TD 21 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2022-2023 **vendredi 03 mars 2023**

21.1 **a.** Comme $(X \geqslant n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (X = k)$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles), par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = \dfrac{p(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-1}$. Par construction, $(T \geqslant k) = (X \geqslant k) \cap (Y \geqslant k)$ pour $k \geqslant 1$. Par indépendance de X et Y, on en déduit que $\mathbb{P}(T \geqslant k) = \mathbb{P}(X \geqslant k)\,\mathbb{P}(Y \geqslant k) = (1-p)^{2(k-1)}$. Comme $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T \geqslant k) - \mathbb{P}(T \geqslant k+1)$ car $(T \geqslant k) = (T = k) \bigsqcup (T \geqslant k+1)$, on en déduit la loi de T donnée, pour $k \in \mathbb{N}^*$, par $\mathbb{P}(T = k) = (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} = (1-p)^{2(k-1)}p(2-p) = \big((1-p)^2\big)^{(k-1)}p(2-p)$.

La variable aléatoire T suit donc la loi géométrique de paramètre $p(2-p) = 1-(1-p)^2$.

b. D'après le cours, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$. La variable aléatoire $\dfrac{1}{X}$ est bornée donc elle admet une espérance finie et, par la formule de transfert, $\mathbb{E}\Big(\dfrac{1}{X}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{p(1-p)^{n-1}}{n} = \dfrac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(1-p)^n}{n}$ et on reconnaît la série logarithmique : $\mathbb{E}\Big(\dfrac{1}{X}\Big) = \dfrac{p}{1-p}\big(-\ln(1-(1-p))\big) = -\dfrac{p\ln(p)}{1-p} = \dfrac{p\ln(1/p)}{1-p}$.

c. • $(T \geqslant k, Z = 0) = (X = Y \geqslant k) = \bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = Y = i)$ donc, par σ-additivité et par indépendance de X et Y, on a $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = 0) = \mathbb{P}(X = Y \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=k}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(i-1)} = \dfrac{p^2\big((1-p)^2\big)^{k-1}}{1-(1-p)^2}$ ce qui se réduit à $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = 0) = \dfrac{p(1-p)^{2k-2}}{2-p}$.

• Si $z \geqslant 1$, on a $(T \geqslant k, Z = z) = \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = i, Y = i+z)\right) \cup \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = i+z, Y = i)\right)$ (réunion disjointe).

Par symétrie, indépendance et σ-additivité, il vient $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = 2\sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = i+z)$ donc $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = 2\sum_{i=k}^{+\infty} p^2(1-p)^{2i+z-2} = \dfrac{p^2(1-p)^{2k+z-2}}{1-(1-p)^2} = \dfrac{2p(1-p)^{2k+z-2}}{2-p}$.

d. • Comme $(Z = 0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = Y = k)$, par incompatibilité des évènements de cette réunion et indépendance de X et Y, on a $\mathbb{P}(Z = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(k-1)} = \dfrac{p^2}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2-p}$.

On aurait aussi pu dire, comme $(T \geqslant 1) = \Omega$, que $(Z = 0) = (T \geqslant 1, Z = 0)$. Ainsi, d'après la question **c.**, on a $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(T \geqslant 1, Z = 0) = \dfrac{p(1-p)^{2.1-2}}{2-p} = \dfrac{p}{2-p}$.

• Si $z \geqslant 1$, $(Z = z) = \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k, Y = k+z)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k+z, Y = k)\right)$ donc, avec les mêmes arguments, $\mathbb{P}(Z = z) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2k+z-2} = \dfrac{2p^2(1-p)^z}{1-(1-p)^2} = \dfrac{2p(1-p)^z}{2-p}$. Ou $(Z = z) = (T \geqslant 1, Z = z)$ comme avant.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{N}$, traitons deux cas :

- Si $z = 0$, $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = \dfrac{p(1-p)^{2k-2}}{2-p} = (1-p)^{2(k-1)} \times \dfrac{p}{2-p} = \mathbb{P}(T \geqslant k)\,\mathbb{P}(Z = z)$.

• Si $z \geqslant 1$, $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = \dfrac{2p(1-p)^{2k+z-2}}{2-p} = (1-p)^{2(k-1)} \times \dfrac{2p(1-p)^z}{2-p} = \mathbb{P}(T \geqslant k)\,\mathbb{P}(Z = z)$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T = k, Z = z) = \mathbb{P}(T = k)\,\mathbb{P}(Z = z)$ car $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T \geqslant k) - \mathbb{P}(T \geqslant k+1)$ et $\mathbb{P}(T = k, Z = z) = \mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) - \mathbb{P}(T \geqslant k+1, Z = z)$ proviennent des réunions disjointes suivantes sur les évènements : $(T \geqslant k) = (T \geqslant k+1) \cup (T = k)$ et $(T \geqslant k, Z = z) = (T \geqslant k+1, Z = z) \cup (T = k, Z = z)$.

