♠ ♡

PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2022 / 2023

♢ ♣

EXERCICES PAR THÈME

- 1 : intégrales et analyse (8 exercices : 1-8) ..... page 4

- 2 : algèbre linéaire et générale (10 exercices : 9-18) ..... page 6

- 3 : séries numériques, séries de fonctions, séries entières (29 exercices : 19-47) ..... page 8

- 4 : espaces vectoriels normés, courbes, dérivabilité (12 exercices : 48-59) ..... page 14

- 5 : réduction des endomorphismes (47 exercices : 60-106) ..... page 18

- 6 : théorèmes de domination (17 exercices : 107-123) ..... page 28

- 7 : espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens (16 exercices : 124-139) ..... page 32

- 8 : probabilités et variables aléatoires (24 exercices : 140-163) ..... page 36

- 9 : équations différentielles et calcul différentiel (10 exercices : 164-173) ..... page 42

EXERCICES PAR CONCOURS

- 1 : X ..... (7 exercices)

numéros 9-10, 19, 60, 107, 164

- 2 : ENS Cachan /Rennes ..... (17 exercices)

numéros 1, 11, 48-52, 62-63, 108, 124, 140-142, 165-167

- 3 : Centrale Maths 1 ..... (34 exercices)

numéros 2-3, 12-13, 20-25, 53-55, 64-70, 109, 125-130, 143-147, 168-169

- 4 : Mines ..... (61 exercices)

numéros 4-8, 14-18, 26-34, 56-59, 71-86, 110-117, 131-134, 148-154, 170-172

- 5 : CCINP ..... (42 exercices)

numéros 35-45, 87-102, 118-121, 135-138, 155-160, 173

- 6 : Mines-Télécom ..... (10 exercices)

numéros 46-47, 103-105, 122-123, 139, 161-162

- 7 : Navale ..... (2 exercices)

numéros 106, 163

ORAUX 2023 THÈME 1
INTÉGRALE ET ANALYSE

1 *ENS Cachan PSI 2022* Camille Pucheu I

Soit C une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

a. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C qui converge vers $\mathrm{Sup}(C)$.

On pose $X = \{|x-y| \mid (x,y) \in C^2\}$.

b. Montrer que X admet une borne inférieure et une borne supérieure.

c. Exprimer $\mathrm{Sup}(X)$ en fonction de $\mathrm{Sup}(C)$ et de $\mathrm{Inf}(C)$.

2 *Centrale Maths1 PSI 2022* Lola Belle Wangue

Soit f et g deux fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 f^n(t)g(t)dt$ et $u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

a. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

c. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Indication : on comparera $a_n a_{n+2}$ et a_{n+1}^2.

d. Montrer si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right) = \ell$.

e. Étudier la monotonie de la suite $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 *Centrale Maths1 PSI 2022* Jade Mirassou

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$.

a. Montrer que le domaine de définition de f est $I = \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$.

b. Montrer que f est paire.

On admet que f est de classe C^2 sur I et que $f''(x)$ s'obtient par la formule de Leibniz.

c. Montrer que $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant \pi$.

d. Montrer que $\forall x \in I \cap \mathbb{R}_+,\ \left|\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} - \frac{1}{(1/2)-x}\right| \leqslant 1$.

e. En déduire que $f(x) \underset{\frac{1}{2}^-}{\sim} \dfrac{1}{(1/2)-x}$.

4 *Mines PSI 2022* Tony Géreaud II

Soit une fonction continue $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2,\ f(xy) = f(x)+f(y)$ (1).

a. Calculer $f(1)$. Pour $x \in]0;+\infty[$, comparer $f(x)$ et $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt$.

c. Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et en déduire f.

5 *Mines PSI 2022* Colin Herviou-Laborde I

a. Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

6 *Mines PSI 2022* Thomas Lanne II

Étudier les convergences des intégrales $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$ et $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$.

7 *Mines PSI 2022* Anatole Rousset I

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

a. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t}dt$.

b. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t}dt$.

c. Établir $\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t + i\sin(\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}dt = -\frac{1}{2}\ln\left(2 - 2\cos(\theta)\right) + i\operatorname{Arctan}\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + i\operatorname{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$.

d. En déduire que si $\theta \in]0;\pi[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\ln\left(2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

8 *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche II

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer l'existence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t}t^n dt$.

b. Trouver la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4})t^n dt$.

ORAUX 2023 THÈME 2
ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

9 *X PSI 2022* Olivier Courmont I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})^2$ tel que $A^2 = B^2 = 0$ et $\text{rang}(A) \geqslant n$ et $\text{rang}(B) \geqslant n$.

Montrer que A et B sont semblables.

10 *X PSI 2022* Lucas Lacampagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u(e_i) = e_{i+1}$ si $i \in [\![1; n-1]\!]$ et $u(e_n) = 0$.

Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par u.

11 *ENS Cachan PSI 2022* Olivier Courmont

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n = \{\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}\}$ avec $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$. On pose $\omega_n = \omega_0$.

Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{C}$.

Pour $(\Phi, \Psi) \in E^2$, on pose $< \Phi, \Psi >= \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \Phi(\omega)\overline{\Psi(\omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(\omega_k)\overline{\Psi(\omega_k)}$ et $||\Phi|| = \sqrt{< \Phi, \Phi >}$.

Pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, on définit $\chi_k : \mathbb{U}_n \to \mathbb{C}$ par $\chi_k(z) = \dfrac{z^k}{\sqrt{n}}$.

Si $\Phi \in E$, on définit $\hat{\Phi} : \mathbb{U}_n \to \mathbb{C}$ par $\hat{\Phi}(\omega_k) =< \Phi, \chi_k >$ pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$.

a. Comparer $\chi_m(\omega_k)$ et $\chi_k(\omega_m)$ pour $(k, m) \in [\![0; n-1]\!]^2$.

b. Calculer $< \chi_m, \chi_k >$ pour $(k, m) \in [\![0; n-1]\!]^2$.

c. Calculer $\hat{\chi_k}$ et $\hat{\hat{\chi_k}}$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$.

d. Montrer que $\forall \Phi \in E,\ \Phi = \sum_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\hat{\chi_\ell}$.

e. Montrer que $\forall (\Phi, \Psi) \in E^2,\ < \hat{\Phi}, \hat{\Psi} >=< \Phi, \Psi >$.

f. En déduire que E est de dimension n, que l'application $L : E \to E$ définie par la relation $L(\Phi) = \hat{\Phi}$ est un automorphisme de E et que l'on a $\forall \Phi \in E,\ ||\hat{\Phi}|| = ||\Phi||$.

12 *Centrale Maths1 PSI 2022* Olivier Baesen et Lucas Lacampagne

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} (X - k)$.

a. Montrer qu'il existe un unique $r_n \in]0; 1[$ tel que $P_n'(r_n) = 0$.

b. Trouver une expression sous forme de somme de $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus [\![0; n]\!]$.

c. Déterminer la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

d. Trouver un équivalent de r_n.

e. Comment établir que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$?

13 *Centrale Maths1 PSI 2022* Naïs Baubry

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = P'$.

a. Trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u ne contient que des 0 et des 1.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.

c. Montrer que si Q ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, alors l'unique polynôme P de la question précédente a la même propriété.

d. Montrer que si P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ alors Q l'est également.

14 *Mines PSI 2022* Louis Bardinet II

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne des fonctions $f_1, \cdots, f_n$ de E.
Pour une famille $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la matrice $A_x = \left(f_i(x_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si $\det(A_x) \neq 0$, alors la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E.

b. Réciproquement, montrer par récurrence que si la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E, alors il existe une famille de réels $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\det(A_x) \neq 0$.

15 *Mines PSI 2022* Anna Decrock II

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \ker(f^n)$ et $I_n = \operatorname{Im}(f^n)$. On pose aussi $K = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$ et $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$.

a. Montrer que I et K sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Montrer l'existence d'un entier $N \leqslant \dim(E)$ tel que $\forall k \geqslant 0,\ K_{k+N} = K_N$.

c. Montrer que $E = I \oplus K$, que K et I sont stables par f.

d. Montrer que f_I est un automorphisme de I et que f_K est nilpotent.

16 *Mines PSI 2022* Thibault Le Gal I

Soit E espace de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

a. Montrer que si E est de dimension finie, $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

b. Qu'en est-il en dimension quelconque ?

17 *Mines PSI 2022* Baptiste Savarit II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AMA$.
Calculer $\det(\varphi)$. Indication : on pourra s'intéresser à $f : M \mapsto MA$ et $g : M \mapsto AM$.

18 *Mines PSI 2022* Matis Viozelange II

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n ($u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$).

a. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

b. Déterminer $\ker(u^k)$ pour tout entier $k \in [\![0; n]\!]$.

c. Montrer que les seuls sous-espaces de E stables par u sont les $\ker(u^k)$ avec $k \in [\![0; n]\!]$.

ORAUX 2023 THÈME 3
SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

19 *X PSI 2022* Olivier Courmont III

Justifier la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n^2+5n+3}{2^n}$ et calculer sa somme.

