DS 6.1 : extrait de MINES MP 2019 MATHS2

PSI 1 2022/2023 **samedi 11 mars 2023**

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$*, l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ *est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée* $||.||$*. On note* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices carrées d'ordre* n *à coefficients réels, et on identifiera* $\mathbb{R}^n$ *à l'ensemble* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *des matrices colonnes à coefficients réels.*

On note ${}^tX = (x_0\ x_1 \cdots x_{n-1})$ *la matrice ligne transposée de la matrice colonne* $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Enfin, on note $\widetilde{X}$ *la fonction polynomiale, associée à* X*, définie sur* $\mathbb{R}$ *par la formule* $\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$.

L'objet du problème est l'étude du rayon spectral (la plus grande valeur absolue des valeurs propres) de la matrice de Hilbert $H_n = (h_{j,k}^{(n)})_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par*

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \dfrac{1}{j+k+1}$ *pour* $j, k \in \{0,\ 1, \cdots,\ n-1\}$.

PARTIE 1 : UNE PROPRIÉTÉ DE PERRON-FROBENIUS

1.1 Déterminer $\int_0^1 (\widetilde{X}(t))^2 dt$ en fonction des réels $x_0, \cdots, x_{n-1}$.

1.2 Montrer que la matrice H_n est définie positive ; c'est-à-dire que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0 \Longrightarrow {}^tXH_nX > 0$.

1.3 En déduire que les valeurs propres de H_n sont toutes strictement positives.

On note V *le sous-espace propre de* H_n *associé à la plus grande valeur propre* ρ_n *de* H_n.

1.4 Montrer que $X \in V$ si et seulement si ${}^tXH_nX = \rho_n ||X||^2$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ *un vecteur non nul de* V*. On note* $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

1.5 Établir l'inégalité ${}^tX_0H_nX_0 \leqslant {}^t|X_0|H_n|X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in V$.

1.6 Montrer que $H_n|X_0|$, puis que X_0, n'a aucune coordonnée nulle.

1.7 En déduire la dimension du sous-espace propre V.

PARTIE 2 : INÉGALITÉ DE HILBERT

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *et* $P = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ *un polynôme à coefficients réels.*

2.1 Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$ en fonction des $a_0, \cdots, a_d$.

2.2 En déduire l'inégalité

$$\left|\int_{-1}^{1} P(t)dt\right| \leqslant \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|d\theta,$$

2.3 Montrer que ${}^tXH_nX \leqslant \int_0^{\pi} |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta$.

2.4 En déduire que ${}^tXH_nX \leqslant \pi||X||^2$.

2.5 Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente.

PARTIE 3 : UN OPÉRATEUR INTÉGRAL

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ *et tout réel* x*, on pose*

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Soit E *l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur* $[0;1[$ *et* $T_n : E \to E$ *l'application définie par*

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)dt.$$

3.1 Montrer que T_n est un endomorphisme de E, dont 0 est valeur propre.

3.2 Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\widetilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

On note $\mathcal{A}$ *l'ensemble des fonctions* $\varphi \in E$ *à valeurs strictement positives sur* $]0;1[$ *telles que* $\frac{1}{\varphi}$ *admette un prolongement continu sur* $[0;1]$*. On rappelle que* ρ_n *est la plus grande valeur propre de* H_n*.*

3.3 En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n, montrer que

$$\rho_n \leqslant \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\mathcal{A}} \operatorname*{Sup}_{x\in]0;1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt.$$

3.4 En utilisant la partie 1, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

DS 6.2 : extrait de X-ENS 2018 PC

PSI 1 2022/2023 **samedi 11 mars 2023**

Ce sujet s'intéresse aux matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1, et en particulier à la différence maximale entre le nombre de 1 et le nombre de -1 que l'on peut obtenir, si l'on autorise à multiplier certaines lignes et colonnes d'une telle matrice par -1.

La partie 1 s'intéresse à quelques cas particuliers.

La partie 2 montre que pour certaines matrices, cette différence maximale est beaucoup plus petite que n^2.

La partie 3 propose au contraire un minorant à cette différence maximale.

Notations :

On identifiera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ *à l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *des matrices colonnes à* n *coordonnées.*

En particulier, l'espace vectoriel des nombres réels est identifié à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

On étend les notations précédentes aux parties de $\mathbb{R}$ *: si* K *est une partie de* $\mathbb{R}$*, on notera par exemple* $\mathcal{M}_{n,k}(K)$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ *constitué des matrices dont les coefficients sont à valeurs dans* K.