On a bien établi que les variables aléatoires T et Z sont indépendantes.

On peut montrer la réciproque (à faire), à savoir que si X, Y sont des variables aléatoires de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles $T = \mathrm{Min}(X, Y)$ et $Z = |X - Y|$ sont indépendantes, alors X et Y suivent une loi géométrique.

21.2 X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc Y aussi par définition de Y car $X + 1 \geqslant 2$ donc $\dfrac{X+1}{2} \geqslant 1$.

Soit un entier $k \in \mathbb{N}^*$, alors $(Y = k) = (X = 2k-1) \cup (X = 2k)$. Par incompatibilité de ces évènements, on obtient $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2k-1) + \mathbb{P}(X = 2k)$. Puisque X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, il vient $\mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^{2k-2}p + (1-p)^{2k-1}p = (1-p)^{2k-2}p(1+1-p)$, ce qui donne après simplification $\mathbb{P}(Y = k) = ((1-p)^2)^{k-1}(1-(1-p)^2) = (1-p(2-p))^{k-1}[p(2-p)]$.

Puisque $1-(1-p)^2 = p(2-p)$, Y suit la loi géométrique de paramètre $p(2-p)$.

21.3 **a.** Pour compléter la collection en m achats, il faut avoir m jouets différents en m achats ce qui se fait de $m!$ façons différentes. Ainsi, par indépendance et équiprobabilité des achats, $q_m = \dfrac{m!}{m^m}$ car il y a m^m possibilités de faire m achats à m jouets. Dans ce raisonnement, on a choisi $\Omega = [\![1; m]\!]^m$, la tribu pleine $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et la probabilité uniforme sur Ω, ainsi en notant $C_m =$ “on complète la collection en m achats”, on a $q_m = \mathbb{P}(C_m) = \dfrac{\mathrm{card}\,(C_m)}{\mathrm{card}\,(\Omega)} = \dfrac{m!}{m^m}$ car C_m est l'ensemble des $m!$ m-listes d'éléments distincts de l'intervalle $[\![1; m]\!]$: tant de précision n'et pas forcément souhaitable à l'oral !
Ainsi, $\dfrac{q_{m+1}}{q_m} = \dfrac{(m+1)!m^m}{m!(m+1)^{m+1}} = \dfrac{(m+1)m^m}{(m+1)^{m+1}} = \dfrac{m^m}{(m+1)^m} = \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{-m}$ or $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{-m} = e^{-m\ln(1+(1/m))}$ avec $\lim\limits_{m\to+\infty} m\ln\left(1+\dfrac{1}{m}\right) = 1$ car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$. Par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{q_{m+1}}{q_m} = \dfrac{1}{e}$.

Si la question avait été de déterminer la probabilité q_n de compléter la collection en exactement n achats, alors $q_n = 0$ si $n < m$. Posons $J_i =$ “le jouet i n'a pas été acheté au cours des n premiers achats”. Alors, l'évènement $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \overline{J_i}$ est justement $T_n =$ “la collection est terminée en au plus n achats”. Si on pose l'évènement $E_n =$ “la collection est terminé en exactement n achats”, on a $E_n = T_n \setminus T_{n-1}$ alors que $T_{n-1} \subset T_n$ donc $q_n = \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(T_n) - \mathbb{P}(T_{n-1})$. Or $\overline{T_n} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} J_i$ ce qui donne avec la formule du crible $\mathbb{P}(\overline{T_n}) = 1 - \mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{m} J_i\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\Big(\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{j=1}^{k} J_{i_j}\Big)\Big)$, et comme la probabilité de $\bigcap\limits_{j=1}^{k} J_{i_j}$ (intersection de k évènements du type J_i) vaut $\left(\dfrac{m-k}{m}\right)^n$ ($m-k$ jouets seulement sur m achats), on a $1 - \mathbb{P}(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\dbinom{m}{k}\left(\dfrac{m-k}{m}\right)^n$. Ainsi $q_n = \sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\dbinom{m}{k}\left(\left(\dfrac{m-k}{m}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{m-k}{m}\right)^n\right)$. C'est beaucoup plus délicat et surtout hors programme.

b. Clairement, si on note X_0 le nombre d'achats qu'il effectue pour l'obtention du premier jouet, on a $X_0 = 1$ (tout jouet est un nouveau jouet au départ). Quand on a déjà obtenu k jouets différents, obtenir un nouveau jouet se fait avec une probabilité $\dfrac{m-k}{m}$. Par indépendance mutuelle des achats de jouets, X_k suit d'après le cours la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\dfrac{m-k}{m}\right)$ (temps d'attente d'un succès).

c. T représente le nombre d'achats nécessaires pour obtenir la collection complète des m jouets. $\mathbb{E}(T)$ est donc la moyenne de T. Si un jouet coûte c, $c\,\mathbb{E}(T)$ représente le coût moyen de la collection complète.
Par linéarité, $\mathbb{E}(T) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \mathbb{E}(X_k) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \dfrac{m}{m-k} = m \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{1}{j} = mH_m$ en posant $j = m-k$.

d. Il est classique, on le fait par comparaison série-intégrale, que $H_m \underset{+\infty}{\sim} \ln(m)$ ou alors on utilise le développement asymptotique $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ (mais hors programme). Ainsi $\mathbb{E}(T) \underset{+\infty}{\sim} m\ln(m)$.
Plus précisément, mais encore moins au programme, on a $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ce qui donne $\mathbb{E}(T) = m\ln(m) + \gamma m + \dfrac{1}{2} + o(1)$ ce qui est très précis.