20 *Centrale Maths1 PSI 2022* Marius Desvalois et Thibault Sourdeval

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On note R le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$.

b. Trouver une suite réelle bornée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
- $R = 2$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.
- $R = 1$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.
- $R = 1$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

c. Montrer que $R \geqslant 1$.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ et calculer sa valeur.

e. Pour $t > 1$, montrer l'existence de $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(x) dx$ et trouver une relation entre $g(t)$ et $S\left(\frac{1}{t}\right)$.

21 *Centrale Maths1 PSI 2022* Achille Domens

On pose $F(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$.

a. Montrer que F est définie et développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Donner son développement.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.

c. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de F en $+\infty$.

22 *Centrale Maths1 PSI 2022* Colin Herviou-Laborde

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant n$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.

a. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge et trouver sa limite.

c. Tracer le graphe de $x \mapsto \ln(1+x)$, donner l'équation de la tangente à ce graphe en $(0,0)$.

d. Établir que $\forall x \in]-1;0[,\ \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2}$.

e. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

23 *Centrale Maths1 PSI 2022* Paul Lafon

a. Donner un exemple de série entière de rayon 1 et dont la fonction somme est majorée sur $[0;1[$.

Soit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$ et $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

b. Montrer que f est définie sur $]-1;1[$.

c. Montrer que $f(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$.

d. Soit une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est définie sur $]-1;1[$ et $g(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$.

La suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend-elle vers 0 ? Indication : reprendre la question **a.**.

24 *Centrale Maths1 PSI 2022* Peio Lanot

Soit $A \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, $f : I =]-A;A[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-A;A[,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

a. Montrer que f est développable en série entière sur I. Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor reste intégral sur les intervalles $]-A;0[$ et $]0;A[$.

b. Montrer que $g = e^f$ est aussi développable en série entière sur I.

Question de cours : que dire de la dérivée n-ième d'un produit de fonctions ?

25 *Centrale Maths1 PSI 2022* Manon Odelot

Soit $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x|}{n(1+n^2|x|)}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Étudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.

Questions de cours :

- Donner la formule de Taylor reste intégral.
- Donner le théorème des valeurs intermédiaires.

26 *Mines PSI 2022* Olivier Baesen I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_\alpha : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2 - 2\mathrm{ch}\,(\alpha)x + 1}\right)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f_α.

b. Déterminer le développement en série entière de f_α au voisinage de 0.

27 *Mines PSI 2022* Louis Bardinet I

Soit $u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ si $n \geqslant 2$.

a. Étudier la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. A t-on convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$?

c. Que peut-on dire de la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$?

28 *Mines PSI 2022* Lola Belle Wangue I

Soit $a \in]0;1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

a. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que f est égale à sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = g(ax)$.

29 *Mines PSI 2022* Peio Lanot II

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}x^n$.

b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$.

c. Montrer que f est solution d'une équation différentielle (E).

d. Résoudre (E) et en déduire une expression simple de $f(x)$.

30 *Mines PSI 2022* Paul Mayé I

En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c. Trouver un équivalent de $f'(x)$, puis de $f(x)$, quand x tend vers 0^+.

d. Quelles sont les variations de f ?

e. Trouver les limites de f en $\pm\infty$.

f. Tracer la courbe représentative de f.

31 *Mines PSI 2022* Margaux Millaret II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$.

a. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

b. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

c. Donner sans preuve la valeur de C. Puis le prouver avec les intégrales de Wallis.

32 *Mines PSI 2022* Camille Pucheu II

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

a. Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b. Qu'en déduire sur le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}x^n$?

On pose dans la suite de l'exercice la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$.

c. Trouver l'expression de $f''(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$ pour $x \in]-R;R[$.

d. En déduire une expression de a_n sous forme de somme.

33 *Mines PSI 2022* Alban Soyez I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Trouver le domaine de continuité de f, son domaine de dérivabilité.

c. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

34 *Mines PSI 2022* Matis Viozelange I

Soit $\lambda \in]-1;1[$, on s'intéresse à l'équation (E) : $f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$ sur $\mathbb{R}$.

a. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

c. Trouver toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

35 *CCINP PSI 2022* Amandine Darrigade et Thomas Lanne I

Soit les trois suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$, $(w_n)_{n\geqslant 1}$ et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}},\ v_n = \frac{(-1)^n}{n}u_n,\ w_n = \frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad x_n = (-1)^n w_n.$$

a. Justifier que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et qu'elle tend vers 0.

b. Justifier que $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

c. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$?

d. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$?

36 *CCINP PSI 2022* Marius Desvalois II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ sous réserve de convergence.

a. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.

b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$.

c. Pour $x \in]-R;R[$, trouver a, b et c tels que : $\forall t \in [0;1]$, $\frac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \frac{a}{1-xt} + \frac{at}{1+t^2} + \frac{c}{1+t^2}$.

d. En déduire une expression compacte de $S(x)$ pour $x \in]-R;R[$.

e. Montrer que S est continue sur $[-1;0]$ et en déduire $S(-1)$.

37 *CCINP PSI 2022* Léo Ducos-Tourenne I et Anatole Rousset I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$.

a. Donner le domaine de définition de f.

b. Donner le domaine de dérivabilité de f.

c. Trouver un équivalent de f en 1^-.

38 *CCINP PSI 2022* Colin Herviou-Laborde I

On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!}x^n$.

a. Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.

b. Montrer que f est définie sur $I = \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$.

c. Prouver que f est solution de (E) : $y' = y^2$ sur I.

d. En déduire la valeur de u_n pour tout entier naturel n.

39 *CCINP PSI 2022* Louis Lacarrieu II

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{a_n}{(1+a_1)\times\cdots\times(1+a_n)}$.

a. Calculer $u_1 + u_2$. Généraliser.

b. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

c. Dans cette question, on suppose que $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

40 *CCINP PSI 2022* Paul Lafon I

Soit $a \in \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1-e^{-nx}}{x^a(1+nx)}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

a. Si $a \in [0;1]$, montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers une fonction f à déterminer.

b. Pour quelles valeurs de a a-t-on convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0;1]$?

c. Soit $a \in [0;1]$, montrer que l'intégrale I_n existe.

d. Soit $a \in [0;1[$, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

e. Étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $a = 1$.

41 *CCINP PSI 2022* Paul Mayé I

Soit $F : x \mapsto -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt$. On rappelle que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de F.

b. Montrer que $\forall x \in [0;1],\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

c. Montrer que $\forall x \in]0;1[,\ F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

42 *CCINP PSI 2022* Margaux Millaret II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$.

a. Pour quelles valeurs de x la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge-t-elle ?

b. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\operatorname{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$. Qu'en déduit-on ?

c. Déterminer le domaine de définition D de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Y a-t-il convergence absolue de $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ pour $x \in D$?

d. Y a-t-il convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur D ?

e. Soit $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $I_a = \mathbb{R} \setminus [-a;a]$?

43 *CCINP PSI 2022* Élouan Princelle I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. Déterminer les valeurs de α telles que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

c. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx$.

d. Peut-on intervertir les symboles "intégrale" et "limite" comme ci-dessus si $\alpha = \frac{3}{2}$?

44 *CCINP PSI 2022* Camille Pucheu II

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi : I = [-a; a] \to \mathbb{R}$ continue, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |\varphi(x)| \leqslant c|x|$.
On cherche les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues telles que (P) : $f(0) = 0$ et $\forall x \in I,\ f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$.

a. Montrer que $\sum_{n \geqslant 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ converge pour $x \in I$ et que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est continue sur I.

b. Montrer que S est solution de (P).

c. Montrer que la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle.

d. En déduire l'ensemble des solutions de (P).

e. Si on suppose φ de classe C^1 sur I, montrer que S est aussi de classe C^1 sur I.

45 *CCINP PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche I

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

46 *Mines-Télécom PSI 2022* Jade Mirassou II

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit, en cas d'existence, $u_k = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^k dx$.

a. Étudier la monotonie de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

b. Déterminer la limite de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

c. Donner une expression simple de $u_k + u_{k+2}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

d. Calculer u_0 et u_1. En déduire des expressions de u_{2n} et u_{2n+1} sous forme de somme.

e. En déduire la convergence et la valeur de la somme de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

47 *Mines-Télécom PSI 2022* Paul Sterlin II

Soit $t \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n^2 + t^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Étudier la continuité de f sur D.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et trouver un équivalent de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

ORAUX 2023 THÈME 4
ESPACES VECTORIELS NORMÉS, GÉOMÉTRIE ET DÉRIVABILITÉ

48 *ENS Cachan PSI 2022* Colin Herviou-Laborde I

Soit I un segment de $\mathbb{R}$, $E = C^0(I, \mathbb{R})$ et $f \in E$.
On se donne une forme linéaire $u : E \to \mathbb{R}$. On dit que u est positive si on a $u(f) \geqslant 0$ pour toute fonction positive $f \in E$. On pose $e : x \to 1 \in E$.

a. Si u est positive, montrer que $\forall f \in E,\ |u(f)| \leqslant u(|f|)$.

b. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall f \in E,\ |u(f)| \leqslant C||f||_{\infty,I}$.

c. Calculer $\underset{\substack{f \in E \\ f \neq 0}}{\text{Sup}} \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}}$.

