♠ ♡

PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2022 / 2023

♢ ♣

EXERCICES PAR THÈME

EXERCICES PAR CONCOURS

ORAUX 2023 THÈME 1
INTÉGRALE ET ANALYSE

1 **a.** C est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc, par la propriété fondamentale des réels, elle admet une borne supérieure. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Sup}(C)$ est un majorant de C mais $\mathrm{Sup}(C) - \frac{1}{2^n}$ n'en est pas un car $\mathrm{Sup}(C)$ est le plus grand des majorants. Ainsi, il existe un réel $x_n \in C$ tel que $\mathrm{Sup}(C) - \frac{1}{2^n} < x_n \leqslant \mathrm{Sup}(C)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\mathrm{Sup}(C) - \frac{1}{2^n}\right) = \mathrm{Sup}(C)$, par le théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \mathrm{Sup}(C)$. Par conséquent, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C qui converge vers $\mathrm{Sup}(C)$. Bien sûr, il existe aussi une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C qui converge vers $\mathrm{Inf}(C)$.

b. Comme C est non vide, X ne l'est pas non plus car si $c \in C$, alors $|c - c| = 0 \in X$. De plus, comme C est non vide et bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in C,\ |x| \leqslant M$. Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ |x-y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2M$ par inégalité triangulaire donc C est non vide, minoré par 0 et majoré par $2M$ donc X admet une borne inférieure et une borne supérieure toujours par la propriété fondamentale des réels. Mieux, si $(x,y) \in C^2$, en supposant que $x \geqslant y$ (l'autre cas est symétrique), on a $|x-y| = x - y \leqslant \mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$ car $x_n \leqslant \mathrm{Sup}(C)$ et $y_n \geqslant \mathrm{Inf}(C)$ donc $\mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$ est un majorant de C.

- 0 minore X et $0 \in X$ donc $0 = \mathrm{Min}(C) = \mathrm{Inf}(X)$.
- D'après **a.**, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C qui convergent respectivement vers $\mathrm{Sup}(C)$ et $\mathrm{Inf}(C)$. Il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \geqslant y_n$ (et ceci même si $C = \{c\}$ car alors $x_n = y_n = c$). Alors $\forall n \geqslant n_0,\ x_n - y_n = |x_n - y_n| \in C$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$. Comme $\mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$ est un majorant de X et qu'il existe une suite d'éléments de X qui converge vers $\mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$, par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\mathrm{Sup}(X) = \mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$.

2

3 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+(1/2)}}$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+(3/2)}}$. D'après le critère de Riemann, g_x est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $x + \frac{1}{2} < 1$ et g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $\frac{3}{2} + x > 1$ donc f est définie sur $I = \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ car pour une fonction continue positive, la convergence ou l'absolue convergence de l'intégrale sont équivalentes.

b. Pour $x \in I$, on pose $t = \dfrac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est strictement décroissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} \frac{\sqrt{u}}{u^{-x}(1+u^{-1})}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{-x}\sqrt{u}(1+u)} = f(-x)$ donc f est paire.

c. On a admis qu'en notant $g : (x,t) \mapsto \dfrac{1}{t^x\sqrt{t}(1+t)} = \dfrac{e^{-x\ln(t)}}{\sqrt{t}(1+t)}$, on a $\forall x \in I,\ f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)dt$. On peut bien sûr le montrer en utilisant deux fois le théorème de dérivation sous le signe somme. Ainsi, comme $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{(-\ln(t))^2 e^{-x\ln(t)}}{\sqrt{t}(1+t)} = \dfrac{(-\ln(t))^2}{t^x\sqrt{t}(1+t)} \geqslant 0$, on a $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)dt \geqslant 0$ donc f est convexe. Comme f est paire et dérivable, sa dérivée en 0 est nulle donc, comme f' est croissante car $f'' \geqslant 0$ sur l'intervalle I, f' est positive sur $\left[0; \frac{1}{2}\right[$ et négative sur $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ donc f admet son minimum absolu en 0. Comme $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \left[2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{t})\right]_0^{+\infty} = \pi$, on a bien $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(0) = \pi$.