21.4 **a.** On choisit donc une partie de $\Omega = \mathcal{P}(E)$ de manière aléatoire de sorte que la probabilité l'obtention de la partie A soit proportionnelle à son cardinal. On prend donc $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\forall A \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{A\}) = \alpha\,\mathrm{card}\,(A)$. Pour connaître α, il suffit d'utiliser la relation $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Comme $\Omega = \bigcup\limits_{A\in\Omega} \{A\}$, on a $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \alpha \sum\limits_{A\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{card}\,(A)$. Or il existe $\dbinom{n}{k}$ parties de E de cardinal k ce qui montre que $1 = \alpha \sum\limits_{A\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{card}\,(A) = \alpha \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{\substack{A\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{card}(A)=k}} \mathrm{card}\,(A) = \alpha \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{\substack{A\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{card}(A)=k}} k = \alpha \sum\limits_{k=0}^{n} k\dbinom{n}{k} = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} k\dbinom{n}{k} = 1$.
Or $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} k\dbinom{n}{k} = n\sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n-1}{k-1} = n\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dbinom{n-1}{j} = n2^{n-1}$. Ainsi, $\alpha = \dfrac{1}{n2^{n-1}}$.
En notant $S =$ "obtenir un singleton" en prenant au hasard une partie dans ce cadre, on a donc $S = \bigcup\limits_{x\in E} \{\{x\}\}$ donc $\mathbb{P}(S) = \sum\limits_{x\in E} \mathbb{P}(\{x\}) = \dfrac{1}{n2^{n-1}} \sum\limits_{x\in E} 1 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b. C est une variable aléatoire car $C(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et $\mathcal{A}$ est la tribu pleine. Comme il existe $\dbinom{n}{k}$ parties de cardinal k dans E et que chaque partie A de cardinal k vérifie $\mathbb{P}(\{A\}) = \dfrac{k}{n2^{n-1}}$, on a $\mathbb{P}(C=k) = \dbinom{n}{k}\dfrac{k}{n2^{n-1}}$.
Comme $C(\Omega) = [\![0;n]\!]$, par définition, $\mathbb{E}(C) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(C=k) = \dfrac{1}{n2^{n-1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2\dbinom{n}{k}$. On écrit $k^2 = k(k-1)+k$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\dbinom{n}{k} = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\dbinom{n}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} k\dbinom{n}{k} = n(n-1)\sum\limits_{k=2}^{n} \dbinom{n-2}{k-2} + n\sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n-1}{k-1}$. On reconnaît des binômes de Newton et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\dbinom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$. Ainsi $\mathbb{E}(C) = \dfrac{n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}}{n2^{n-1}} = \dfrac{n+1}{2}$.
On écrit $\mathbb{V}(C) = \mathbb{E}(C^2) - \mathbb{E}(C)^2 = \mathbb{E}((C-1)(C-2)) + 3\,\mathbb{E}(C) - 2 - \mathbb{E}(C)^2$ pour faire apparaître, avec la formule de transfert, $\mathbb{E}((C-1)(C-2)) = \sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)(k-2)\,\mathbb{P}(C=k) = \dfrac{1}{n2^{n-1}} \sum\limits_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\dbinom{n}{k}$. On poursuit classiquement, $\mathbb{E}((C-1)(C-2)) = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{n2^{n-1}} \sum\limits_{k=3}^{n} \dbinom{n-3}{k-3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)2^{n-3}}{n2^{n-1}} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{4}$.
Ainsi, $\mathbb{V}(C) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{4} + \dfrac{3(n+1)}{2} - 2 - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{n-1}{4}$ ce qui est logique car si $n = 1$, il est certain de prendre un singleton donc $C = 1$ est constant donc de variance nulle.

c. Notons U (resp. V et W) l'évènement $(\mathrm{card}\,(A) < \mathrm{card}\,(B))$ (resp. $(\mathrm{card}\,(A) > \mathrm{card}\,(B))$ et enfin

$(\text{card}(A) \geqslant \text{card}(B)))$. Alors $\Omega = U \cup V \cup W$ (ils sont incompatibles) donc $1 = \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(W)$. Or, $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(V)$ par symétrie entre les parties A et B.