49 *ENS Cachan PSI 2022* Colin Herviou-Laborde II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $p_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $p_2(M) = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2}$ si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer p_2 est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Est-ce qu'on peut munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace euclidien telle que la norme euclidienne associée soit p_2. Si oui, donner ce produit scalaire.

c. Démontrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||MX||_2 \leqslant p_2(M)||X||_2$.

d. Calculer $\underset{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}}{\text{Sup}} \dfrac{||MX||_2}{||X||_2}$.

50 *ENS Cachan PSI 2022* Margaux Millaret I

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a. Montrer que si f est lipschitzienne, alors f est continue.

b. Est-ce que le fait que f soit lipschitzienne implique que f soit dérivable ?

51 *ENS Cachan PSI 2022* Camille Pucheu II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et le produit scalaire défini dans $\mathbb{R}^n$ par $< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$.
On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour ce produit scalaire canonique).

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que si $\forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + bt \geqslant 0$, alors $b = 0$.

b. Soit B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < Bx, x > \geqslant 0$. Montrer que pour un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $< Bx_0, x_0 >= 0$, on a $Bx_0 = 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique à laquelle on associe $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $F(x) =< Ax, x >$.

c. Montrer que $\underset{x \in S}{\text{Inf}}\, F(x)$ existe et que cette borne inférieure est atteinte.

d. Soit $\lambda_1 = \underset{x \in S}{\text{Min}}\, F(x)$ et $e_1 \in S$ tel que $\lambda_1 =< Ae_1, e_1 >$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < (A - \lambda_1 I_n)x, x > \geqslant 0$.

e. Montrer que λ_1 est la plus petite valeur propre de A.

52 *ENS Cachan PSI 2022* Maxence Rossignol II

On veut installer une ligne téléphonique entre N villes représentées par des points $a_1, \cdots, a_N$ de $\mathbb{R}^2$. On adopte un réseau téléphonique "en étoile". L'objectif est de trouver où placer le centre de l'étoile (en x) pour avoir la longueur totale de cable la plus petite possible.

On pose $J(x) = \sum_{i=1}^{n} ||x - a_i||$ et $\widetilde{J}(x) = \sum_{i=1}^{n} ||x - a_i||^2$.

a. La fonction $\widetilde{J}$ est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? Admet-elle un minimum global sur $\mathbb{R}^2$? Caractériser géométriquement le point $\widetilde{x_0}$ minimisant $\widetilde{J}$.

b. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ \forall t \in [0;1],\ J(tx+(1-t)y) \leqslant tJ(x)+(1-t)J(y)$ et que cette inégalité devient stricte si les points $a_1, \cdots, a_N$ ne sont pas alignés.

c. La fonction J admet-elle un unique minimum global sur $\mathbb{R}^2$?

d. Déterminer le minimum de J pour $N \geqslant 3$ dans le cas où les points $a_1, \cdots, a_N$ sont alignés.

53 *Centrale Maths1 PSI 2022* Olivier Courmont II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M. On suppose de plus que toutes les matrices M_k sont diagonalisables.

a. La matrice M est-elle diagonalisable ?

b. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$ et P unitaire, montrer que l'on a l'équivalence

$$(P \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]) \iff (\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^n).$$

c. La matrice M est-elle trigonalisable ?

54 *Centrale Maths1 PSI 2022* Jimmy Guertin

Soit l'arc paramétré Γ par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$ pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Soit $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $M = M(t) = (x(t), y(t)) \in \Gamma$, calculer la longueur de l'arc entre $M(0) = (1, 0)$ et M.

Soit $n+1$ points de l'arc Γ notés $M_0, \cdots, M_n$ tels que $M_0 = M(0)$, $M_n = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et les longueurs de l'arc entre M_k et M_{k+1} ne dépendent pas de $k \in [\![0; n]\!]$.

b. Exprimer $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{OM_k}{n+1}$ où O est l'origine du repère.

c. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

55 *Centrale Maths1 PSI 2022* Florian Picq

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(A, B) \in E^2$ telles que $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on pose $< A, B >= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$ et $||A|| = \sqrt{< A, A >}$.

a. Montrer que $\forall (A, B) \in E^2,\ < A, B >= \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$.

b. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^m$. En déduire que $\forall (A, B) \in E^2,\ ||AB|| \leqslant ||A||\,||B||$.

Soit $A \in E$ inversible et $F : E \to E$ définie par $F(M) = 2M - MAM$.

On considère une suite de matrices $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $AM_0 = M_0A$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ M_{p+1} = F(M_p)$.

c. Montrer que si $||I_n - AM_0|| < 1$ alors A est inversible et $\lim_{p\to+\infty} M_p = A^{-1}$.

56 *Mines PSI 2022* Amandine Darrigade II

Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$, $f \in E$ et $\phi(f) : x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$.

a. Montrer que ϕ définit un endomorphisme de E.

b. Déterminer le plus petit réel K_1 tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_1||f||_\infty$.

c. Déterminer le plus petit réel K_2 tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_2||f||_1$.

57 *Mines PSI 2022* Paul Lafon I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n(A) = I_2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k}A^k$.

a. Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $|a| < 1$ et $|b| < 1$, montrer que la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b. Si $A = \lambda I_2 + N$ avec $|\lambda| < 1$, $N \neq 0$ et $N^2 = 0$, montrer que la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c. Si $\forall \lambda \in Sp(A),\ |\lambda| < 1$, montrer que $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = I_2 + A$.

58 *Mines PSI 2022* Thibault Le Gal II

Soit f et g deux fonctions continues de $[0;1]$ dans $[0;1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

On pose $A = \{x \in [0;1] \mid f(x) = x\}$.

a. Montrer que $A \neq \emptyset$ et que A admet un minimum et un maximum.

b. En déduire l'existence d'un réel $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

59 *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, N est dire nilpotente d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ si $N^k = 0$ et $N^{k-1} \neq 0$.

On pose $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

a. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice k, montrer qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(X, NX, \cdots, N^{k-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En déduire que $k \leqslant n$.

b. On suppose que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice n, montrer que N est semblable à J_n.

c. Soit A, B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

Montrer que $A + B$ est nilpotente et que $I_n + A$ est inversible.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'exponentielle de la matrice M, notée $\exp(M)$ ou e^M, par $e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

d. Montrer que e^{J_n} est inversible.

e. Montrer que $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'indice n.

f. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que $Pe^{J_n}P^{-1} = e^{PJ_nP^{-1}}$.

g. Montrer qu'il existe une matrice $\tilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n = \tilde{N}e^{\tilde{N}}$.

ORAUX 2023 THÈME 5
RÉDUCTION

60 *X PSI 2022* Olivier Courmont IV

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

a. Calculer χ_{A_m}.

b. Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables ?

c. Traiter la diagonalisabilité de A_m dans le cas général.

61 *X PSI 2022* Lucas Lacampagne III

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

a. Soit $n = 2p \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

Indication : considérer les petites valeurs de $\deg(P)$.

b. Que se passe-t-il si on suppose $n = 2p+1$ impair ?

62 *ENS Cachan PSI 2022* Louis Bardinet

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathcal{C}_k = \left\{(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \mid \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \binom{k}{\ell} A^{k-\ell} B^\ell = 0\right\}$.

a. Montrer que $\mathcal{C}_k \neq \{(0,0)\}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

b. Montrer que si $(A,B) \in \mathcal{C}_k$, alors $({}^tB, {}^tA) \in \mathcal{C}_k$.

c. Montrer que $\mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}_{k+1}$ pour tout $k \geqslant 1$.

d. Montrer que $\sum_{\ell=j}^{k-i} (-1)^\ell \binom{\ell}{k} \binom{k-\ell}{i} \binom{\ell}{j} = 0$. Indication : montrer que $\binom{a}{b}\binom{b}{d} = \binom{a}{d}\binom{a-d}{a-b}$.

e. Montrer que si $(A,B) \in \mathcal{C}_k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(A - \lambda I_n, B - \lambda I_n) \in \mathcal{C}_k$.

f. Montrer que si $(A,B) \in \mathcal{C}_k$, alors A et B ont les mêmes valeurs propres. En déduire que $\chi_A = \chi_B$ si $n = 2$.

g. Montrer que si $(A,B) \in \mathcal{C}_k$ et que A et B sont symétriques réelles, alors $A = B$.

63 *ENS Cachan PSI 2022* Jimmy Guertin II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ avec $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

64 *Centrale Maths1 PSI 2022* Louis Bardinet

Soit $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, E un $\mathbb{R}$-espace de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^2 + 2f + \alpha \,\mathrm{id}_E = 0$.

a. Si $n = 2$ et $\alpha = 1$, que dire de f ?

On suppose dans la suite que $\alpha > 1$.

b. Montrer que n est pair.

c. Si $n = 2$, construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$.

d. Si $n = 2p > 2$, construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale par blocs.

65 *Centrale Maths1 PSI 2022* Noé Chassagne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = 0$. Pour une matrice nilpotente, on note $p = \mathrm{Min}(\{k \in \mathbb{N}^* \mid M^k = 0\})$ son indice de nilpotence.

Soit $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n = n_1 + n_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $N_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})$ et $N_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$ deux matrices nilpotentes. On pose $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + N_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + N_2 \end{pmatrix}$.

a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = 0$. Montrer que $M^n = 0$.

b. Calculer χ_A et donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur N_1 et N_2 pour que A soit diagonalisable.