d. Comme $\frac{1}{(1/2)-x} = \int_0^1 \frac{dt}{t^x\sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{x+(1/2)}} = \left[\frac{t^{(1/2)-x}}{(1/2)-x}\right]_0^1$, on évalue la différence entre $\int_0^1 \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^x\sqrt{t}}$ pour $x \in I \cap \mathbb{R}_+$. Or $\left|\int_0^1 \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} - \int_0^1 \frac{dt}{t^x\sqrt{t}}\right| = \int_0^1 \frac{tdt}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$ et, comme $\frac{t}{1+t} \leqslant t$, $\int_0^1 \frac{tdt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{t^{x-(1/2)}} = \left[\frac{t^{(3/2)-x}}{(3/2)-x}\right]_0^1 = \frac{1}{(3/2)-x} \leqslant 1$ d'où $\left|\int_0^1 \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} - \frac{1}{(1/2)-x}\right| \leqslant 1$.

e. Avec Chasles, $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} \underset{\frac{1}{2}^-}{=} \frac{1}{(1/2)-x} + O(1)$ avec **d.**. De plus, $0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+(3/2)}} = \left[\frac{t^{-(1/2)-x}}{-(1/2)-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{(1/2)+x} \leqslant 2$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} \underset{\frac{1}{2}^-}{=} O(1)$. Par somme, $f(x) \underset{\frac{1}{2}^-}{=} \frac{1}{(1/2)-x} + O(1)$. Or $\lim\limits_{x \to (1/2)^-} \frac{1}{(1/2)-x} = +\infty$ donc $f(x) \underset{\frac{1}{2}^-}{=} \frac{1}{(1/2)-x} + o\left(\frac{1}{(1/2)-x}\right)$, d'où $f(x) \underset{\frac{1}{2}^-}{\sim} \frac{1}{(1/2)-x}$. Par parité de f, on a aussi $f(x) \underset{\frac{-1}{2}^+}{\sim} \frac{1}{(1/2)+x}$.

4 **a.** En prenant $x = y = 1$ dans la relation (1), on a $f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$.

Pour $x > 0$, en prenant $y = \frac{1}{x}$ dans (1), on obtient $f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

b. Soit $x > 0$, les intégrales $\int_x^{2x} f(t)dt$ et $\int_1^2 f(t)dt$ sont bien définies car f est continue sur les segments $[x; 2x]$ et $[1; 2]$. Dans l'intégrale $\int_x^{2x} f(t)dt$, on pose $t = \varphi(u) = ux$ qui est de classe C^1 sur le segment $[1; 2]$ et on a donc par changement de variable (version sup.) $\int_x^{2x} f(t)dt = \int_1^2 f(ux)xdu$. Or $f(ux) = f(u) + f(x)$ donc, par linéarité de l'intégrale, $\int_x^{2x} f(t)dt = x\int_1^2 f(u)du + xf(x)$. En divisant par $x > 0$, on a bien la relation attendue, $f(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt$.

c. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y admet une primitive F et, par le théorème fondamental de l'intégration, il vient $f(x) = \frac{F(2x)-F(x)}{x} - (F(2) - F(1))$, ce qui prouve par opérations que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc dériver (1) par rapport à y, ce qui donne $\forall (x,y) \in]0; +\infty[^2,\ xf'(xy) = f'(y)$ (2). En prenant maintenant $y = 1$ dans (2), on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$. Ainsi, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ f(x) = f'(1)\ln(x) + C$ (3). En prenant $x = 1$ dans (3), comme $f(1) = 0$, on a $C = 0$ donc $\forall x > 0,\ f(x) = f'(1)\ln(x)$.

Les $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall (x,y) \in]0; +\infty[^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$ sont proportionnelles à $\ln$.

