DEVOIR 22 : PROBABILITÉ ET TOPOLOGIE

PSI 1 2022-2023 **mardi 14 mars 2023**

QCM

1 *Variance et covariance : soit* X, Y *deux variables aléatoires réelles sur un même univers* Ω *possédant des moments d'ordre* 2 *et* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $p \in]0; 1[$

1.1 $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\,\mathbb{V}(X) + b^2\,\mathbb{V}(Y)$

1.2 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

1.3 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \iff X$ et Y sont indépendantes

1.4 Si X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: $V(X) = \dfrac{(1-p)^2}{p}$

2 *Fonctions génératrices : soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *qui possèdent des espérances finies et qui suivent respectivement les lois* $\mathcal{G}(p)$ *(*$p \in]0; 1[$*) et* $\mathcal{P}(\lambda)$ *(*$\lambda > 0$*)*

2.1 $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$

2.2 $\forall t \in \mathbb{R},\ G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}$

2.3 $G_X'(1) + G_Y'(1) = \mathbb{E}(X + Y)$

2.4 $\forall t \in]-1; 1[,\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$

3 *Topologie : soit* E *un espace vectoriel normé et* A, B *deux parties de* E

3.1 A et B ouvertes $\Longrightarrow A \cup B$ ouverte

3.2 A et B convexes $\Longrightarrow A \cup B$ convexe

3.3 A et B fermées $\Longrightarrow A \cap B$ fermée

3.4 A et B fermées $\Longrightarrow A \cup B$ fermée

4 *Topologie : soit* E *un espace vectoriel normé,* A *une partie de* E*,* $x \in E$ *et* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* A

4.1 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in \overline{A}$

4.2 si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in \overline{A}$

4.3 $x \in \overline{A} \Longrightarrow x \in A$

4.4 $x \in A \Longrightarrow x \in \overline{A}$

Énoncé Donner la caractérisation séquentielle de la limite pour une application $f : A \to F$ où $A \subset E$, a adhérent à A et $b \in F$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés.

Preuve Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$.
Montrer que la boule ouverte $B(a, r) = \{x \in E \mid ||x - a|| < r\}$ est un ouvert de E.

Exercice 1 Soit des réels strictement positifs λ et μ et X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.
a. Rappeler quel est le rayon R_X et la somme G_X (resp. G_Y) de la série génératrice de X (resp. Y).
b. <u>En déduire</u> que $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_∞ définie par $N_\infty = \mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{n\in\mathbb{N}}(|a_n|)$ si $P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et la partie $A = \{P \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) > 0\}$. Est-ce que A est une partie convexe ? bornée ? fermée ? ouverte ?

DEVOIR 22 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 22 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X			
2		X	X		
3	X		X	X	
4		X		X	

1.1 Faux : on a $V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\text{Cov}(X,Y)$ **1.2** Vrai : formule de KÖNIG-HUYGHENS **1.3** Faux : on n'a que l'implication $\Longleftarrow$ en général **1.4** Faux : c'est $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

2.1 Faux : le rayon vaut $R_X = \dfrac{1}{1-p}$ et pas $+\infty$ **2.2** Vrai : $R_Y = +\infty$ et la formule est dans le cours **2.3** Vrai : par le cours et la linéarité de l'espérance **2.4** Faux : on ne sait pas si X et Y sont indépendantes.

3.1 Vrai : du cours **3.2** Faux : faire un dessin **3.3** Vrai : du cours **3.4** Vrai : du cours (2 c'est fini).

4.1 Faux : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut diverger **4.2** Vrai : caractérisation séquentielle d'un vecteur adhérent **4.3** Faux : $0 \in \overline{]0;1]}$ mais $0 \notin]0;1]$ **4.4** Vrai : la suite $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Énoncé Soit E et F sont deux espaces vectoriels normés, $f : A \to F$, a adhérent à A et $b \in F$, alors on a l'équivalence : $\left(\lim\limits_a f = b\right) \Longleftrightarrow \left(\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = b\right)$.

Preuve Soit $b \in B(a,r)$, alors par définition $||a-b|| < r$, posons alors $r' = r - ||a-b|| > 0$. Soit $x \in B(b,r')$, on a $||b-x|| < r'$. Par inégalité triangulaire : $||a-x|| = ||a-b+b-x|| \leqslant ||a-b|| + ||b-x|| < r' + ||a-b|| = r$ ce qui montre que $x \in B(a,r)$. Ainsi on a $B(b,r') \subset B(a,r)$.
Comme ceci est vrai pour tous les vecteurs b de $B(a,r)$, ceci montre que $B(a,r)$ est ouvert.

Exercice 1 **a.** D'après le cours, $R_X = R_Y = +\infty$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et $G_Y(t) = e^{\mu(t-1)}$.

b. X et Y sont indépendantes donc $\forall t \in \mathbb{R},\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\left(t-1\right)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$. Comme les fonctions génératrices caractérisent les lois, $X+Y$ suit la loi de POISSON $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$ (ou en identifiant parce que $G_{X+Y}(t) = e^{-(\lambda+\mu)}e^{(\lambda+\mu)t} = e^{-(\lambda+\mu)}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(\lambda+\mu)^n t^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(\lambda+\mu)^n e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X+Y=n)t^n$).

Exercice 2 Traitons séparément les quatre questions :

• A est convexe car si $(P,Q) \in A^2$ et $t \in [0;1]$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ (tP+(1-t)Q)(x) = tP(x) + (1-t)Q(x) > 0$ car $P(x) > 0$ et $Q(x) > 0$ (t et $1-t$ ne peuvent pas s'annuler en même temps).

• A n'est pas bornée car $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ U_p = X^2 + p \in A$ et $N_\infty(U_p) = p$ et p peut être aussi grand qu'on veut.

• A n'est pas fermée car $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ V_p = X^2 + \dfrac{1}{p} \in A$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} V_p = X^2 \notin A$ (car $N_\infty(V_p - X^2) = \dfrac{1}{p} \to 0$) donc les limites des suites convergentes de vecteurs de A n'étant pas toutes dans A : A n'est pas fermée.

• A n'est pas non plus ouverte car $P = 1 \in A$ et si $r > 0$ le polynôme $P_r = rX + 1$ est dans la boule fermée de centre P et de rayon r et pourtant $P_r \notin A$ car P_r s'annule en $\dfrac{1}{r}$. Ainsi $\forall r > 0,\ B_f(P,r) \not\subset A$ alors que $P \in A$.