L'évènement $Z = (\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B))$ vaut donc $Z = U \cup W$ donc $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(W) = \dfrac{1 + \mathbb{P}(W)}{2}$.

Or $W = \bigcup\limits_{k=0}^{n} W_k$ où $W_k = (\text{card}(A) = \text{card}(B) = k)$. Par incompatibilité des W_k, $\mathbb{P}(W) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(W_k)$. Or par indépendance des choix de A et B, $(\text{card}(A) = k)$ et $(\text{card}(B) = k)$ sont indépendants donc on a $\mathbb{P}(W_k) = \mathbb{P}(\text{card}(A) = k)\,\mathbb{P}(\text{card}(B) = k) = \mathbb{P}(\text{card}(A) = k)^2$ par symétrie entre A et B.

Or $\mathbb{P}(\text{card}(A) = k) = \sum\limits_{\substack{X \in \mathcal{P}(E) \\ \text{card}(X)=k}} \mathbb{P}(\{X\}) = \dbinom{n}{k} \dfrac{k}{n 2^{n-1}}$. Par conséquent, $\mathbb{P}(\text{card}(A) = 0) = 0$ et, si $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(\text{card}(A) = k) = \dfrac{1}{2^{n-1}} \dbinom{n-1}{k-1}$. Ainsi $\mathbb{P}(W) = \dfrac{1}{4^{n-1}} \sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n-1}{k-1}^2 = \dfrac{1}{4^{n-1}} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \dbinom{n-1}{j}\dbinom{n-1}{n-1-j}$ donc $\mathbb{P}(W) = \dfrac{1}{4^{n-1}} \dbinom{2n-2}{n-1}$ d'après la formule de VANDERMONDE. Ainsi, $\mathbb{P}(Z) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{2n-1}} \dbinom{2n-2}{n-1}$.

D'après STIRLING, $\mathbb{P}(W) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\sqrt{n\pi}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(U) = \dfrac{1}{2}$ comme attendu.

21.5 **a.** On note T_k le numéro de la boule tirée au tirage k. On admet l'existence d'un espace probabilisé qui supporte cette suite $(T_k)_{k \geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes (remarque du cours). D'abord $X_n(\Omega) = (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$ car on rajoute la possibilité de ne jamais avoir une autre boule que la première tirée, qu'on note $X_n = +\infty$. De plus, $(X_n = +\infty) = \bigcap\limits_{k=2}^{+\infty} \overline{(X_n = k)}$ par convention et $(X_n = k) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Big((T_1 = i) \cap \cdots \cap (T_{k-1} = i) \cap (T_k \neq i)\Big) \in \mathcal{A}$ pour $k \geqslant 2$ donc X_n est une variable aléatoire car les T_i le sont. Par incompatibilité de ces n évènements, indépendance mutuelle des T_k qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1} \left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \dfrac{n-1}{n^{k-1}}$ pour $k \geqslant 2$.

On vérifie la cohérence de ces résultats car $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \dfrac{n-1}{n^{k-1}} = \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)^j = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{1}{1-(1/n)} = 1$. Ceci justifie que l'évènement $(X_n = +\infty)$ (toujours la même boule) est négligeable comme attendu.

b. $k\,\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ et $\sum\limits_{k \geqslant 2} \dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ converge car le rayon de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant 1} kx^{k-1}$ est égal à 1 et que $\left|\dfrac{1}{n}\right| < 1$. De plus, comme $\forall x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$, on obtient en dérivant $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ donc $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2} - 1$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = (n-1) \times \left(\dfrac{n^2}{(n-1)^2} - 1\right) = \dfrac{2n-1}{n-1}$. Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 2$ ce qu'on subodorait car plus n augmente, plus l'évènement $(X_n = 2)$ devient presque sûr.

c. Comme $X_2 = Y_2$, pour $k \geqslant 2$, on a $(Y_2 = k) = (X_2 = k)$ donc $\mathbb{P}(Y_2 = k) = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ d'après **a.**. On reconnaît cette loi, $Y_2 - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ car $\mathbb{P}(Y_2 - 1 = k) = \mathbb{P}(Y_2 = k+1) = \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

d. Pour $k \geqslant 3$, en notant i le numéro de la première boule tirée, r le premier rang pour lequel on tire une boule de numéro $j \neq i$, comme $6 - i - j$ est le numéro tiré autre que i et j (car $i + j + (6 - i - j) = 1 + 2 + 3 = 6$), on a $(Y_3 = k) = \bigcup\limits_{i=1}^{3} \bigcup\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} \bigcup\limits_{r=2}^{k-1} \left(\left(\bigcap\limits_{a=1}^{r-1} (T_a = i)\right) \cap (T_r = j) \cap \left(\bigcap\limits_{b=r+1}^{k-1} (T_k = i) \cup (T_k = j)\right)\right) \cap (T_k = 6 - i - j)$.