5 **a.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geqslant 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $a < b$ tels que $h(a) = h(b)$ et on aurait $\forall x \in [a; b],\ h'(x) = 0$, ce qui est impossible car f' ne s'annule qu'en les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c \in]0; 1[$ tel que $h(c) = 0$ donc un unique point fixe c de $\cos$ sur $\mathbb{R}$. On trouve numériquement $c \sim 0,74$.

b. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. En appliquant f, on obtient $f \circ f \circ f = f \circ \cos$ donc $\cos \circ f = f \circ \cos$ ce qui, en c, devient $f(c) = \cos(f(c))$. D'après l'unicité montrée à la question **a.**, on en déduit que $f(c) = c$. Si on dérive $f \circ f = \cos$, on obtient $f' \times (f' \circ f) = -\sin$ ce qui, en c, devient $f'(c)^2 = -\sin(c) < 0$ car, comme $c \in]0;1[\subset]0;\pi[$, on a $\sin(c) > 0$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$. Comme en **b.**, on a $f(c) = c$. Si f n'était pas injective sur $[0;1]$, alors il existerait deux réels x et y tels que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ et $f(x) = f(y)$ et on aurait $f \circ f(x) = f \circ f(y) = \cos(x) = \cos(y)$ et la fonction $\cos$ ne serait pas injective sur $[0;1]$. NON !

Ainsi, f est injective sur $[0;1]$ donc, par continuité, elle y est strictement croissante ou strictement décroissante. Comme f est continue en c, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [c-\alpha; c+\alpha]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ (il suffit de prendre $\varepsilon = \mathrm{Min}(c, 1-c) \sim 0,26 > 0$ dans $|f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$). On aurait donc, comme f est strictement monotone sur $[c-\alpha; c+\alpha]$ et que $f([c-\alpha; c+\alpha]) \subset [0;1]$, intervalle sur lequel f est aussi strictement monotone (la même monotonie) et, par composée, la fonction $f \circ f = \cos$ serait strictement croissante sur $[c-\alpha; c+\alpha]$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

6 Les fonctions $f : x \mapsto \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g : x \mapsto \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ sont continues sur $I = \left]\frac{2}{\pi}; +\infty\right[$ car les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont strictement positives sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\lim\limits_{x \to (2/\pi)^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, f se prolonge par continuité en $\frac{2}{\pi}$ en posant $f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \ln(1) = 0$. Par contre, $\lim\limits_{x \to (2/\pi)^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to (2/\pi)^+} g(x) = -\infty$.

• Comme $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(1/x)}{(1/x)}\right)$, on a $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{+\infty}{=} -\ln(x) + o(1)$ donc $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Ainsi, f n'est pas intégrable sur I et, comme f est négative sur I, $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$ diverge.

• Comme $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1, bijective et strictement décroissante de $J = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $I = \left]\frac{2}{\pi}; +\infty\right[$, on sait d'après le cours que les intégrales $\int_I g(x)dx$ et $\int_J g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, on aura $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = \int_{\pi/2}^{0} \ln(\cos(t))\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} dt$. En posant $h : t \mapsto \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = \frac{\ln(1 - (1 - \cos(t)))}{t^2}$, comme $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$, on a $h(t) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$ car $\ln(1-u) \underset{0}{\sim} -u$ donc $\lim\limits_{t \to 0^+} h(t) = -\frac{1}{2}$ et on peut prolonger h par continuité en 0 en posant $h(0) = -\frac{1}{2}$. De plus, en posant $t = \frac{\pi}{2} - u$ avec $u \in J$, $h(t) = \frac{\ln(\cos((\pi/2) - u)))}{((\pi/2) - u)^2} = \frac{\ln(\sin(u))}{((\pi/2) - u)^2} \underset{0}{\sim} \frac{4}{\pi^2} \ln(u)$ comme avant. Par conséquent, comme $\ln(u) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$, on a $h(t) \underset{(\pi/2)^-}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{(\pi/2) - t}}\right)$ et g est intégrable sur J par comparaison aux intégrales de Riemann. Ainsi, $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$ converge.

