L'usage des calculatrices est interdit

La propreté des copies, la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et des justifications données tiendra une part prépondérante dans la notation !
Le sujet comporte deux problèmes indépendants ; veuillez les rédiger sur deux copies différentes.

Problème I : espaces euclidiens

(Extrait de CCP MP 2014 maths 2)

Notations, rappels et objectifs du problème

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée.
On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle \mid \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \|$ associée. On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de E, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle s(x)|y\rangle = \langle x|s(y)\rangle.$$

Un endomorphisme symétrique s de E est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :

$$\forall x \in E, \ \langle s(x)|x\rangle \geq 0 \ \text{ (respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\}, \ \langle s(x)|x\rangle > 0).$$

Une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ \ {}^tXSX \geq 0 \ \text{ (respectivement } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \ \ {}^tXSX > 0).$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \cdots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$

On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Partie I - Questions préliminaires

1. Énoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

2. *Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, ϵ_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Pour tout vecteur x de E, on pose :

$$R_x(x) = \langle s(x)|x\rangle.$$

a) Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.

b) En déduire, pour $x \in E$,

$$\lambda_1\|x\|^2 \leqslant R_s(x) \leqslant \lambda_n\|x\|^2$$

c) Soit $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_n]$, montrer qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $R_s(x) = \lambda||x||^2$ en considérant $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = R_s(\cos(t)\epsilon_1 + \sin(t)\epsilon_n)$.

3. a) On suppose dans cette question que s est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif).
Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).

b) Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \ \ \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n.$$

Partie II - Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \ \ |a_{i,j}| \leq 1.$$

2. *Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On pose $\Delta = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.*
Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = Tr(AS)$.

a) Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta).$$

b) Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \mathrm{Tr}(S)$, puis déterminer $\max\limits_{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} T(A)$.

Partie III - Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

1. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S)\right)^n \quad (*).$$

2. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = {}^tDSD$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{Tr}(S_\alpha)$.

3. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(*)$, démontrer que :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

4. Montrer que le résultat de la question précédente reste valable dans le cas où les coefficients diagonaux de S sont seulement positifs ou nuls. *On pourra utiliser* **I.3.b**.

5. En déduire l'inégalité d'Hadamard :

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

Partie IV - Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, et $\Delta = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega\Delta\,{}^t\Omega$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

1. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = {}^t\Omega A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta).$$

2. Démontrer que $\{\mathrm{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.

3. Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\mathrm{Tr}(B\Delta) \geq n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}.$$

4. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\mathrm{Tr}(B\Delta) \geq n(\det(S))^{1/n}$.

5. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}(\det(S))^{1/n}$ et $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$.
Déterminer le réel m.

Problème II : variables aléatoires discrètes

(inspiré de ESSEC ECE 2016 maths 2)

Notations et objectifs du problème

Le but de ce problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie, ...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à **une seule de ces pièces** susceptible de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée.
Dans la première partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné, puis dans la seconde partie, on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire discrète réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.

Partie I

Dans cette partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires discrètes $(X_i)_{i\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: X_i représente la durée de vie en jours du i-ième composant en fonctionnement.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $T_k = X_1 + \cdots + X_k$. T_k représente donc le jour où le k-ième composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement $A_n =$« le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire $A_n =$« il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ », et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

1. *Pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, on note $p_j = \mathbb{P}(X_1 = j)$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$ et $p_0 = 0$.*

a) Montrer que $u_1 = p_1$.

b) Exprimer l'événement A_2 en fonction des variables X_1 et X_2 et en déduire que $u_2 = p_2 + p_1^2$.

c) Déterminer la valeur de u_3.

d) Soit k un entier naturel non nul, $k < n$. Montrer que

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \cap \bigcup_{j\geqslant 1} [X_2 + X_3 + \cdots + X_{j+1} = n - k]$$

En déduire $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$, si $\mathbb{P}(X_1 = k) > 0$; on admettra que X_1 et $X_2 + \cdots + X_{j+1}$ sont indépendantes, pour tout $j \geqslant 1$.

e) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n = u_n p_0 + u_{n-1} p_1 + \cdots + u_0 p_n$$

2. *Dans cette question, on suppose que $X_1 - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in]0, 1[$: on a donc $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = p$. On pose, pour $n \geqslant 2$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$.*

a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour $n \geqslant 2$, on ait

$$U_{n+1} = MU_n$$

En déduire une expression de U_n en fonction de M et de U_0.