Ainsi, par incompatibilité de tous ces évènements, indépendance mutuelle des tirages et symétrie entre les numéros, $\mathbb{P}(Y_3 = k) = 3 \times 2 \times \sum_{r=2}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{r-1} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-r-1} \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{3^k} \sum_{r=2}^{k-1} 2^{k-r-1} = \frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}$.

À nouveau, comme $Y_3(\Omega) = \{3, 4, 5, \cdots, +\infty\}$, on vérifie que $\sum_{k=3}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_3 = k) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k} = 1$. En effet, on a $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k} = (6/4)\frac{(2/3)^3}{1-(2/3)} - 6\frac{(1/3)^3}{1-(1/3)} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$. Ceci justifie que l'évènement $(Y_3 = +\infty)$ (seulement deux numéros tirés éternellement) est négligeable comme attendu.

21.6 **a.** Par construction, $Y = \mathrm{Min}(X_1, X_2)$ donc, pour $k \in \mathbb{N}$, $(Y > k) = (X_1 > k) \cap (X_2 > k)$. Or on a $(X_1 > k) = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} (X_1 = i)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(X_1 > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)p^i = (1-p) \times \frac{p^{k+1}}{1-p} = p^{k+1}$ par σ-additivité. Comme X_2 suit la même loi que X_1, on a aussi $\mathbb{P}(X_2 > k) = p^{k+1}$. On suppose X_1 et X_2 indépendantes donc $\mathbb{P}(Y > k) = \mathbb{P}(X_1 > k)\,\mathbb{P}(X_2 > k) = p^{2(k+1)}$ (marche encore si $k = -1$). Ainsi, comme $(Y \leqslant k) = \overline{(Y > k)}$, on a $\mathbb{P}(Y \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(Y > k) = 1 - p^{k+1}$. De plus, comme $(Y > k-1) = (Y = k) \sqcup (Y > k)$, on en déduit finalement la loi de Y, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k) = p^{2k} - p^{2(k+1)} = (1-p^2)p^{2k}$.

b. Par construction encore, $Z = Y + X_3$ (il faut le temps que A_3 accède au guichet et le temps qu'elle soit servie). On suppose à nouveau Y et X_3 indépendantes (ou plutôt X_1, X_2, X_3 mutuellement indépendantes et le lemme des coalitions). Si $n \in \mathbb{N}$, $(Z = n) = \bigcup_{k=0}^{n} (Y = k, X_3 = n-k)$ (évènements incompatibles) donc, par indépendance de Y et X_3, il vient $\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} (1-p^2)(p^2)^k(1-p)p^{n-k}$ donc, au final, $\mathbb{P}(Z = n) = (1-p^2)(1-p) \sum_{k=0}^{n} p^{n+k} = (1-p^2)(1-p)p^n \frac{1-p^{n+1}}{1-p} = (1-p^2)p^n(1-p^{n+1})$.

c. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X_3)$. Or $X_3 + 1 \sim \mathcal{G}(1-p)$ par définition donc, d'après le cours, $\mathbb{E}(X_3 + 1) = \frac{1}{1-p}$ d'où $\mathbb{E}(X_3) = \frac{p}{1-p}$. De même, d'après la question **a.**, $Y + 1 \sim \mathcal{G}(1-p^2)$ donc $\mathbb{E}(Y+1) = \frac{1}{1-p^2}$ et $\mathbb{E}(Y) = \frac{p^2}{1-p^2}$. Par conséquent, $\mathbb{E}(Z) = \frac{p}{1-p} + \frac{p^2}{1-p^2} = \frac{p(1+p)+p^2}{1-p^2} = \frac{p(1+2p)}{1-p^2}$.

On pouvait aussi utiliser la loi de Z vue en **b.** et la définition $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Z = n)$ mais cela fait intervenir des calculs de somme de série entière plus délicats.

21.7 **a.** Par construction, $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $(T = n) = \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} (X_k = 1)\right) \cap (X_n = 0)$ est un évènement car les X_i sont des variables aléatoires. Ainsi, T est une variable aléatoire car, de plus $(T = +\infty) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} (X_k = 1)$. Par mutuelle indépendance des X_i, on a $\mathbb{P}(T = n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$. De même, comme $(T > n) = \bigcap_{k=0}^{n} (X_k = 1)$, on a $\mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Comme $(T = +\infty) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (T > n)$ et que la suite $\big((T > n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, par continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(T > n) = 0$ d'après **a.**. Plus simplement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut dire que $(T = +\infty) \subset (T > n)$ donc $\mathbb{P}(T = +\infty) \leqslant \mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ donc, par encadrement, on en déduit que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. On pouvait aussi écrire $(T < +\infty) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (T = n)$ (réunion incompatible) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(T<+\infty)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-(1/2)}=1$ donc on retrouve à nouveau $\mathbb{P}(T=+\infty)=1-\mathbb{P}(T<+\infty)=1-1=0$.