Questions de cours :

- Qu'est-ce que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X entière ?
- Donner le lien entre cette fonction génératrice, l'espérance de X.
- Faire de même avec la variance de X.

66 *Centrale Maths1 PSI 2022* Léo Ducos-Tourenne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^p = 0$. On définit l'endomorphisme v de E par $v = \sum_{k=0}^{p-1} u^k$.

a. Montrer que v est inversible.

b. Trouver l'expression de v^{-1} en fonction de u.

c. Montrer que $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u)$.

d. Déterminer $\mathrm{Sp}(v)$.

e. À quelle condition nécessaire et suffisante l'endomorphisme v est diagonalisable ?

67 *Centrale Maths1 PSI 2022* Thibault Le Gal et Élouan Princelle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r_1, \cdots, r_n$ des complexes distincts. Soit $B = \prod_{k=1}^{n} (X - r_k) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, la matrice $C_B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour $i \in [\![1; n]\!]$, $L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - r_j}{r_i - r_j}$.

Soit $A \in \mathbb{C}[X]$, on définit l'application $\Phi_A : \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}_{n-1}[X]$ par, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $\Phi_A(P) = R$ où R est le reste de la division euclidienne de AP par B.

a. Montrer que $\mathcal{B}_0 = (L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

b. Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_0$.

c. Montrer que Φ_A est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, donner ses valeurs.

68 *Centrale Maths1 PSI 2022* Margaux Millaret

Soit $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $E = C^0(I, \mathbb{R})$. Pour $(f, g) \in E^2$, on pose $< f, g >= \int_0^{\pi/2} f(t)g(t)dt$ et $||f|| = \sqrt{< f, f >}$.

On définit sur E les fonctions A et B par $A(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $B(f)(x) = \int_x^{\pi/2} f(t)dt$ pour $f \in E$ et $x \in I$.

a. Montrer que A et B sont deux endomorphismes de E.

b. Montrer que $\forall (f, g) \in E^2,\ < A(f), g >=< f, B(g) >$.

c. En déduire que les valeurs propres de $B \circ A$ sont positives.

d. Pour $f \in E$ et $x \in I$, montrer que $A(f)(x)^2 \leqslant x \int_0^x f(t)^2 dt$.

e. En déduire qu'il existe un réel $K \geqslant 0$ tel que $\forall f \in E,\ ||A(f)|| \leqslant K||f||$.

f. Montrer que les valeurs propres de $B \circ A$ sont les $\frac{1}{(2n+1)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

69 *Centrale Maths1 PSI 2022* Alban Soyez

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on suppose A diagonalisable, montrer que $P(A)$ est diagonalisable.

b. Ici, $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = 1 + a_1 X + a_2 X^2$ où a_1 et a_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Calculer la probabilité que $P'(A)$ soit inversible.

c. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(A)$ est diagonalisable et $Q'(A)$ est inversible. Montrer que A est diagonalisable.

70 *Centrale Maths1 PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche

Soit une entier $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique, c'est-à-dire qui vérifie les propriétés $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2,\ a_{i,j} \in]0; 1[$ et $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

Soit aussi la matrice extraite $B = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ 1 - a_{i,i} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j}$.

b. En déduire que $I_{n-1} - B$ est inversible.

c. Montrer que $\text{rang}\,(I_n - A) \geqslant n - 1$.

d. Montrer que $1 \in Sp(A)$ et déterminer $E_1(A)$.

71 *Mines PSI 2022* Olivier Baesen II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et G une partie de $GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

- $\forall A \in G,\ A^2 = I_n$.
- $\forall (A, B) \in G^2,\ AB = BA$.

a. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A \in G,\ P^{-1}AP$ est diagonale.

b. En déduire une majoration de $\text{card}\,(G)$.

c. Supposons que G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que $I_n \in G$, $\forall A \in G,\ A^{-1} \in G$ et que $\forall (A, B) \in G,\ AB \in G$, peut-on trouver une information supplémentaire sur $\text{card}\,(G)$?

72 *Mines PSI 2022* Lola Belle Wangue II

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Trouver le commutant $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ de A.

b. Déterminer tous les plans et les droites stables par A.

73 *Mines PSI 2022* Olivier Courmont I et Anatole Rousset II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe $X_0 \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(X_0, AX_0, \cdots, A^{n-1}X_0)$ est libre.

b. Montrer que A est semblable à $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que $A = \lambda\big(\exp(J_n) - I_n\big)$ est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence, c'est-à-dire le plus petit entier p tel que $A^p = 0$.

d. En déduire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = \lambda P \exp(J_n) P^{-1}$.

e. En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = \exp(B)$.

74 *Mines PSI 2022* Amandine Darrigade I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$.

c. Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

75 *Mines PSI 2022* Achille Domens II

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 0$.

a. Justifier l'existence et l'unicité de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

b. On suppose $p = 4$, montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

76 *Mines PSI 2022* Fares Kerautret II

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f^2 est un projecteur.

a. Trouver un polynôme annulateur de f.

b. Montrer l'existence de deux sous-espaces F et G de E stables par f et qui vérifient les trois conditions $E = F \oplus G$, f_F est bijectif et f_G est nilpotent.

c. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(f^2)$.

77 *Mines PSI 2022* Lucas Lacampagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?
Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de n.

78 *Mines PSI 2022* Louis Lacarrieu II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + M^T$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. f est-il diagonalisable ?

c. Déterminer les sous-espaces propres de f.

79 *Mines PSI 2022* Thomas Lanne I

Soit $\varphi : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ défini par $\varphi(P) = X^2\big(P'(X+1) - P'(X)\big)$. On pose $F = X^2\,\mathbb{R}_2[X]$.

a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

c. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

d. Déterminer les valeurs propres de φ.

e. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ stable par φ.

f. Montrer que $\mathbb{R}_4[X] = F \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$.

g. Est-ce que φ est diagonalisable ? Si oui, donner une base de $\mathbb{R}_4[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

80 *Mines PSI 2022* Peio Lanot I

Soit $n \geqslant 2$, $C \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $L \neq 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $A = CL - I_n$.

a. Peut-on avoir $A = -I_n$?

b. Montrer que $A^2 + (2 - LC)A + (1 - LC)I_n = 0$.

c. Dans quel cas A est une matrice de symétrie ?

d. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, montrer que A est racine d'un polynôme de degré 2.

e. A est-elle diagonalisable ? Donner ses sous-espaces propres.

81 *Mines PSI 2022* Margaux Millaret I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Calculer χ_A.

b. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

82 *Mines PSI 2022* Florian Picq I

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : x \mapsto \mathrm{ch}\,(kx)$ et $g_k : x \mapsto \mathrm{sh}\,(kx)$ définies sur $\mathbb{R}$ des vecteurs de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$.
On pose aussi l'application Φ, définie sur E, par $\Phi(f) = f'' - 3f' + 2f$.

a. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$ est une base de F.

b. Montrer que la restriction de Φ à F est un endomorphisme qu'on note Ψ.

c. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

83 *Mines PSI 2022* Élouan Princelle II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : A diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.

84 *Mines PSI 2022* Maxence Rossignol II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$.

b. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ AB^k - B^kA = kB^k$.

c. En déduire que B est nilpotente.

85 *Mines PSI 2022* Thibault Sourdeval I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = j$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = 0$.

a. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (x + i) = \prod_{i=1}^{n} (x + i)$ admet n solutions réelles distinctes.

b. Montrer que A n'admet pas de valeurs propres entières dans $[\![-n; -1]\!]$.

c. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

d. En déduire que A est diagonalisable.

86 *Mines PSI 2022* Alban Soyez II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Calculer χ_A.

b. Trouver une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.

87 *CCINP PSI 2022* Naïs Baubry II

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Trouver toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par a.

Soit dans les questions suivantes un plan P de $\mathbb{R}^3$ stable par a. On définit alors l'endomorphisme a' de P induit par a dans P, qu'on note $a' = a_P$.

c. Montrer que $\chi_{a'}$ divise χ_a.

d. En déduire que $P \subset \operatorname{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

e. Que vaut donc P ?

88 *CCINP PSI 2022* Lola Belle Wangue II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et $\begin{cases} u_{n+1} = & u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} = & -u_n + 4v_n - w_n \\ w_{n+1} = & -u_n + 2v_n + w_n \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit aussi le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a. Écrire le système précédent sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. En déduire X_n en fonction de A et X_0 pour $n \in \mathbb{N}$.

c. La matrice A est-elle diagonalisable ?

d. Déterminer les sous-espaces propres de A.

e. Trigonaliser A.

f. Déterminer u_n, v_n, w_n en fonction de n.

89 *CCINP PSI 2022* Amandine Darrigade et Thomas Lanne II

Soit un entier $n \geqslant 3$.

a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ éventuellement répétées avec leur ordre de multiplicité. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(M^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

b. Donner les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

90 *CCINP PSI 2022* Anna Decrock II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a. Trouver les valeurs propres de A.

b. Est-ce que la matrice A est diagonalisable ?

c. Donner des vecteurs propres u et v de A et un vecteur w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une base de de $\mathbb{R}^3$.

d. Montrer que A est trigonalisable et la trigonaliser.

91 *CCINP PSI 2022* Léo Ducos-Tourenne II et Anatole Rousset II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_A(M) = AM$.

a. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.

d. Construire un vecteur propre de f_A via un vecteur propre de A.

e. Construire un vecteur propre de A via un vecteur propre de f_A.

f. Montrer que A et f_A ont le même spectre.

