1\}^n$ tels que ${}^tX = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$ et ${}^tY = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$ et $n^2 = {}^tXAY = \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_iy_j\Big)$. Or, pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $x_ia_{i,j}y_j \in \{-1,1\}$, donc la condition $n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_iy_j\Big)$ se traduit par $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j}x_iy_j = 1$ (somme de n^2 termes, chaque terme valant au plus 1). Par suite, comme $(x_i, a_{i,j}, y_j) \in \{-1,1\}^3$ pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on en déduit que $x_iy_j = a_{i,j}$. On a donc, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $y_jX = C_j$ (colonne j de A) donc toutes les colonnes de A sont multiples de X. Comme $A \neq 0$, on a bien $\mathrm{rg}(A) = 1$.

On a bien montré l'équivalence : $\boxed{n^2 \in S(A) \Longleftrightarrow (\exists (X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2,\ A = X{}^tY) \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(A) = 1.}$

1.6 Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ vérifiant $n^2 \in S(A)$ sont exactement celles de rang 1 d'après la question 1.5.

Pour les dénombrer, on établit un protocole de choix bijectif :

- On choisit la première colonne C_1 de A : 2^n choix (n cases de ± 1).
- Pour $j \in [\![2;n]\!]$, on choisit le terme en case $(1,j)$, les autres termes de la colonne j de A s'en déduisent puisque $C_j = \dfrac{a_{1,j}}{a_{1,1}} C_1$: cela fait 2 choix pour chaque colonne donc 2^{n-1} choix (ils sont indépendants).

Il y a donc 2^{2n-1} telles matrices, donc $\boxed{\text{la proportion cherchée est } \dfrac{2^{2n-1}}{2^{n^2}} = \dfrac{1}{2^{n^2-2n+1}} = \dfrac{1}{2^{(n-1)^2}}.}$

PARTIE 2 : MAJORATION

2.1 La variable aléatoire U_1 est finie, de même que $e^{\lambda U_1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $e^{\lambda U_1}$ admet une espérance finie et, d'après le théorème de transfert, avec la loi de U_1 donnée par l'énoncé, on obtient

$$\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}] = e^{-\lambda}\,\mathbb{P}(U_1 = -1) + e^{\lambda}\,\mathbb{P}(U_1 = 1) = \frac{1}{2}(e^{-\lambda} + e^{\lambda}) = \mathrm{ch}(\lambda).$$

Ainsi, $\varphi(\lambda) = \ln(\mathrm{ch}(\lambda))$ et φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(\lambda) = \dfrac{\mathrm{sh}(\lambda)}{\mathrm{ch}(\lambda)} = \mathrm{th}(\lambda)$ et $\varphi''(\lambda) = 1 - \mathrm{th}(\lambda)^2$. On pose $\psi : t \mapsto \varphi(t) - \dfrac{t^2}{2}$, ψ est aussi, par opérations, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on dérive deux fois : $\psi'(t) = \mathrm{th}(t) - t$, $\psi''(t) = -\mathrm{th}^2(t) \leqslant 0$. Ainsi, ψ' est décroissante sur $\mathbb{R}$, comme $\psi'(0) = 0$, ψ' est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$ d'où ψ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, ψ maximale en 0 où elle vaut $\psi(0) = \ln(\mathrm{ch}(0)) = 0$. ψ est donc négative sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda U_1}] \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2}.}$

On pouvait aussi, comme on l'a vu cette année, comparer $\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}] = \mathrm{ch}(\lambda)$ et $\exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)$ en passant par les séries entières. En effet, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(2n)!} \leqslant \dfrac{1}{2^n n!}$ car $\dfrac{(2n)!}{n!} = (n+1) \times \cdots \times (2n) \geqslant 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ pour $n \geqslant 1$ et $0! = 2^0 0! = 1$, il vient

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^n n!},$$

et on utilise ensuite la croissante de la fonction $\ln$ pour retrouver le résultat.