7 **a.** Comme $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$ d'où $\forall t \in [0;1]$, $e^{i\theta} t \neq 1$ et la fonction $t \mapsto e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t}$ est continue sur le segment $[0;1]$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt$ est bien définie. Comme $e^{in\theta} t^n = (e^{i\theta} t)^n$ avec

MOIVRE et $e^{i\theta}t \neq 1$, on a la relation $\dfrac{1-e^{in\theta}t^n}{1-e^{i\theta}t} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(e^{i\theta}t)^k$ donc $e^{i\theta} \times \dfrac{1-e^{in\theta}t^n}{1-e^{i\theta}t} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta}t^k$. Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 e^{i\theta}\times\frac{1-e^{in\theta}t^n}{1-e^{i\theta}t}dt = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta}\int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{i(k+1)\theta}}{k+1}$. On effectue ensuite le changement d'indice $m = k+1$ et on a bien $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{e^{im\theta}}{m} = \int_0^1 e^{i\theta}\times\frac{1-e^{in\theta}t^n}{1-e^{i\theta}t}dt$.

b. Posons $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}dt$, qui existe bien car $t \mapsto \dfrac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}$ est continue sur le segment $[0;1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{ik\theta}}{k}$, qui est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{e^{ik\theta}}{k}$, on a donc d'après **a.** et par linéarité de l'intégrale, $S_n - I = -\displaystyle\int_0^1 e^{i\theta}\times\frac{e^{in\theta}t^n}{1-e^{i\theta}t}dt$. Par inégalité triangulaire, on a $|S_n - I| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |e^{i\theta}|\times\frac{|e^{in\theta}t^n|}{|1-e^{i\theta}t|}dt = \int_0^1 \frac{t^n}{|1-e^{i\theta}t|}dt$. Il s'agit de minorer le dénominateur en écrivant $|1-e^{i\theta}t|^2 = (1-\cos(\theta)t)^2 + \sin^2(\theta)t^2 = 1 - 2\cos(\theta)t + t^2 = (t-\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$ pour $t \in [0;1]$. Ainsi, $|1-e^{i\theta}t|^2 \geqslant \sin^2(\theta)$ donc $|1-e^{i\theta}t| \geqslant |\sin(\theta)| > 0$ et $|S_n - I| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{|\sin(\theta)|}dt = \frac{1}{(n+1)|\sin(\theta)|}$. Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}dt$.

c. $t \mapsto \dfrac{\cos(\theta) - t + i\sin(\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta)+1}$ est continue sur $[0;1]$ car $t^2 - 2t\cos(\theta) + 1 = |1-e^{i\theta}t|^2 > 0$. Par définition d'une intégrale complexe, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\theta)-t+i\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt = \int_0^1 \frac{\cos(\theta)-t}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt + i\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\theta)-t}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt = -\frac{1}{2}\Big[\ln(t^2-2t\cos(\theta)+1)\Big]_0^1$ car $(t^2 - 2t\cos(\theta)+1)' = 2(t-\cos(\theta))$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\theta)-t}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt = -\frac{1}{2}\ln(1-2\cos(\theta)+1) = -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos(\theta))$.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}dt = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{(t-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}dt$.