92 *CCINP PSI 2022* Colin Herviou-Laborde et Élouan Princelle II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule M, les valeurs propres de M sont des racines de P.

b. On suppose que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable et que $\mathrm{Tr}\,(M) \times \det(M) \neq 0$.

c. On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est toujours diagonalisable.

d. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

93 *CCINP PSI 2022* Fares Kerautret I et Louis Lacarrieu I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de A, les valeurs propres de A sont racines de P.

b. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

c. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.

d. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = M$.

94 *CCINP PSI 2022* Paul Lafon II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB - BA = A$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = MB - BM$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Calculer $\mathrm{Tr}\,(A)$. Généraliser en calculant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}\,(A^k)$.

c. Montrer que A est nilpotente.

95 *CCINP PSI 2022* Joël Lascoumes et Jade Mirassou II

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ? Quels sont ses éléments propres ?

b. Montrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

c. Montrer que toute matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $R^2 = A$ est diagonalisable.

d. Combien y a-t-il de matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$?

96 *CCINP PSI 2022* Paul Mayé II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{Tr}\,(A^n)$.

a. En utilisant un polynôme annulateur de A, établir une relation entre u_{n+3}, u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.

b. En déduire que $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in \mathbb{N}^*$.

c. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Exprimer u_n en fonction des valeurs propres de A.

d. En déduire que $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{u_n}$ converge.

97 *CCINP PSI 2022* Manon Odelot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer χ_B en fonction de χ_A. En déduire le spectre de B en fonction de celui de A.

b. Si A est inversible et a n valeurs propres distinctes, montrer que B est diagonalisable.

c. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.

d. Donner un exemple où A est diagonalisable et B ne l'est pas.

e. Montrer que si A est inversible et diagonalisable, alors B est aussi diagonalisable.

98 *CCINP PSI 2022* Camille Pucheu I

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$.

b. Calculer $d = \det\big(M(a,b,c)\big)$. Si $d = 0$, donner $\mathrm{Ker}\,\big(M(a,b,c)\big)$ et $\mathrm{Im}\,\big(M(a,b,c)\big)$.

c. La matrice $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable ?

d. Si $a = b$ et $c \neq 0$, donner des bases des sous-espaces propres de $M(a,a,c)$ et en déduire une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M(a,a,c) = PDP^{-1}$.

99 *CCINP PSI 2022* Ewan Sarrazin I

On définit sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'application ϕ qui à tout polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne du polynôme X^2P par $D = X^4 - 1$.

a. Montrer que ϕ définit un endomorphisme de E.

b. Montrer que ϕ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

c. Est-ce que ϕ est inversible ? Si oui, donner ϕ^{-1}.

100 *CCINP PSI 2022* Baptiste Savarit II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On note Id l'application identité de $\mathbb{C}^n$.

a. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable.

b. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{Id})$.

d. Montrer que la réciproque de la question **a.** est vraie si u est bijective.

101 *CCINP PSI 2022* Thibault Sourdeval III

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{Tr}\,(A^n) z^n$.

102 *CCINP PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie n, f un endomorphisme de E qui admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

a. Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

b. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g, puis que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.

c. En déduire qu'il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à f et g.

d. Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

e. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

103 *Mines-Télécom PSI 2022* Jade Mirassou I

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(u^k) \subset_k \mathrm{er}(u^{k+1})$.

b. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$, montrer que $\forall \ell \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(u^{p+\ell}) = \mathrm{Ker}(u^p)$.

Supposons u nilpotent et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$.

c. Déterminer le polynôme caractéristique de u.

d. En déduire que $q \leqslant n$.

104 *Mines-Télécom PSI 2022* Manon Odelot I

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer B^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

c. Comment aurait-on pu faire autrement pour **b.** ?

105 *Mines-Télécom PSI 2022* Paul Sterlin I

Soit l'application Φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\Phi(P) = \int_X^{X+1} P(t)dt$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note Φ_n l'application induite par Φ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

a. Montrer que Φ_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Φ_2 est-il diagonalisable ?

c. Montrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

106 *Navale PSI 2022* Naïs Baubry II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$.

c. Trouver les plans stables par A.

ORAUX 2023 THÈME 6
THÉORÈMES DE DOMINATION

107 *X PSI 2022* Lucas Lacampagne I

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée telle que $f(0) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}} dt$.

a. Trouver un équivalent de a_n.

b. Que se passe-t-il si $f = \sin$?

108 *ENS Cachan PSI 2022* Noé Chassagne I

On définit, sous réserve d'existence, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q(x) dx$.

a. Montrer l'existence de $I_{p,q}$ pour toutes valeurs des entiers naturels p et q.

b. Calculer $I_{p,q}$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

c. En déduire que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

109 *Centrale Maths1 PSI 2022* Joël Lascoumes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{t} dt$.

a. Montrer que u_n est bien défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

c. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n u_n$ converge.

d. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ diverge.

110 *Mines PSI 2022* Olivier Courmont II

On rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1} dt$.

111 *Mines PSI 2022* Anna Decrock I

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (1 + x)}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est continue sur D.

c. Montrer que la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.

d. Établir l'existence d'une borne inférieure de f sur D et calculer $\inf_D(f)$.

e. Trouver un équivalent de f en 0.

112 *Mines PSI 2022* Achille Domens I

Exprimer $\int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1 + t^2} dt$ puis $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(t))^2}{1 + t^2} dt$ sous forme de série.

113 *Mines PSI 2022* Louis Lacarrieu I

Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\cos^2(t))dt$.

a. Montrer que f est définie sur $[-1; +\infty[$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1; +\infty[$.

c. Calculer $f'(x)$ en posant $u = \tan(t)$.

d. En déduire que $f(x) = \pi \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{2}\right)$.

114 *Mines PSI 2022* Florian Picq II

On définit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}dt$ et on pose $g(x) = f(x^2)$.

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b. Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Établir que $\forall x \geqslant 0,\ g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

d. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

115 *Mines PSI 2022* Maxence Rossignol I

Pour un réel x, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$. On définit aussi, toujours sous réserve de convergence, $g(x) = \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt$.

d. Prouver que g est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. Montrer que $f = g$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

f. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$, puis de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$.

116 *Mines PSI 2022* Baptiste Savarit I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Étudier la monotonie de f sur D.

b. Sur quel domaine la fonction f est-elle continue ? dérivable ? Étudier la monotonie de f'.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

d. Calculer, pour $x > 0$, la valeur de $g(x) = \int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}dt$.

e. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{6}{x^4}$. Indication : on pourra s'intéresser à $|f(x) - g(x)|$.

f. Déterminer la limite de f en 0^+.

117 *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche III

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^{-1/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx$.

118 *CCINP PSI 2022* Joël Lascoumes et Jade Mirassou I

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est continue sur D.

c. Montrer, si $x \in D$, que $1-x \in D$ et qu'on a $f(1-x) = f(x)$.

d. Déterminer des équivalents de f aux bornes de D.

119 *CCINP PSI 2022* Ewan Sarrazin II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

a. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.

b. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression intégrale de $g'(x)$.

c. Montrer, si $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, que $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$.

d. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$.

e. Que vaut donc $g(x)$ si $x \in \mathbb{R}_-$?

120 *CCINP PSI 2022* Thibault Sourdeval II

En cas de convergence, on pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} dx$.

a. Montrer que I existe.

b. Montrer que $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

c. En déduire la valeur numérique de I. Indication : on rappelle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

121 *CCINP PSI 2022* Paul Sterlin I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t} dt$.

a. Montrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c. Exprimer φ' puis φ avec des fonctions usuelles.

122 *Mines-Télécom PSI 2022* Naïs Baubry I

Pour $x \in D =]-1;+\infty[$, on définit la fonction $f_x : t \mapsto \frac{t^x-1}{\ln(t)}$ et, en cas de convergence, $f(x) = \int_0^1 f_x(t)dt$.

a. Montrer que f_x est intégrable sur $]0;1[$ en distinguant les cas $x = 0$, $x > 0$ et $x < 0$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur D et calculer $f'(x)$.

c. En déduire une expression simple de $f(x)$.

123 *Mines-Télécom PSI 2022* Manon Odelot II

a. Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Donner une expression simple de $F(x)$.

ORAUX 2023 THÈME 7
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

124 *ENS Cachan PSI 2022* Maxence Rossignol I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques.

a. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

b. Trouver A et B symétriques telles que AB n'est pas symétrique.

c. Montrer que s'il existe une base de vecteurs propres communs à A et à B, alors AB est symétrique.

125 *Centrale Maths1 PSI 2022* Anna Decrock

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$ dans la base canonique.

a. Montrer que $\left(\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T M Y = 0\right) \iff (M = 0)$.

b. Montrer que P est symétrique.

c. Caractériser la matrice PA.

d. En déduire que $\mathrm{Tr}\,(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \times \mathrm{Tr}\,(A^T A)$.

e. Dans l'inégalité précédente, quel est le cas d'égalité ?