2.2 Soit $t \in \mathbb{R}$, comme $\exp$ est strictement croissante et $\lambda > 0$, $(S_k \geqslant t) = (\lambda S_k \geqslant \lambda t) = (e^{\lambda S_k} \geqslant e^{\lambda t})$ d'où l'égalité des probabilités $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) = \mathbb{P}(e^{\lambda S_k} \geqslant e^{\lambda t})$. Comme $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} U_i$, S_k admet une espérance finie par somme et, par mutuelle indépendance de $U_1, \cdots, U_k$, $\mathbb{E}[e^{\lambda S_k}] = \prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{E}[e^{\lambda U_i}] = \prod\limits_{i=1}^{k} e^{\varphi(\lambda)} = e^{k\varphi(\lambda)}$ puisque les U_i suivent la même loi que U_1. Comme $e^{\lambda S_k}$ est positive et admet une espérance finie, d'après l'inégalité de Markov, comme $e^{\lambda t} > 0$, comme attendu, $\boxed{\mathbb{P}(S_k \geqslant t) = \mathbb{P}(e^{\lambda S_k} \geqslant e^{\lambda t}) \leqslant \dfrac{E[e^{\lambda S_k}]}{e^{\lambda t}} = \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t).}$

2.3 Soit $t > 0$, la majoration de la question précédente est d'autant plus intéressante que le majorant est petit, en les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquelles $k\varphi(\lambda) - \lambda t$ est minimale. Or $k\varphi(\lambda) - \lambda t \leqslant k\frac{\lambda^2}{2} - \lambda t = \theta(\lambda)$ d'après la question 2.1 et $\theta'(\lambda) = k\lambda - t$. θ est donc minimale pour $\lambda = \frac{t}{k} > 0$ en lequel $\theta\left(\frac{t}{k}\right) = -\frac{t^2}{2k}$. D'après 2.2, en prenant $\lambda = \frac{t}{k}$, on trouve donc l'inégalité de HOEFFDING, $\boxed{\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).}$

Bien sûr, étudier le minimum de la fonction $\alpha : \lambda \mapsto k\varphi(\lambda) - \lambda t = k\ln(\text{ch}(\lambda)) - \lambda t = k\ln\left(\text{ch}(\lambda)e^{\frac{-\lambda t}{k}}\right)$ serait plus précis mais le majorant n'aurait pas une expression aussi simple. En effet, $\alpha'(\lambda) = k\,\text{th}(\lambda) - t$ donc, comme th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$, on considère trois cas :

- si $t \geqslant k$, α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et, comme $\lim_{\lambda \to +\infty} \text{ch}(\lambda)e^{\frac{-\lambda t}{k}} = -\infty$ car $\text{ch}(\lambda) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^\lambda}{2}$ donc $\text{ch}(\lambda)e^{\frac{-\lambda t}{k}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\exp\left(\left(1 - \frac{t}{k}\right)\right)$. En faisant tendre λ vers $+\infty$ dans la majoration précédente, on obtient $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant 0$ donc $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) = 0$ ce qui est évident puisque $S_k(\Omega) \subset [\![-k;k]\!]$.
- si $t < k$, α est minimale en λ_0 tel que $k\,\text{th}(\lambda_0) = t$, c'est-à-dire en $\lambda_0 = \text{Argth}\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+t}{k-t}\right)$. Ainsi, grâce à 2.2, $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda_0) - \lambda_0 t) = \left(1 - \frac{t}{k}\right)^{\frac{t-k}{2}}\left(1 + \frac{t}{k}\right)^{\frac{-t-k}{2}}$ (après calculs).

2.4 Comme C suit une loi uniforme, toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ ont la même probabilité $\lambda > 0$ d'être image de $\omega \in \Omega$ par C. Ainsi, C est surjective et $\text{card}\,(C(\Omega)) = \text{card}\,(\mathcal{M}_n(\{-1,1\})) = 2^{n^2}$. On peut résumer :

- Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $\mathbb{P}(C = M) = \frac{1}{2^{n^2}} = \lambda$.
- Pour $E \subset \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $(C \in E) = \bigcup_{M \in E}(C = M)$ (disjoints) donc $\mathbb{P}(C \in E) = \sum_{M \in E}\mathbb{P}(C = M) = \frac{\text{card}\,(E)}{2^{n^2}}$.

Il est clair que chacune des variables aléatoires $x_iy_jC_{i,j}$ est à valeurs dans $\{-1,1\}$ car $\{-1,1\}$ est stable par produit. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, comme les évènements $(x_iy_jC_{i,j} = 1)$ et $(C_{i,j} = x_iy_j)$ sont égaux, on a

$$\mathbb{P}(x_iy_jC_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(C_{i,j} = x_iy_j).$$