Comme $\sin(\theta) \neq 0$, on a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sin(\theta)}}{1+\left(\frac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2}dt = \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\right]_0^1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$ par imparité de Arctan.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\theta)-t+i\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt = -\frac{1}{2}\ln\left(2-2\cos(\theta)\right) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$.

d. Si $\theta \in]0;\pi[$, on a bien $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. On peut simplifier $-\dfrac{1}{2}\ln\left(4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right) = -\ln\left(2\left|\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|\right)$. On a aussi $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\tan(\theta/2)\right) = \dfrac{\theta}{2}$ car $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

En identifiant partie réelle et imaginaire, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k} = -\ln\left(2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

8 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto e^{-(1-i)t}t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(t)| = t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t}t^n dt$ existe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u(t) = t^n$ et $v(t) = \dfrac{e^{(i-1)t}}{i-1}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées $I_n = 0 - \dfrac{n}{i-1}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(i-1)t}t^{n-1}dt = \frac{n(i+1)}{2}I_{n-1}$ par intégration par parties. Par une récurrence très simple, puisque $I_0 = \left[\dfrac{e^{(i-1)t}}{i-1}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{i+1}{2}$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!\left(\dfrac{i+1}{2}\right)^{n+1}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4})t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|g_n(t)| \leqslant e^{-t^{1/4}} t^n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4})t^n dt$ existe. On effectue dans J_n le changement de variable $t = u^4 = \varphi(u)$ avec φ qui est strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, de sorte que $J_n = 4\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} \sin(u)u^{4n+3} du = 4\,\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-u}e^{iu}u^{4n+3} du\right)$ donc $J_n = 4\,\mathrm{Im}\,(I_{4n+3})$. Or $I_{4n+3} = (4n+3)!\left(\dfrac{i+1}{2}\right)^{4n+4} = (4n+3)!\left(\dfrac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{4(n+1)} = (4n+3)!(-1)^{n+1}$ est réel donc $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4})t^n dt = 0$.

ORAUX 2023 THÈME 2
ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

9 Les relations $A \times A = B \times B = 0$ se traduisent par $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(B)$. On en déduit que $\mathrm{rang}(A) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2n - \mathrm{rang}(A)$ par la formule du rang donc que $2\,\mathrm{rang}(A) \leqslant 2n$. Comme on a $\mathrm{rang}(A) \geqslant n$ par hypothèse, on en déduit que $\mathrm{rang}(A) = n$. Par symétrie, $\mathrm{rang}(B) = n$.

Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(A)$ dans $\mathbb{C}^{2n}$, on a donc $\dim(S) = 2n - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2n - n = n$. Prenons $\mathcal{B}_1 = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de S. On sait d'après le théorème du rang que A induit un isomorphisme entre S et $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A)$ de sorte que $\mathcal{B}_2 = (Av_1, \cdots, Av_n)$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$. Comme $C^{2n} = S \oplus \mathrm{Im}(A)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{C}^{2n}$. Par construction, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Et on a $A = PNP^{-1}$ par formule de changement de base avec P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$ à la base $\mathcal{B}$. Par symétrie, on a aussi l'existence d'une matrice $Q \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $B = QNQ^{-1}$. Comme les matrices A et B sont semblables à la même matrice N, A et B sont semblables.

10 u est bien défini de manière unique en tant qu'endomorphisme car on a imposé l'image par u d'une base de l'espace de départ $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ donc $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k u(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k e_{k+1}$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est donc $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On montre facilement par récurrence sur l'entier i que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $u^i(e_j) = e_{i+j}$ si $i + j \leqslant n$ et $u^i(e_j) = 0$ si $i + j > n$. Ainsi, $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $u^n(e_j) = 0$ car $j + n > n$ donc $u^n = 0$. On pouvait aussi dire que $\chi_u = \chi_M = X^n$ donc $u^n = 0$ par Cayley-Hamilton : un grand classique des matrices nilpotentes. Comme $u^{n-1}(e_1) = e_n \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on a $u^{n-1} \neq 0$ donc u est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotente égal exactement à n.