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} M^n$. Indication : on pourra utiliser χ_M. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3. *On note G la fonction génératrice de X_1, définie par $G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$ lorsque cette série converge. On note f la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n t^n$.*

a) Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n t^n$ est supérieur ou égal à 1.

b) Prouver que, pour $|t| < 1$, on a

$$f(t)[1 - G(t)] = 1$$

c) Dans cette question, on suppose que X_1 suit une loi géométrique de paramètre p, $p \in]0, 1[$.
Rappeler l'expression de G et en déduire la valeur de u_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.

Partie II

On conserve les notations de la partie précédente. On a toujours en particulier $T_k = X_1 + \cdots + X_k$ pour tout $k \geqslant 1$.
On suppose de plus dans cette partie qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que, pour tout $j \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X_1 \geqslant j) = \frac{1}{j^\alpha}$$

1. a) Donner la loi de X_1 et vérifier que cette définition est cohérente ; c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = j) = 1$.

b) Montrer que X_1 admet une espérance.

Par la suite on notera $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, l'espérance de X_1.

c) Déterminer $\mathbb{E}(T_k)$ en fonction de μ.

d) Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}(X_1 = j)$ quand j tend vers $+\infty$ et en déduire que X_1 admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

2. On suppose dans cette question que $\alpha > 2$ et donc que X_1 admet une variance, que l'on notera σ^2.
Rappeler l'énoncer de la loi faible des grands nombres et en déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_k}{k} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

3. *On suppose à partir de maintenant, et jusqu'à la fin du problème que $\alpha \in]1, 2[$.*
On fixe un entier $m \geqslant 1$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on définit deux variables aléatoires discrètes $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ de la façon suivante : $Y_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *et* $Z_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i > m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a) Vérifier que $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$

b) Montrer que $\mathbb{P}(X_1 = j) \leqslant \dfrac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$, pour $j \geqslant 1$; on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.

c) En déduire que, pour $i \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}(Z_i^{(m)}) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$$

On pourra utiliser une comparaison à une intégrale.

d) Montrer que $(Y_i^{(m)})^2 \leqslant m X_i$ et en déduire $\mathbb{V}(Y_i^{(m)}) \leqslant m\mu$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $m_0 \geqslant 1$ tel que, pour $m \geqslant m_0$, on ait $\dfrac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon$.

Jusqu'à la fin du problème, m désignera un entier supérieur ou égal à m_0.
On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$U_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} \quad \textit{et} \quad V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)}$$

5. Que vaut $U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$?

6. a) Montrer que $\mathbb{E}(V_k^{(m)}) \leqslant k \times \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$ puis en déduire $\mathbb{P}(V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon) \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} \dfrac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$.

b) Justifier que $|\,\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu| \leqslant k\varepsilon$.

c) Montrer que $\mathbb{V}(U_k^{(m)}) \leqslant km\mu$ et en déduire

$$\mathbb{P}\left(|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right) \leqslant \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

7. a) Justifier que si A et B sont deux événements alors $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$.

b) En considérant les événements $A = \left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]$ et $B = \left[U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[\right]$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_k}{k} - \mu\right| < 3\varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

c) En choisissant un entier $m \in \left[\sqrt{k}, 2\sqrt{k}\right]$, conclure que

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_k}{k} - \mu\right| < 3\varepsilon\right) = 1$$