126 *Centrale Maths1 PSI 2022* Louis Lacarrieu

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $< P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

On note, pour $k \in [\![0; n]\!]$, $B_k = \dfrac{X^k}{k!}$ et $L_k : t \mapsto \dfrac{(-1)^k}{k!} e^t f_k^{(k)}(t)$ où $f_k : t \mapsto e^{-t}t^k$.

a. Montrer que $< .,. >$ définit un produit scalaire sur E.

b. La famille $\mathcal{B} = (B_0, \cdots, B_n)$ est-elle une base orthonormale de E ?

c. Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_n)$ est une famille de vecteurs de E.

Donner le degré et le coefficient dominant de L_k pour $k \in [\![0; n]\!]$.

d. La famille $\mathcal{L}$ est-elle une base orthonormale de E ?

e. On définit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$. Donner une base de F, de $F^\perp$.

f. Calculer $\inf\limits_{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2 e^{-t} dt$.

127 *Centrale Maths1 PSI 2022* Thomas Lanne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et V_1 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que leur spectre est réduit à $\{1\}$.

a. Donner un élément de V_1.

b. Prouver que $\forall M \in V_1,\ (M - I_n)^n = 0$.

c. On prend ici $n = 4$. Trouver une matrice $M \in V_1$ telle que $(M - I_4)^2 \neq 0$ et $(M - I_4)^3 = 0$.

d. On revient à n quelconque. Trouver toutes les matrices symétriques appartenant à V_1.

e. On prend ici $n = 3$. Trouver toutes les matrices orthogonales appartenant à V_1.

128 *Centrale Maths1 PSI 2022* Anatole Rousset

On pose $C = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ ||MX||_2 \leqslant ||X||_2\}$.

On dit que les endomorphismes canoniquement associés aux matrices M de C sont contractants.

On dit qu'un vecteur X_0 est extrémal pour $M \in C$ si $X_0 \neq 0$ et $\underset{\substack{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}}{\text{Sup}} \dfrac{||MX||_2}{||X||_2} = \dfrac{||MX_0||_2}{||X_0||_2}$.

On dit qu'un vecteur X_0 est fixe pour $M \in C$ si $MX_0 = X_0$.

a. Vérifier que toutes les matrices $A \in O_2(\mathbb{R})$ appartiennent à C.

b. Soit $A \in C$, montrer l'existence d'une matrice $R \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que AR est symétrique. En déduire qu'il existe deux matrices Ω_1 et Ω_2 dans $O_2(\mathbb{R})$ et deux réels a et b telles que $\Omega_1 A \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

c. Soit $A \in C$, avec les notations ci-dessus, montrer que $(a, b) \in [-1; 1]^2$.

d. Montrer qu'il existe un vecteur extrémal pour A. À quelle condition existe-t-il un vecteur fixe pour A ?

129 *Centrale Maths1 PSI 2022* Baptiste Savarit

Soit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \geqslant 2,\ P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

a. Étudier le degré, la parité et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \geqslant 1$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

c. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines réelles distinctes.

On admet que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ où $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) est le sous-espace vectoriel contenant les matrices symétriques (resp. antisymétriques).

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note S_M le projeté de M sur $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$.

d. Soit $U \in O(n)$, trouver un polynôme Q_n tel que $S_{U^n} = Q_n(S_U)$.

130 *Centrale Maths1 PSI 2022* Paul Sterlin

Soit E un espace euclidien de dimension $p \geqslant 1$, u un endomorphisme symétrique de E, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p$ les valeurs propres de u éventuellement répétées avec leur ordre de multiplicité. On note aussi $S = \{x \in E \mid ||x|| = 1\}$.

On note aussi E_2 l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension 2 tels que ??.

On pose $D = \text{diag}(0, 1, \cdots, p-1) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $J = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = D + \dfrac{1}{n}J$.

a. Montrer que $\lambda_1 = \underset{x\in S}{\text{Min}}(u(x)|x)$.

b. Montrer que les matrices M_n sont diagonalisables. Quelle est la limite de $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

131 *Mines PSI 2022* Noé Chassagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $n(A) = \text{Tr}\,(A^tA)$.

a. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ n(AB) \leqslant n(A)n(B)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A.

b. Montrer que $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leqslant 2n(A)$.

Questions supplémentaires :

- Caractériser le cas d'égalité dans la question **b.**.
- L'ensemble des matrices symétriques est-il ouvert ? fermé ?
- L'ensemble des matrices symétriques positives est-il ouvert ? fermé ?
- L'ensemble des matrices symétriques définies positives est-il ouvert ? fermé ?
- Quelle est la définition de l'adhérence ?

132 *Mines PSI 2022* Tony Géreaud I

Soit E l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ dans E, on pose $(M|M') = aa' + 2bb' + cc'$.

a. Montrer que E muni de $(.|.)$ est un espace euclidien de dimension 3.

On note $G = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall M \in E,\ \mathrm{Tr}\,(f(M)) = \mathrm{Tr}\,(M) \text{ et } \det(f(M)) = \det(M)\}$.

b. Montrer que G est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$.

c. Montrer que G est l'ensemble des endomorphismes de E tels que $f(I_2) = I_2$.

133 *Mines PSI 2022* Colin Herviou-Laborde II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1} = 0$, alors pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la famille (AX, X) est liée. En déduire ce que vaut A.

b. Que dire de A si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A est telle que $b_{1,1} = 0$?

134 *Mines PSI 2022* Paul Mayé II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(X_1, \cdots, X_n)$ de E telle que $(AX_1, \cdots, AX_n)$ est une base orthogonale de E.

135 *CCINP PSI 2022* Marius Desvalois I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur lequel on définit, pour tout $(X, Y) \in E^2$, $< X, Y >= {}^tXY \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que $< .,. >$ définit un produit scalaire sur E. On note $||.||$ sa norme euclidienne associée.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Im}\,(A)^\perp = \mathrm{Ker}({}^tA)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in E$ fixés, on définit $f : E \to \mathbb{R}$ par $f(X) = ||AX - Y||$.

c. Montrer que $f(X) = \inf_{Z \in E}(f(Z))$ si et seulement si ${}^tA(AX - Y) = 0$.

136 *CCINP PSI 2022* Margaux Millaret I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que $A^2 = A^T$.

a. Trouver un polynôme annulateur de A.

b. En déduire les valeurs propres complexes possibles de A.

c. En déduire la valeur de $\det(A)$.

d. Quelles sont les valeurs possibles pour χ_A ?

e. Montrer que A est orthogonale. Quelles sont les valeurs possibles de A ?

137 *CCINP PSI 2022* Thibault Sourdeval I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans la base canonique.

Soit w l'endomorphisme de E canoniquement associé à A^T.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|w(y))$.

b. Montrer que si F est un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est stable par w.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Calculer χ_A. A^T et A sont-elles diagonalisables ?

d. Donner les sous-espaces stables par u.

138 *CCINP PSI 2022* Matis Viozelange II

On note $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ et, pour $(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$. On pose F le sous-espace de E composé des fonctions affines de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $F = \{f \in E \mid \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in [0;1],\ f(x) = ax + b\}$.

a. Montrer que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur E.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de $\int_0^1 t^n \ln(t)dt$ et calculer sa valeur.

c. Déterminer la projection orthogonale de $f : x \mapsto x\ln(x)$ sur F.

d. Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} ||g_{a,b}||$ où $g_{a,b} : x \mapsto ax + b - x\ln(x)$.

139 *Mines-Télécom PSI 2022* Marius Desvalois I

Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, (A,B) une famille libre de E et $F = \mathrm{Vect}(A,B)$.
On pose $M = AB^T + BA^T$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

a. Trouver $\mathrm{Ker}(M)$.

b. Déterminer $\mathrm{rang}\,(M)$ et $\mathrm{Im}\,(M)$.

c. M est-elle diagonalisable ?

d. Quelles sont les valeurs propres de M ?

ORAUX 2023 THÈME 8
PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

140 *ENS Cachan PSI 2022* Noé Chassagne II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $r \in [\![2; n]\!]$.
On note $E_{n,r}$ l'ensemble des parties de $[\![1; n]\!]$ ayant r éléments. On note $F_{n,r}$ l'ensemble des parties de $[\![1; n+r-1]\!]$ ayant r éléments et telles qu'aucun de ces éléments ne soient consécutifs ; c'est-à-dire que si on prend r entiers $a_1, \cdots, a_r$ tels que $1 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_r \leqslant n+r-1$, on a $\{a_1, \cdots, a_r\} \in F_{n,r} \iff (\forall i \in [\![1; r-1]\!],\ a_{i+1} - a_i > 1)$.

a. Montrer que $\text{card}\,(E_{n,r}) = \text{card}\,(F_{n,r})$.

On tire au hasard quatre numéros simultanément entre 1 et 49.
Chaque quadruplet a la même probabilité d'être tiré.

b. Calculer la probabilité d'avoir au moins deux éléments consécutifs dans le tirage.

c. Calculer la probabilité d'avoir exactement deux éléments consécutifs dans le tirage.

141 *ENS Cachan PSI 2022* Lucas Lacampagne

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose aussi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires :

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
- $T = \text{Min}(\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\})$ si $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\} \neq \emptyset$ et $T = +\infty$ sinon.

a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de S_n.

b. Calculer $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 4)$ et $\mathbb{P}(T = 2n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On pose $p_0 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. On pose aussi $q_k = \mathbb{P}(T = 2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} p_n x^n$ est convergente pour $|x| < 1$. On pose alors $p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

d. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} q_k$.

e. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[,\ G_T(x) = \dfrac{p(x^2) - 1}{p(x^2)}$.

f. En déduire la loi de T et son espérance.