<u>Analyse</u> : soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u. On peut donc définir $u_F : F \to F$ l'endomorphisme induit par u dans F. Comme $u^n = 0$, on aussi $u_F^n = 0$ donc u_F est aussi nilpotent. Si $F \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, notons $d = \dim(F) \geqslant 1$. Comme le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u et qu'il est de degré d, on a $\chi_{u_F} = X^d$ donc $u_F^d = 0$ par Cayley-Hamilton. On pouvait aussi considérer l'indice k de nilpotence de u_F, d'où $u^k = 0$ et $u_F^{k-1} \neq 0$, puis un vecteur $x \in F$ tel que $u_F^{k-1}(x) \neq 0$ et montrer très classiquement que la famille $(x, u(x), \cdots, u^{k-1}(x))$ est libre dans F ce qui montre que $k \leqslant d$. Alors, $u^d = u^{d-k} \circ u^k = 0$.

Ceci signifie que $\forall x \in F$, $u_F^d(x) = u^d(x) = 0$ donc que l'on a l'inclusion $F \subset \mathrm{Ker}(u^d)$. Or on sait que $\mathrm{Im}(u^d) = \mathrm{Vect}(u^d(e_1), \cdots, u^d(e_n)) = \mathrm{Vect}(e_{d+1}, \cdots, e_n)$ est de dimension $n - d$ donc, par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u^d)) = d$. Comme $e_{n-d+1}, \cdots, e_n$ forme une famille libre de vecteurs de $\mathrm{Ker}(u^d)$, on a donc $\mathrm{Ker}(u^d) = \mathrm{Vect}(e_{n-d+1}, \cdots, e_n)$. Ainsi, si F stable par u, on a $F = \mathrm{Ker}(u^d)$ par inclusion et égalité des dimensions avec $d \in [\![1;n]\!]$ ou $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u^0)$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, si $F = \mathrm{Ker}(u^d)$ avec $d \in [\![0;n]\!]$, comme u et u^d commutent, on sait d'après le cours que $\mathrm{Ker}(u^d)$ est stable par u.

<u>Conclusion</u> : les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par u sont exactement les $n+1$ sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u^d) = \mathrm{Vect}(e_{n-d+1}, \cdots, e_n)$ pour $d \in [\![0;n]\!]$ avec $\mathrm{Ker}(u^0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

11 **a.** Pour $(k,m) \in [\![0;n-1]\!]^2$, $\chi_m(\omega_k) = \dfrac{\omega_k^m}{\sqrt{n}} = \dfrac{e^{\frac{2ikm\pi}{n}}}{\sqrt{n}} = \dfrac{e^{\frac{2imk\pi}{n}}}{\sqrt{n}} = \chi_k(\omega_m)$ (relation de De Moivre).

b. Pour $(k,m) \in [\![0;n-1]\!]^2$, $< \chi_m, \chi_k >= \sum\limits_{p=0}^{n-1} \chi_m(\omega_p)\overline{\chi_k(\omega_p)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} \omega_p^m \overline{\omega_p^k}$. Comme $\omega_p^k \in \mathbb{U}$, il vient $\overline{\omega_p^k} = (\omega_p^k)^{-1} = \omega_p^{-k}$ donc $< \chi_m, \chi_k >= \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} \omega_1^{p(m-k)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} (\omega_1^{m-k})^p$ car $\omega_p = \omega_1^p$.

<u>Si $m = k$,</u> $< \chi_m, \chi_k >=< \chi_m, \chi_m >= \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} \omega_1^0 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} 1 = 1$ donc $||\chi_m|| = \sqrt{1} = 1$.

<u>Si $m \neq k$,</u> $< \chi_m, \chi_k >= \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} (\omega_1^{m-k})^p$. Or $m \not\equiv k\ [n]$ donc $\omega_1^{m-k} = e^{\frac{2i(m-k)\pi}{n}}$ avec $\dfrac{2(m-k)\pi}{n} \not\equiv 0\ \left[2\pi\right]$

donc $\omega_1^{m-k} \neq 1$ et on a donc $< \chi_m, \chi_k >= \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1 - \omega_1^{(m-k)n}}{1 - \omega_1^{m-k}} = 0$ car $\omega_1^{(m-k)n} = (\omega_1^n)^{m-k} = 1$.