Or, $E_{i,j} = \{C \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\}) \mid C_{i,j} = x_iy_j\}$ est une partie de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ de cardinal 2^{n^2-1} car pour chacune des $n^2 - 1$ cases différentes de la case (i,j), on a le choix (indépendant) de ± 1 dans celle-ci. Ainsi,

$$\mathbb{P}(x_iy_jC_{i,j} = 1) = \frac{\text{card}\,(E_{i,j})}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(x_iy_jC_{i,j} = -1) = 1 - \mathbb{P}(x_iy_jC_{i,j} = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{les variables aléatoires } x_iy_jC_{i,j} \text{ suivent donc bien la loi uniforme sur } \{-1,1\}.}$

- Pour $k \in [\![1;n^2]\!]$ et toute famille des cases $(i_p,j_p)_{1 \leqslant p \leqslant k} \in ([\![1;n]\!]^2)^k$ formée d'éléments distincts et toute famille correspondante $(\alpha_p)_{1 \leqslant p \leqslant k} \in \{-1,1\}^k$, on a

$$\prod_{p=1}^{k}\mathbb{P}(x_{i_p}y_{j_p}C_{i_p,j_p} = \alpha_p) = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$$

d'une part, et

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k}(x_{i_p}y_{j_p}C_{i_p,j_p}=\alpha_p)\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k}(C_{i_p,j_p}=\alpha_p x_{i_p}y_{j_p})\right)=\mathbb{P}(C\in E_k)=\frac{2^{n^2-k}}{2^{n^2}}=\frac{1}{2^k}$$

d'autre part car $E_k=\{C\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\})\mid \forall p\in [\![1;k]\!],\ C_{i_p,j_p}=\alpha_p x_{i_p}y_{j_p}\}$ est de cardinal 2^{n^2-k} (car cela correspond au choix d'un ±1 dans chacune des n^2-k cases qui ne sont pas les $(i_p,j_p)_{1\leqslant p\leqslant k}\in([\![1;n]\!]^2)^k$).
On a donc bien, pour tous ces choix de paramètres,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k}(x_{i_p}y_{j_p}C_{i_p,j_p}=\alpha_p)\right)=\prod_{p=1}^{k}\mathbb{P}(x_{i_p}y_{j_p}C_{i_p,j_p}=\alpha_p)$$

ce qui est la définition de $\boxed{\text{l'indépendance mutuelle de la famille des variables aléatoires } (x_iy_jC_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.}$

2.5 • Remarquons déjà que l'inégalité montrée en 2.3 est encore valable pour $t=0$, car $\mathbb{P}(S_k\geqslant 0)\leqslant 1$ est clair.
• Pour tout $t\geqslant 0$, pour tout $\omega\in\Omega$, on a

$$M(C(\omega))\geqslant tn^{3/2}\iff(\exists(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2,\ {}^tXC(\omega)Y\geqslant tn^{3/2},$$

ce qui se traduit au niveau des évènements par

$$(M(C)\geqslant tn^{3/2})=\bigcup_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2}({}^tXCY\geqslant tn^{3/2}).$$

Par suite, par la propriété de sous-additivité (il n'y a aucun raison que ces évènements soient incompatibles),

$$\mathbb{P}(M(C)\geqslant tn^{3/2})\leqslant\sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2}\mathbb{P}({}^tXCY\geqslant tn^{3/2}).$$

• Or, pour $(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2$ fixé, ${}^tXCY=\sum\limits_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}x_iy_jC_{i,j}$, où les variables $(x_iy_jC_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes mutuellement et de loi uniforme d'après la question 2.4. Par conséquent, d'après l'inégalité de Hoeffding, puisque $tn^{3/2}\geqslant 0$, on obtient la majoration

$$\mathbb{P}({}^tXCY\geqslant tn^{3/2})=\mathbb{P}\Big(\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}x_iy_jC_{i,j}\geqslant tn^{3/2}\Big)\leqslant\exp\Big(-\frac{(tn^{3/2})^2}{2n^2}\Big)=\exp\Big(-\frac{t^2n}{2}\Big).$$

• En ré-injectant ce résultat dans l'inégalité obtenue ci-dessus, on obtient :

$$\mathbb{P}(M(C)\geqslant tn^{3/2})\leqslant\sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2}\mathbb{P}({}^tXCY\geqslant tn^{3/2})\leqslant\sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2}\exp\Big(-\frac{t^2n}{2}\Big)=2^{2n}\exp\Big(-\frac{t^2n}{2}\Big)$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(M(C)\geqslant tn^{3/2})\leqslant\exp\Big(2n\ln(2)-\frac{t^2n}{2}\Big)=\exp\Big(-\Big(\frac{t^2}{2}-2\ln 2\Big)n\Big)}$ comme attendu.