c. On sait d'après le cours que T admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(T>n)$ converge, ce qui est le cas car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}<1$, et qu'on a alors la relation $\mathbb{E}(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T>n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-(1/2)}=1$. De même, T admet une variance finie si et seulement si T admet un moment d'ordre 2, ce qui équivaut par la formule de transfert à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}n^2\,\mathbb{P}(T=n)$. Or $\frac{n^2}{2^{n+1}}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc T admet une variance finie. On sait qu'alors $\mathbb{V}(T)=\mathbb{E}(T^2)-\mathbb{E}(T)^2=\mathbb{E}(T(T-1))+\mathbb{E}(T)-\mathbb{E}(T)^2=\mathbb{E}(T(T-1))$ car $\mathbb{E}(T)=1$. Par le théorème de transfert, $\mathbb{E}(T(T-1))=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\,\mathbb{P}(T=n)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Or $\forall x\in]-1;1[$, $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ qu'on dérive deux fois (sur l'intervalle ouvert de convergence) pour avoir $\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$ et enfin $\frac{2x^3}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n+1}$. En prenant $x=\frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(T(T-1))=\frac{2(1/2)^3}{(1-(1/2))^3}=2$ donc $\mathbb{V}(T)=2$.
Beaucoup plus simplement, $\forall n\geqslant 1$, $\mathbb{P}(T+1=n)=\mathbb{P}(T=n-1)=\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}\times\frac{1}{2}$ donc $T+1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, d'après le cours, $\mathbb{E}(T+1)=\frac{1}{(1/2)}=2$ et $\mathbb{V}(T+1)=\frac{1-(1/2)}{(1/2)^2}=2$. Comme $\mathbb{E}(T+1)=\mathbb{E}(T)+1$ et $\mathbb{V}(T+1)=\mathbb{V}(T)$, on retrouve $\mathbb{E}(T)=1$ et $\mathbb{V}(T)=2$.

d. Par définition de T',

- $(T'=1)=(X_0=1,X_1=1)$ donc, par indépendance de X_0 et X_1, $\mathbb{P}(T'=1)=\frac{1}{4}$.
- $(T'=2)=(X_0=0,X_1=1,X_2=1)$. Par indépendance mutuelle de X_0, X_1, X_2, on a $\mathbb{P}(T'=2)=\frac{1}{8}$.
- De même, $(T'=3)=(X_1=0,X_2=1,X_3=1)$ (peu importe X_0) donc, comme avant, $\mathbb{P}(T'=3)=\frac{1}{8}$.
- À nouveau, $(T'=4)\cup(X_0=1,X_1=1,X_2=0,X_3=1,X_4=1)=(X_2=0,X_3=1,X_4=1)$ donc, par incompatibilité de ces deux évènements, $\mathbb{P}(T'=4)+\frac{1}{32}=\frac{1}{8}$ ce qui donne $\mathbb{P}(T'=4)=\frac{3}{32}$.

e. Il est clair que si on a $T'>n$, on a a fortiori $T'>n-2$ et on ne peut pas avoir $X_{n-1}=X_n=1$ sinon on aurait $T'\leqslant n$. Ceci se résume en l'inclusion $(T'>n)\subset(T'>n-2)\cap\overline{(X_{n-1}=1,X_n=1)}$. Or T' ne dépend que des variables $X_0,\cdots,X_{n-2}$ donc, par le lemme des coalitions, $(T'>n-2)$ et $\overline{(X_{n-1}=1,X_n=1)}$ sont indépendants. Ainsi, $\mathbb{P}(T'>n)\leqslant\mathbb{P}(T'>n-2)\times\mathbb{P}\left(\overline{(X_{n-1}=1,X_n=1)}\right)=\frac{3\,\mathbb{P}(T'>n-2)}{4}$.

f. Comme avant, la suite $\big((T'>n)\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et on a $(T'=+\infty)=\bigcap_{n=0}^{+\infty}(T'>n)$ donc, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(T'=+\infty)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T'=n)$. Comme la suite $\big(\mathbb{P}(T'>n)\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive donc converge vers un réel $\ell\geqslant 0$, en passant à la limite dans l'inégalité $\mathbb{P}(T'>n)\leqslant\frac{3\,\mathbb{P}(T'>n-2)}{4}$, il vient $\ell\leqslant\frac{3\ell}{4}$ ce qui impose $\ell=0$. Ainsi $\mathbb{P}(T'=+\infty)=0$ et, comme attendu, T' est presque sûrement finie.