142 *ENS Cachan PSI 2022* Paul Mayé

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dira par la suite que X est une VAD. On pose alors $G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k$. On dit que X est de type $m \in \mathbb{N}^*$ si X est une VAD et s'il existe un entier $r \in [\![0; m-1]\!]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ k \neq r\ [m],\ \mathbb{P}(X = k) = 0$.

a. Cas $m = 2$, montrer que X est de type 2 équivaut à $|G_X(-1)| = 1$

b. Cas $m \geqslant 3$, montrer que X est de type m équivaut à $\left|G_X\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)\right| = 1$.

c. Montrer que si r existe, alors il est unique. On note désormais cet entier $r(X)$.

d. On pose $W = X + Y$ avec X et Y deux VAD indépendantes. Montrer : W de type $m \iff X$ et Y de type m.

e. Montrer, si X et Y sont deux VAD indépendantes de type m et $W = X + Y$, que $r(W) \equiv r(X) + r(Y)\ [m]$.

143 *Centrale Maths1 PSI 2022* Olivier Courmont I

Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on tire les n boules successivement et sans remise. On note X_k le numéro de la boule obtenue au tirage $k \in [\![1;n]\!]$. On dit qu'on a un pic au tirage k si $\forall i \in [\![1;k-1]\!],\ X_i < X_k$. En particulier, on a toujours un pic au tirage 1. On note S_n le nombre de pics lors de ce tirage. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note T_k la variable de Bernoulli valant 1 s'il y a un pic au tirage k.

a. Calculer $\mathbb{P}(S_n = n)$ et $\mathbb{P}(S_n = 1)$.

b. Donner la loi de T_k.

c. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(S_n)$.

d. On admet que $\mathbb{P}(T_i = 1, T_j = 1) = \dfrac{1}{ij}$ si $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Les variables aléatoires T_i et T_j sont-elles indépendantes ?

e. Calculer $\mathbb{V}(S_n)$ et en donner un équivalent.

144 *Centrale Maths1 PSI 2022* Amandine Darrigade

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ qui suivent la loi $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a. Quelles sont les valeurs que peut prendre S_n ?

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1)$, $\mathbb{P}(|S_n| = 2)$ et $\mathbb{P}(|S_n| = 0)$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = k)$, $\mathbb{P}(|S_n| = k+1)$ et $\mathbb{P}(|S_n| = k-1)$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{E}(|S_n|) + \mathbb{P}(|S_n| = 0)$.

e. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(|S_n| = 0)$.

f. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|S_n|) = +\infty$.

g. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(|S_n|)$ quand n tend vers $+\infty$.

145 *Centrale Maths1 PSI 2022* Tony Géreaud

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour $\omega \in \Omega$, on pos $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

a. Donner la probabilité que M soit inversible.

On note $U(\omega)$ la plus grande valeur propre de $M(\omega)$ et $V(\omega)$ la plus petite.

b. Calculer $\mathrm{Cov}(U,V)$. U et V sont-elles indépendantes ?

c. On note $Z = \mathrm{Max}(X,Y)$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

146 *Centrale Maths1 PSI 2022* Camille Pucheu

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi. On note, pour tout entier $\in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $M_n = \mathrm{Max}(X_1, \cdots, X_n)$.

a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(M_n \leqslant k-1) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1)^n$.

b. Soit ici un réel $\alpha > 1$ tel que la variable aléatoire X_1 admette une espérance finie notée m_α. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1) \geqslant 1 - \dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}$. En déduire que M_n admet une espérance finie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. On suppose ici que X_1 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Montrer que M_n admet une espérance finie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - (1-2^{-k})^n\right)$.

147 *Centrale Maths1 PSI 2022* Matis Viozelange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, des réels $x_1, \cdots, x_n$ distincts deux à deux et X une variable aléatoire qui vérifie la condition $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. On note, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.

On définit aussi la fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\Phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.

a. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ |\Phi(t)| \leqslant 1$.

b. Établir que $|\Phi(t)|^2 \underset{0}{=} 1 - \mathbb{V}(X)t^2 + o(t^2)$.

c. On suppose que $X(\Omega) \subset a + \mathbb{Z}b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire que $\forall k \in [\![1; n]\!],\ \exists m_k \in \mathbb{Z},\ x_k = a + m_k b$. Montrer que $\exists t_0 \in \mathbb{R}^*,\ |\Phi(t_0)| = 1$.

d. On suppose dorénavant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\Phi(t_0)| = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} e^{i(x_k t_0 - \alpha)} p_k$. En déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $X(\Omega) \subset a + \mathbb{Z}b$.

148 *Mines PSI 2022* Noé Chassagne I

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une urne contenant n boules non discernables numérotées de 1 à n. On effectue des tirages et, à chaque tirage, on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.

a. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$.

c. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Question supplémentaire : montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

149 *Mines PSI 2022* Jimmy Guertin II

Soit $p \in]0; 1[$ et (X_1, X_2) deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$ pour $k = 1$ ou $k = 2$.

a. Trouver la (ou les) valeur(s) de p telle(s) que X_1X_2 est indépendante de X_1, de X_2.

b. Trouver la (ou les) valeur(s) de p telle(s) que X_1X_2 est indépendante de (X_1, X_2).

150 *Mines PSI 2022* Fares Kerautret I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [\![1; n]\!]$. On se donne deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$ sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la variable aléatoire $Z_m : \Omega \to [\![1; n]\!]$ par $Z_m(\omega) = X(\omega)$ si $Y(\omega) \leqslant m$ et $Z_m(\omega) = Y(\omega)$ sinon.

a. Déterminer la loi de Z.

b. Calculer l'espérance de X, Y, Z_m en fonction de n et m.

c. Trouver la valeur m_0 de m telle que $\mathbb{E}(Z_m)$ est maximale.

151 *Mines PSI 2022* Paul Lafon II

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et des urnes notées $U_0, \cdots, U_p$ telles que U_i contient i boules blanches et $p-i$ boules noires.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit une urne au hasard et on effectue n tirages dans cette urne avec remise.
La variable aléatoire N_p correspond au nombre de boules blanches tirées et, pour tout entier $i \in [\![0;p]\!]$, on définit l'évènement A_i = "on choisit l'urne U_i''.

a. Calculer $\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)$ pour $i \in [\![0;p]\!]$ et $k \in [\![0;n]\!]$.

b. Calculer $\mathbb{E}(N_p)$ sous réserve d'existence.

c. Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathbb{P}(N_p = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^a(1-x)^b \mathrm{d}x$ avec a et b à déterminer.

152 *Mines PSI 2022* Thibault Le Gal III

Un homme a une probabilité $p \in]0;1[$ d'être dans un immeuble de sept étages. Il n'est pas dans les six premiers étages, quelle est la probabilité qu'il soit au septième étage ?

153 *Mines PSI 2022* Élouan Princelle I

On lance une pièce indéfiniment avec une probabilité $p \in]0;1[$ de faire pile et on note $q = 1-p$. Les lancers sont supposés indépendants. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note T_r la variable aléatoire qui correspond au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile (pour la première fois). On note $Z_r = T_r - T_{r-1}$ avec $T_0 = 0$.

a. Donner la loi de Z_r.

b. Déterminer la fonction génératrice de T_r.

c. Pour des x convenables, calculer $\sum\limits_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}$. En déduire la loi de T_r.

d. Calculer l'espérance de T_r de deux manières différentes.

154 *Mines PSI 2022* Camille Pucheu I

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants.
On pose l'évènement B = "aucun des A_n n'est réalisé".

a. Montrer que $\mathbb{P}(B) \leqslant \exp\Big(-\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\Big)$.

b. Que déduire sur $\mathbb{P}(B)$ si on suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

On suppose construite sur $\mathbb{N}$ une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0;1]$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, un entier a une probabilité $\frac{1}{k}$ d'être une multiple de k. On note l'évènement $A_k = k\,\mathbb{N}^*$ de sorte que l'on ait $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k}$ et on note $\mathcal{P} = \{2,3,5,7,\cdots\}$ l'ensemble des nombres premiers. On admet qu'en notant p_n le n-ième nombre premier ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$....) on a $p_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

c. Montrer que $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$.

d. Montrer que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une suite d'évènements indépendants.

e. Conclure.

155 *CCINP PSI 2022* Lola Belle Wangue I

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On note :

- X le nombre de lancers pour obtenir la première séquence "pile-face".
- Y le numéro du premier lancer où on tombe sur "pile".

a. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

b. Déterminer la loi de X.

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

156 *CCINP PSI 2022* Fares Kerautret II

Une variable aléatoire réelle X est dite presque sûrement constante s'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}(X = X(\omega)) = 1$.

a. Soit Z une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 telle que $\mathbb{V}(Z) = 0$, montrer que Z est presque sûrement constante.

b. On suppose que X est presque sûrement constante, montrer que $\mathbb{V}(X)$ existe et que $\mathbb{V}(X) = 0$.

On suppose maintenant que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que X.

c. On utilise G_X pour.....