2.6 Suivons l'indication : soit un réel $\varepsilon>0$, posons $t=2\sqrt{\ln(2)}+\varepsilon>0$, alors grâce à la question précédente :

$$\mathbb{P}\big(M(C)\geqslant tn^{3/2}\big)\leqslant\exp\Big(-\Big(\frac{(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)^2}{2}-2\ln 2\Big)n\Big)=\exp\Big(-\Big(2\varepsilon\sqrt{\ln 2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\Big)n\Big)<1$$

car $-2\varepsilon\sqrt{\ln 2}-\dfrac{\varepsilon^2}{2}<0$. On en déduit que $\mathbb{P}\big(M(C)<(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}\big)=1-\mathbb{P}\big(M(C)\geqslant tn^{3/2}\big)>0$ ce qui montre que l'événement $\big(M(C)<(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}\big)$ n'est pas vide.

Il existe donc $\omega\in\Omega$ tel que $M(C(\omega))<(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}$. En notant $A=C(\omega)$, on a donc $A\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et $M(A)<(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}$. Par définition de $\underline{M}(n)$, on a donc $\underline{M}(n)\leqslant M(A)<(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}$. Ceci étant valable pour tout $\varepsilon>0$, en faisant tendre ε vers 0 dans cette inégalité stricte, on obtient l'inégalité large souhaitée, à savoir $\boxed{\underline{M}(n)\leqslant 2\sqrt{\ln 2}\,n^{3/2}.}$

PARTIE 3 : MINORATION

3.1 Pour $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et $Y=(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\{-1,1\}^n$ fixés, on a pour tout $X\in\{-1,1\}^n$ noté $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et en notant $V=AY=(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $v_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}y_j$ par définition du produit matriciel,

$$ {}^tXAY=(X|AY)=(X|V)=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i \quad\text{donc}\quad {}^tXAY\leqslant|{}^tXAY|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|v_i| $$

par inégalité triangulaire et car $|x_i|=1$ par définition. Ainsi, la quantité $M=\sum\limits_{i=1}^{n}|v_i|$ est un majorant de l'ensemble fini $E_Y=\{{}^tXAY \mid X\in\{-1,1\}^n\}$. De plus, en définissant le vecteur $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ par $x_i=1$ si $v_i\geqslant 0$ et $x_i=-1$ si $v_i<0$, on a par construction $X\in\{-1,1\}^n$ et $\forall i\in[\![1;n]\!]$, $x_iv_i=|v_i|$ ce qui montre que $M=\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iz_i={}^tXAY\in E_Y$. Par conséquent, M est un élément de E_Y qui majore E_Y : c'est donc le maximum de E_Y d'où, par définition de $g_A(Y)$, $\boxed{g_A(Y)=\mathrm{Max}(E_Y)=M=\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|=\sum\limits_{i=1}^{n}\Big|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}y_j\Big|.}$

3.2 Soit $i\in[\![1;n]\!]$ fixé. Comme à la question 2.4 en remplaçant $\mathbb{R}^{n^2}$ par $\mathbb{R}^n$, on montre que puisque Z est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}^n$, alors $(Z_1,\cdots,Z_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Comme la famille $(a_{i,1},\cdots,a_{n,1})$ ne contient que des ±1, d'après le cours, $(a_{i,1}Z_1,\cdots,a_{n,1}Z_n)$ est aussi une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ (car $-Z_i$ a la même loi que Z_i).

En posant, pour $j\in[\![1;n]\!]$, $B_j=\dfrac{1+a_{i,j}Z_j}{2}$, alors $B_j(\Omega)=\{0,1\}$, puis $\mathbb{P}(B_j=0)=\mathbb{P}(a_{i,j}Z_j=-1)=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B_j=1)=\mathbb{P}(a_{i,j}Z_j=1)=\dfrac{1}{2}$ donc B_j est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Encore une fois, $(B_1,\cdots,B_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ donc, d'après le cours, $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n}B_j$ est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,1/2)$. Or, en posant $T_n=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}Z_j$, comme $a_{i,j}Z_j=2B_j-1$, on a $T_n=2S_n-n$ donc, puisque $S_n(\Omega)=[\![0;n]\!]$, il vient $T_n(\Omega)=\{-n,-n+2,\cdots,n-2,n\}$. Comme T_n est finie, elle admet une espérance finie qui, par le théorème de transfert, en notant $h:k\mapsto|2k-n|$, vaut

$$ \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}Z_j\right|\right]=\mathbb{E}[|2S_n-n|]=\mathbb{E}[h(S_n)]=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)|2k-n| $$

ce qui, en se souvenant de la loi binomiale, $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$, devient

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j\right|\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|2k-n| = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|.$$

Enfin, $g_A(Z) = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j\right|$ d'après la question 3.1 donc la variable aléatoire $g_A(Z)$ admet une espérance finie comme somme finie de variables aléatoires admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance, on a $\boxed{\mathbb{E}[g_A(Z)] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j\right|\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|\right) = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|}$ car, dans la somme, ces espérances $\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j\right|\right]$ ne dépendant pas de i.