Le sujet s'intéresse tout particulièrement à $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$*, l'ensemble des matrices carrées de taille* n *dont tous les coefficients sont égaux à* 1 *ou à* -1.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$*, on notera :*

$$S(A) = \{{}^tXAY \mid (X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2\} \quad \text{et} \quad M(A) = \mathrm{Max}(S(A)).$$

Pour $n \geqslant 1$*, on notera également*

$$\underline{M}(n) = \mathrm{Min}(\{M(A) \mid A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\}).$$

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires intervenant dans les parties 2 et 3.*

On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent être construites sur cet espace.

PARTIE 1 : CAS PARTICULIERS

1.1 Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$? Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1.2 Montrer que pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, l'ensemble $S(A)$ est inclus dans $\{-n^2, \cdots, n^2\}$. Montrer que l'inclusion est stricte, et montrer que $S(A)$ est un ensemble symétrique par rapport à 0.

1.3 Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. On suppose qu'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $B = CAD$. Montrer que $S(A) = S(B)$.

1.4 Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $S(I)$ et $S(J)$, et en déduire la valeur de $S(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\{-1,1\})$.

1.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) $n^2 \in S(A)$.
(ii) Il existe X et Y dans $\{-1,1\}^n$ tels que $A = X\,{}^tY$.
(iii) A est de rang 1.

1.6 En déduire la proportion, parmi les matrices de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, des matrices A qui vérifient $n^2 \in S(A)$.

PARTIE 2 : MAJORATION

Soit k *un entier strictement positif et* $U_1, \dots, U_k$ *une suite de* k *variables aléatoires à valeurs dans* $\{-1, 1\}$*, mutuellement indépendantes et de loi uniforme. On note également* $S_k = \sum_{i=1}^{k} U_i$.

2.1 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(\lambda) = \ln(\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}])$. Établir que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}$.

2.2 Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a l'inégalité $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t)$.

2.3 En déduire l'inégalité de Hoeffding pour S_k : pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(S_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right)$.

On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme $C : \Omega \mapsto \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$.
Pour $\omega \in \Omega$*, on note* $C_{i,j}(\omega)$ *le coefficient en case* (i, j) *de la matrice* $C(\omega)$.

2.4 Soit $X = (x_1, \cdots, x_n)$ et $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ deux vecteurs quelconques dans $\{-1, 1\}^n$.

Montrer que $(x_i y_j C_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une famille de n^2 variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes et de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

2.5 Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}\big(M(C) \geqslant t n^{3/2}\big) \leqslant \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2\ln 2\right)n\right)$.

2.6 Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\underline{M}(n) \leqslant 2\sqrt{\ln 2}\, n^{3/2}$. Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ telle que $M(A) < (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2}$.

PARTIE 3 : MINORATION

Dans cette partie, on établit un minorant non trivial pour $\underline{M}(n)$*. Pour* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ *et* $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \{-1, 1\}^n$*, on note* $g_A(Y) = \mathrm{Max}\left(\{{}^tXAY \mid X \in \{-1, 1\}^n\}\right)$.

Soit aussi une variable aléatoire uniforme $Z : \Omega \to \{-1, 1\}^n$*. Si* $\omega \in \Omega$*, on note* $Z(\omega) = (Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega))$.

3.1 Avec les notations ci-dessus, montrer que $g_A(Y)$ peut se réécrire $g_A(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j\right|$.

3.2 Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\mathbb{E}\left[\,\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Z_j\right|\,\right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n - 2k|$.

En déduire que $\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n - 2k|$.

3.3 *Simplification de* $\mathbb{E}[g_A(Z)]$

3.3.1 Montrer que pour $m \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $\sum_{k=0}^{m} (n - 2k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{m}$.

3.3.2 En déduire que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, on a $\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

3.4 *Minoration de* $\underline{M}(n)$

3.4.1 Montrer que $\underline{M}(n) \geqslant \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

3.4.2 Montrer ensuite, à l'aide de la formule de Stirling, que ce minorant est équivalent à $C\, n^{\alpha}$ en $+\infty$, pour des constantes C et $\alpha > 0$ que l'on explicitera. Comparer au majorant de $\underline{M}(n)$ obtenu à la 2.6.