157 *CCINP PSI 2022* Manon Odelot I

Soit $p \in]0;1[$ et deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout couple $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on ait $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \binom{n}{k}\frac{p}{2^n}(1-p)^n$ si $k \leqslant n$ et $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = 0$ sinon.

a. Déterminer la loi de Y.

b. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1;1[$.

c. En déduire que $\forall x \in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

d. Déterminer la loi de X.

e. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

158 *CCINP PSI 2022* Baptiste Savarit I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et dont la loi est donnée par la relation $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{a}{k+1}\binom{n}{k}$ pour un réel $a > 0$.

a. Déterminer α dépendant de n et k tel que $\binom{n}{k} = \alpha\binom{n+1}{k+1}$ si $k \in [\![0;n]\!]$.

b. En déduire la valeur de a.

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

159 *CCINP PSI 2022* Paul Sterlin II

On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3. On effectue des tirages indépendants avec remise d'un seul jeton à la fois. On note :

- Y le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois deux numéros différents.
- Z le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois les trois numéros.

a. Déterminer la loi de Y.

b. Identifier la loi de $Y - 1$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

c. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

d. En déduire la loi de Z ainsi que $\mathbb{E}(Z)$.

160 *CCINP PSI 2022* Matis Viozelange I

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Posons $Z = X + Y$.

a. Montrer que Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X sachant $(Z = n)$.

161 *Mines-Télécom PSI 2022* Naïs Baubry II

Soit un entier $n \geqslant 2$. Une urne contient $n-1$ boules numérotées de 1 à $n-1$. On dispose aussi de n boîtes $B_1, \cdots, B_n$ telles que la boîte B_i contient i jetons numérotés de 1 à i.

On réalise l'expérience suivante :

- On tire une boule dans l'urne et on note i son numéro.
- On tire un jeton (numéro a) dans la boîte B_i et un jeton (numéro b) dans la boite B_{i+1}.
- On a "gagné" si $a = b$.

a. Déterminer la probabilité p_2 de gagner si $n = 2$.

b. Déterminer la probabilité p_n de gagner dans le cas général.

c. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

d. En déduire un équivalent de p_n.

162 *Mines-Télécom PSI 2022* Marius Desvalois II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n jetons et n urnes $U_1, \cdots, U_n$.

- on place le premier jeton dans l'urne U_1.
- on place le deuxième jeton dans U_1 ou U_2 de manière équiprobable.
- .....
- on place le jeton numéro n dans l'urne U_1, ou U_2, ..., ou U_n de manière équiprobable.

On note X_n le nombre d'urnes n'ayant pas de jetons à la fin de ce processus.

Pour $k \in [\![1; n]\!]$, on définit la variable aléatoire B_k par $B_k = 1$ si U_k est vide et $B_k = 0$ sinon.

a. Déterminer $X_n(\Omega)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n-1)$.

c. Déterminer la loi de B_k pour $k \in [\![1; n]\!]$.

d. Calculer $\mathbb{E}(B_k)$ et $\mathbb{V}(B_k)$ pour $k \in [\![1; n]\!]$.

e. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$. Calculer aussi $\mathbb{V}(X_n)$.

163 *Navale PSI 2022* Naïs Baubry I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) \in]0;1[^2$ tel que $p + q < 1$ et $r = 1 - p - q$.

On lance n fois un dé truqué qui n'a que $1, 2, 3$ sur ses faces. À chaque lancer, on a :

- une probabilité p d'obtenir la face 1.
- une probabilité q d'obtenir la face 2.
- une probabilité r d'obtenir la face 3.

On note X (resp. Y) la variable aléatoire donnant le nombre de 1 (resp. 2) obtenus au cours des n lancers.

Les lancers sont supposés indépendants.

a. Déterminer les lois de X et de Y.

b. Déterminer la loi du couple (X, Y).

c. X et Y sont-elles indépendantes ?

On suppose maintenant que le nombre de lancers N est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On lance à nouveau N fois le dé truqué avec les mêmes variables aléatoires X et Y.

d. Déterminer les lois de X et Y.

e. X et Y sont-elles indépendantes ?

ORAUX 2023 THÈME 9
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

164 *X PSI 2022* Olivier Courmont II

Soit $f \in C^1([0;1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Montrer que $\int_0^1 |f'(t) - f(t)|dt > \frac{1}{e}$ et que cette constante $\frac{1}{e}$ est optimale.

165 *ENS Cachan PSI 2022* Olivier Baesen et Thibault Le Gal et Antoine Prévost

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible ($A \in S_n(\mathbb{R})$).

On définit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ par $\Phi(M) = M^T AM$.

a. Montrer que Φ, vue comme une application de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, est de classe C^1.

b. Rappeler la définition de la différentielle.

c. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $d_{I_n}\Phi$ la différentielle de Φ en I_n.

- Montrer que $\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n) = H^T A + AH + H^T AH$.
- En déduire que $d_{I_n}\Phi(H) = H^T A + AH$.
- Déterminer le noyau et l'image de $d_{I_n}\Phi$.

d. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM \in S_n(\mathbb{R})\}$ et $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi)$ sont supplémentaires.

e. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant I_n tel que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.

166 *ENS Cachan PSI 2022* Jimmy Guertin

Soit p et q deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'équation (E) : $y'' + py' + qy = 0$.

a. Soit f une solution de (E) non identiquement nulle avec $a \in \mathbb{R}$ telle que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a - \eta\,;a + \eta] \setminus \{a\},\ f(x) \neq 0$.

Soit f et g deux solutions de (E) telles que (f, g) est libre.

On définit $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.

b. Établir une équation différentielle vérifiée par W.

c. En déduire une expression de W en fonction de $t_0 \in \mathbb{R}$.

d. Montrer que pour tout réel t, on a $W(t) \neq 0$.

e. Soit $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = 0$ et $\forall x \in]a; b[,\ f(x) \neq 0$. Montrer que g s'annule une seule fois sur $]a; b[$.

167 *ENS Cachan PSI 2022* Margaux Millaret II

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

a. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

b. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

c. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$? Si oui, les calculer.

d. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

168 *Centrale Maths1 PSI 2022* Paul Mayé

Soit $E = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \text{ converge} \right\}$. On admet que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que l'application $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(f) = F$ avec $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est linéaire.

a. Soit $f \in E$, montrer que $F = \varphi(f) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = F'(x) + f(x)$.

b. En déduire que φ n'est pas surjective.

c. Donner les éléments propres de φ.

d. Soit $f \in E$ de classe C^1 et bornée, montrer que $f' \in E$ et que $\big(\varphi(f)\big)' = \varphi(f')$.

e. Montrer que si on pose F l'ensemble des fonctions bornées et C^1 de E, alors F est stable par φ. Quel est le spectre de l'endomorphisme induit par φ dans F ?

Question de cours :

- Que dire du rayon de convergence de la somme et du produit de CAUCHY de deux séries entières ?

169 *Centrale Maths1 PSI 2022* Maxence Rossignol

Soit la fonction $K : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $K(x,y) = x(1-y)$ si $x \leqslant y$ et $K(x,y) = y(1-x)$ sinon.

a. Montrer que K est continue sur $[0;1]^2$ et à valeurs dans $\left[0; \frac{1}{4}\right]$.

b. Si $(x_0, y_0) \in [0;1]^2$ et $x_0 < y_0$, déterminer une équation du plan tangent P à la surface S d'équation $z = K(x,y)$ en le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Donner aussi un vecteur non nul normal à P.

170 *Mines PSI 2022* Jimmy Guertin I

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

On définit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 e^{-t^2} dt$.

a. Montrer l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n pour $n \in \mathbb{N}$.

c. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer I_{2p+1} et I_{2p} en admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

d. Calculer $F(x,y)$. Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

e. Déterminer les points critiques de F, puis ses éventuels extrema.

171 *Mines PSI 2022* Lucas Lacampagne I

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et l'équation différentielle (E) : $y'' - 9y = a|x| + b$.

a. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ admettant une asymptote en $\pm\infty$.

172 *Mines PSI 2022* Thibault Sourdeval II

Soit I un intervalle et α, β deux fonctions réelles dérivables définies sur I. On définit le wronskien de α, β comme la fonction $w : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in I,\ w(t) = \begin{vmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \alpha'(t) & \beta'(t) \end{vmatrix}$.

a. Montrer que si φ et ψ sont des solutions de (E) : $y'' = ay' + by$ avec $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues, alors le wronskien w de φ, ψ vérifie une équation différentielle (F) d'ordre 1 sur I.

b. Si φ ne s'annule pas sur I, exprimer $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'$ en fonction de w et φ.

c. Trouver une solution φ développable en série entière de (E) : $2ty'' + y' - y = 0$ telles que $\varphi(0) = 1$.

d. En déduire une autre solution ψ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ non colinéaire à φ. Et sur $\mathbb{R}_-^*$?

e. Donner toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

173 *CCINP PSI 2022* Naïs Baubry I et Anna Decrock I

Soit les équations (E_0) : $x^2y'' - 2y = 0$ et (E) : $x^2y'' - 2y = x^3$.

a. Trouver une solution polynomiale u de (E_0).

b. Trouver une fonction v solution de (E_0), indépendante de u, écrite sous la forme $v(x) = u(x)z(x)$ avec z de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

c. Déduire de la question précédente les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

d. Trouver toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.