3.3 *Simplification de* $\mathbb{E}[g_A(Z)]$

3.3.1 Montrons par récurrence que, pour $m \in [\![0; n-1]\!]$, on a $\sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{m}$ $(\mathcal{H}_m)$.

- Pour $m = 0$, $\sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k} = (n-0)\binom{n}{0} = n = n\binom{n-1}{0}$ donc $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.
- Soit $m \in [\![0; n-2]\!]$ tel que $\mathcal{H}_m$ est vraie. Alors

$$\sum_{k=0}^{m+1}(n-2k)\binom{n}{k} = \left(\sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k}\right) + (n-2(m+1))\binom{n}{m+1} = n\binom{n-1}{m} + (n-2m-2)\binom{n}{m+1}$$

par hypothèse de récurrence donc, en revenant aux factorielles,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1}(n-2k)\binom{n}{k} &= n\frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + (n-2m-2)\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}\\ &= (m+1)\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} + (n-2m-2)\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}\end{aligned}$$

qui se simplifie en

$$\sum_{k=0}^{m+1}(n-2k)\binom{n}{k} = (n-m-1)\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = n\frac{(n-1)!}{(m+1)!(n-m-2)!} = n\binom{n-1}{m+1}$$

et on a bien prouvé que $\mathcal{H}_{m+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a bien $\boxed{\forall m \in [\![0; n-1]\!],\ \sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{m}.}$

3.3.2 Séparons les cas n pair et n impair :

- Si n est pair qu'on écrit $n = 2p$, alors $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor = p$ et, d'après la question 3.2, on a

$$\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}|n-2k| + \frac{n}{2^n}\sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|$$

en découpant en deux compte tenu de la valeur absolue. Ainsi, comme $n-p-1=p-1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g_A(Z)] &= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(n-2k)+\frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{n-p-1}\binom{n}{n-j}|2j-n| && \text{en posant } j=n-k \iff k=n-j,\\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(n-2k)+\frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}(n-2j) && \text{car si } j\leqslant p-1, \text{ alors } 2j-n\leqslant 0,\\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}(n-2k)+\frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}(n-2j) && \text{car } n-2p=0,\\
&= 2\frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}(n-2k) && \text{car } j \text{ est une variable muette}\\
&= \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{p} && \text{avec 3.3.1 et } m=\lfloor\tfrac{n}{2}\rfloor-1=p-1.\\
&= \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}.
\end{aligned}$$

• Si n est impair qu'on écrit $n=2p+1$, alors $\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor=p$ et, toujours avec 3.2, comme $n-p-1=p$,

$$\begin{aligned}
E[g_A(Z)] &= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}|n-2k|+\frac{n}{2^n}\sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| && \text{en coupant en deux}\\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(n-2k)+\frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{n-p-1}\binom{n}{n-j}|2j-n| && \text{en posant } j=n-k \iff k=n-j,\\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(n-2k)+\frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{p}\binom{n}{j}(n-2j) && \text{car si } j\leqslant n-p-1, \text{ alors } 2j-n\leqslant 0,\\
&= 2\frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(n-2k) && \text{car } j \text{ est une variable muette}\\
&= \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{p} && \text{avec 3.3.1 et } m=\lfloor n/2\rfloor=p.\\
&= \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}.
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, comme souhaité, on a bien $\boxed{\mathbb{E}[g_A(Z)]=\dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}.}$

On pouvait plus simplement dire que, puisque si $n=2k$, on a $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}|2k-n|=0$, alors, et dans tous les cas pour la parité de n, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|=\sum_{2k\leqslant n}\binom{n}{k}(n-2k)+\sum_{2k\geqslant n}\binom{n}{k}(2k-n)$$

ce qui, en posant $j=n-k$ dans la seconde somme, donne

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|=\sum_{2k\leqslant n}\binom{n}{k}(n-2k)+\sum_{2j\leqslant n}\binom{n}{n-j}(n-2j)$$

puis, puisque $\dbinom{n}{n-j}=\dbinom{n}{j}$ et que j est une variable muette, grâce à la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|=2\sum_{2k\leqslant n}\binom{n}{k}(n-2k)=2n\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$$