g. Si on a $T'=n$ pour $n\geqslant 2$, on ne peut pas commencer par $X_0=X_1=1$ sinon ça donnerait $T'=1$. Ainsi, on peut écrire $(T'=n)=(T'=n,X_0=0)\cup(T'=n,X_0=1,X_1=0)$ (réunion de deux évènements incompatibles) donc $\mathbb{P}(T'=n)=\mathbb{P}(T'=n,X_0=0)+\mathbb{P}(T'=n,X_0=1,X_1=0)$. Par les probabilités conditionnelles, $\mathbb{P}(T'=n)=\mathbb{P}(X_0=0)\times\mathbb{P}_{(X_0=0)}(T'=n)+\mathbb{P}(X_0=1,X_1=0)\times\mathbb{P}_{(X_0=1,X_1=0)}(T'=n)$. Si $X_0=0$, c'est comme si on repartait au point de départ après un tirage donc $\mathbb{P}_{(X_0=0)}(T'=n)=\mathbb{P}(T'=n-1)$. De même, si $X_0=1$ et $X_1=0$, on repart au point de départ après deux étapes donc $\mathbb{P}_{(X_0=1,X_1=0)}(T'=n)=\mathbb{P}(T'=n-2)$. On a donc bien $\mathbb{P}(T'=n)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(T'=n-1)+\frac{1}{4}\mathbb{P}(T'=n-2)$.

Pour être totalement "rigoureux", mais la méthode précédente suffit largement à l'oral, on peut écrire l'égalité $(T'=n,X_0=0)=(X_0=0)\cap\Big(\bigcap\limits_{k=2}^{n-1}\overline{(X_k=X_{k-1}=1)}\Big)\cap(X_n=X_{n-1}=1)$ donc, par le lemme des coalitions, $\mathbb{P}(T'=n,X_0=0)=\mathbb{P}(X_0=0)\times\mathbb{P}\bigg(\Big(\bigcap\limits_{k=2}^{n-1}\overline{(X_k=X_{k-1}=1)}\Big)\cap(X_n=X_{n-1}=1)\bigg)$. Mais $\mathbb{P}\bigg(\Big(\bigcap\limits_{k=2}^{n-1}\overline{(X_k=X_{k-1}=1)}\Big)\cap(X_n=X_{n-1}=1)\bigg)=\mathbb{P}\bigg(\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n-2}\overline{(X_k=X_{k-1}=1)}\Big)\cap(X_{n-1}=X_{n-2}=1)\bigg)$ car la famille de variables aléatoires $(X_1,\cdots,X_n)$ suit la même loi que $(X_0,\cdots,X_{n-1})$. Et comme on a $(T'=n-1)=\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n-2}\overline{(X_k=X_{k-1}=1)}\Big)\cap(X_{n-1}=X_{n-2}=1)$ par définition de T', on en déduit que $\mathbb{P}(T'=n,X_0=0)=\mathbb{P}(X_0=0)\,\mathbb{P}(T'=n-1)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(T'=n-1)$. De la même manière, on montre que $\mathbb{P}(T'=n,X_0=1,X_1=0)=\mathbb{P}(X_0=1)\,\mathbb{P}(X_1=0)\,\mathbb{P}(T'=n-2)$.

De nouveau, on retrouve la relation $\mathbb{P}(T'=n)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(T'=n-1)+\frac{1}{4}\mathbb{P}(T'=n-2)$.

h. Comme $\mathbb{P}(T'>0)=1$ et $\mathbb{P}(T'>1)=\frac{3}{4}$ d'après **d.**, par récurrence avec **e.**, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T'>2n)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $\mathbb{P}(T'>2n+1)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(T'>n)$ converge (comme une série géométrique car $P(T'>n)\underset{+\infty}{=}O\Big(\left(\frac{3}{4}\right)^{n/2}\Big)$, ce qui assure l'existence d'une espérance finie pour T' (à valeurs dans $\mathbb{N}$). Et $\mathbb{E}(T')=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\,\mathbb{P}(T'=n)=\mathbb{P}(T'=1)+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n\Big(\frac{1}{2}\mathbb{P}(T'=n-1)+\frac{1}{4}\mathbb{P}(T'=n-2)\Big)$ d'après **g.**. Comme les deux séries convergent, $\mathbb{E}(T')=\mathbb{P}(T'=1)+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-1+1)\,\mathbb{P}(T'=n-1)+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-2+2)\,\mathbb{P}(T'=n-2)\Big)$ ce qui devient, après séparation des séries convergentes et ré-indexation et comme $T'(\Omega)\subset\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T'=n)=1$ d'après **f.**, $\mathbb{E}(T')=\mathbb{P}(T'=1)+\frac{1}{2}\mathbb{E}(T')+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\mathbb{E}(T')+\frac{1}{2}$.

On trouve finalement, puisque l'on sait que $\mathbb{P}(T'=1)=\frac{1}{4}$, la valeur $\mathbb{E}(T')=5$.

21.8 **a.** Soit un entier $n\in\mathbb{N}^*$, par définition d'une probabilité conditionnelle, on a déjà $u_n\in[0;1]$. Si on avait $u_n=\dfrac{\mathbb{P}(X=n,X>n-1)}{\mathbb{P}(X>n-1)}=1$, on aurait $\mathbb{P}(X=n,\ X>n-1)=\mathbb{P}(X>n-1)=\mathbb{P}(X=n)$ car $(X=n,\ X>n-1)=(X=n)$. Or $(X>n-1)=(X=n)\cup(X>n)$ et ces deux évènements sont incompatibles donc $\mathbb{P}(X>n-1)=\mathbb{P}(X=n)+\mathbb{P}(X>n)$ et on aurait donc $\mathbb{P}(X>n)=0$ contrairement à l'hypothèse de l'énoncé. On a montré par l'absurde que $u_n\neq 1$ et on a bien $u_n\in[0;1[$.