$\boxed{\textbf{3.4}}$ *Minoration de* $\underline{M}(n)$

$\boxed{\textbf{3.4.1}}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, alors comme $M(A) = \mathrm{Max}(\{g_A(Y) \mid Y \in \{-1,1\}^n\})$ d'après l'énoncé, la variable aléatoire $g_A(Z)$ vérifie $g_A(Z) \leqslant M(A)$. En passant à l'espérance, on trouve $\mathbb{E}[g_A(Z)] \leqslant \mathbb{E}[M(A)] = M(A)$ car l'espérance d'une variable aléatoire constante vaut cette constante. D'après la question précédente, on en déduit donc que $M(A) \geqslant \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ainsi, cette constante majore toutes les valeurs de $M(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ donc, par définition $\boxed{\underline{M}(n) = \mathrm{Min}\{M(A) \mid A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\}) \geqslant \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$ car le minimum est le plus grand des minorants d'une partie.

$\boxed{\textbf{3.4.2}}$ On pose $a_n = \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Cette quantité $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ nous fait considérer deux cas :

• Si n est pair, on l'écrit $n = 2p$, $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = p$ et $a_n = a_{2p} = \dfrac{4p^2}{2^{2p-1}}\dbinom{2p-1}{p} = \dfrac{4p^2}{2^{2p-1}}\dfrac{(2p-1)!}{p!(p-1)!} = \dfrac{4p^2}{2^{2p}}\dfrac{(2p)!}{(p!)^2}$ donc, avec la formule de Stirling et quand p tend vers $+\infty$, n tend vers $+\infty$ en étant pair :

$$a_{2p} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4p^2}{2^{2p}}\frac{\sqrt{4\pi p}(2p)^{2p}e^{2p}}{(2\pi p)p^{2p}e^{2p}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4p^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$$

après les simplifications habituelles.

• Si n est impair, on l'écrit $n = 2p+1$ et $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = p$ donc $a_n = a_{2p+1} = \dfrac{(2p+1)^2}{2^{2p}}\dbinom{2p}{p} = \dfrac{(2p+1)^2}{2^{2p}}\dfrac{(2p)!}{(p!)^2}$ ce qui donne à nouveau, comme $(2p+1)^2 \underset{+\infty}{\sim} 4p^2$, $a_{2p+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4p^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$.

Si on résume les deux renseignements précédents, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{a_{2p}}{(2p)^{3/2}} = \dfrac{4}{2^{3/2}\sqrt{\pi}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ et, comme $(2p+1)^{3/2} \underset{+\infty}{\sim} 2^{3/2}p^{3/2}$, $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{a_{2p+1}}{(2p+1)^{3/2}} = \dfrac{4}{2^{3/2}\sqrt{\pi}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. Comme une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers ℓ si et seulement si les deux suites $(u_{2p})_{p\geqslant 1}$ et $(u_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ tendent vers ℓ, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n^{3/2}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} = C$ ce qui se traduit directement par $\boxed{a_n = \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\dbinom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}n^{3/2} = Cn^{3/2}.}$

Par un calcul simple, on montre que $a_{2n+1} = \dfrac{(2n+1)^2}{(2n)^2}a_{2n}$ donc $a_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} a_{2n}$. Or $(2n+1)^{3/2} \underset{+\infty}{\sim} (2n)^{3/2}$, donc il suffit de montrer l'équivalence précédente dans le cas pair ou dans le cas impair pour conclure.

L'équivalent trouvé de ce minorant de $\underline{M}(n)$ est (heureusement) inférieur au majorant trouvé dans la partie 2. Comme $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sim 0{,}798$ et $2\sqrt{\ln 2} \sim 1{,}665$, on trouve en gros un facteur 2 entre ces deux quantités. Mais surtout, on a le bon ordre de grandeur pour $\underline{M}(n)$ qui tend vers $+\infty$ “comme” $n^{3/2}$ et il y a fort à parier qu'il existe une constante $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \leqslant \alpha \leqslant 2\sqrt{\ln 2}$ telle que $\underline{M}(n) \underset{+\infty}{\sim} \alpha\, n^{3/2}$.