De plus, comme $(X>n-1)=(X>1)\cap(X>2)\cap\cdots\cap(X>n-1)$, d'après la formule des probabilités composées et car $\bigcap_{i=1}^{k-1}(X>i)=(X>k-1)$ pour $k\in[\![2;n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}(X>n-1)=\mathbb{P}(X>1)\prod_{k=2}^{n-1}\mathbb{P}(X>k|X>k-1)$. À nouveau, pour $k\in[\![1;n-1]\!]$, on a $(X>k-1)=(X=k)\cup(X>k)$ donc $\mathbb{P}(X>k-1)=\mathbb{P}(X=k)+\mathbb{P}(X>k)$ ce qui, en divisant par $\mathbb{P}(X>k-1)$, devient $1=\mathbb{P}(X=k|X>k-1)+\mathbb{P}(X>k|X>k-1)$ puis $\mathbb{P}(X>k|X>k-1)=1-u_k$. Ainsi, comme $\mathbb{P}(X>1)=\mathbb{P}(X>1|X>0)=1-u_1$ car $(X>0)=\Omega$ sachant que X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a bien $\mathbb{P}(X>n-1)=\prod_{k=1}^{n-1}(1-u_k)$.

b. D'après la question **a.**, $\ln(\mathbb{P}(X>n-1))=\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-u_k)$. Or la suite d'évènements $\big((X>n-1)\big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et $\bigcap_{n=1}^{+\infty}(X>n-1)=\emptyset$ car X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc, par continuité décroissante, on a $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X>n-1)=\mathbb{P}(\emptyset)=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}\ln(\mathbb{P}(X>n-1))=-\infty$ ce qui justifie avec la relation précédente que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln(1-u_n)$ diverge car la suite de ses sommes partielles tend vers $-\infty$. Traitons deux cas :

- si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0, alors $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ diverge grossièrement.
- si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, alors $\ln(1-u_n)\underset{+\infty}{\sim}-u_n<0$ et, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ diverge.

Dans les deux cas, on a la même conclusion, $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ diverge.

c. On admet qu'une telle variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ existe si on arrive à trouver une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n\in[0;1]$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}p_n=1$ et qu'on impose $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y=n)=p_n$.

Posons, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $p_n=\prod_{k=1}^{n-1}(1-v_k)-\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)=v_n\prod_{k=1}^{n-1}(1-v_k)$ (car Y joue ici le rôle du X de la question **a.** où on avait $\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(X>n-1)-\mathbb{P}(X>n)$). Par hypothèse, on a bien $p_n\in[0;1[$. De plus, $p_1=v_1$, $p_2=v_2(1-v_1)$ donc $p_1+p_2=v_1+v_2-v_1v_2=1-(1-v_1)(1-v_2)$, ce qui nous fait conjecturer que $\sum_{k=1}^{n}p_k=1-\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)$. Cette relation est vérifiée si $n=1$. Supposons-la vraie pour un entier $n\in\mathbb{N}^*$, alors $p_{n+1}=v_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)$ donc, par hypothèse de récurrence, il vient $\sum_{k=1}^{n+1}p_k=p_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}p_k=v_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)+1-\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)=1-\prod_{k=1}^{n+1}(1-v_k)$. Par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}p_k=1-\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)$. Or $\ln\Big(\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)\Big)=\sum_{k=1}^{n}\ln(1-v_k)\leqslant-\sum_{k=1}^{n}v_k$ par l'inégalité classique $\ln(1+x)\leqslant x$ pour $x>-1$. Comme $\sum_{n\geqslant 1}v_n$ diverge, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty}\ln\Big(\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)\Big)=-\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)=0$ et on a donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{n=1}^{+\infty}p_n=1$ comme attendu.

Il existe donc une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y=n)=p_n$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y>n-1)=\sum_{k=n}^{+\infty}p_k=1-\sum_{k=1}^{n-1}p_k=\prod_{k=1}^{n-1}(1-v_k)>0$ car $(Y>n-1)=\bigcup_{k=n}^{+\infty}(Y=k)$ (réunion incompatible) et $\forall k\in[\![1;n-1]\!]$, $v_k<1$ par hypothèse. Enfin, avec ce qui précède, on obtient bien la relation $\mathbb{P}(Y=n|Y>n-1)=\dfrac{\mathbb{P}(Y=n,Y>n-1)}{\mathbb{P}(Y>n-1)}=v_n$ car $(Y=n,Y>n-1)=(Y=n)$.