Ainsi, pour $(k,m) \in [\![0;n-1]\!]^2$, on a $< \chi_m, \chi_k >= \delta_{m,k}$.

c. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$, par définition, pour $m \in [\![0;n-1]\!]$, on a $\hat{\chi_k}(\omega_m) =< \chi_k, \chi_m >= \overline{< \chi_m, \chi_k >}$ par définition de $< .,. >$ sur E^2 donc, d'après la question précédente, on a $\hat{\chi_k}(\omega_m) = \delta_{m,k}$. De même, pour $m \in [\![0;n-1]\!]$, $\hat{\hat{\chi_k}}(\omega_m) =< \hat{\chi_k}, \chi_m >= \sum\limits_{p=0}^{n-1} \hat{\chi_k}(\omega_p)\overline{\chi_m(\omega_p)} = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \delta_{p,k}\overline{\chi_m(\omega_p)} = \overline{\chi_m(\omega_k)} = \overline{\chi_k(\omega_m)}$ d'après la question **a.**, ce qu'on peut réduire à $\hat{\hat{\chi_k}} = \overline{\chi_k}$.

d. Pour $\Phi \in E$ et $m \in [\![0;n-1]\!]$, on a $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\hat{\chi_\ell}(m) = \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\delta_{m,\ell}$ d'après la question **c.** d'où la relation $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\hat{\chi_\ell}(m) = \Phi(\omega_m)$. Comme les deux applications Φ et $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\hat{\chi_\ell}$ coïncident sur leur ensemble de définition $\mathbb{U}_n$, on a bien $\Phi = \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\hat{\chi_\ell}$.

e. Pour $(\Phi, \Psi) \in E^2$, on écrit $\Phi = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Phi(\omega_k)\hat{\chi_k}$ et $\Psi = \sum\limits_{m=0}^{n-1} \Psi(\omega_m)\hat{\chi_m}$. Or l'application $\hat{}$, par définition, est linéaire en la première variable et, en la seconde, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire avec les coefficients conjugués des images, ce qui s'appelle l'anti-linéarité (mais n'est plus enseigné en PSI par manque de séries de Fourier). Ainsi, $< \hat{\Phi}, \hat{\Psi} >=< \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Phi(\omega_k)\hat{\chi_k}, \sum\limits_{m=0}^{n-1} \Psi(\omega_m)\hat{\chi_m} >$ s'écrit aussi $< \hat{\Phi}, \hat{\Psi} >= \sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant m \leqslant n-1}} \Phi(\omega_k)\overline{\Psi(\omega_m)} < \hat{\chi_k}, \hat{\chi_m} >$. Or, avec la question **c.** et la définition de $< .,. >$, on a $< \hat{\chi_k}, \hat{\chi_m} >= \delta_{m,k}$ donc $< \hat{\Phi}, \hat{\Psi} >= \sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant m \leqslant n-1}} \Phi(\omega_k)\overline{\Psi(\omega_m)}\delta_{m,k} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Phi(\omega_k)\overline{\Psi(\omega_k)} =< \Phi, \Psi >$.

f. Il est clair que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, comme tout ensemble $\mathcal{F}(X,F)$ des applications de X dans F où X est un ensemble non vide et F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. D'après la question **d.**, toute fonction Φ de E s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{B} = (\hat{\chi_0}, \cdots, \hat{\chi_{n-1}})$. La famille $\mathcal{B}$ est donc génératrice de

E. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k \hat{\chi_k} = 0$, alors en évaluant en ω_m pour $m \in [\![0; n-1]\!]$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k \hat{\chi_k}(\omega_m) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k \delta_{m,k} = \lambda_m = 0$ d'après **c.**. Ainsi, $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$ donc $\mathcal{B}$ est aussi libre. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une base de E ce qui prouve que $\dim(E) = \text{card}\,(\mathcal{B}) = n$.

On a déjà dit que $< .,. >$ était linéaire à gauche, ce qui garantit la linéarité de L. Soit $\Phi \in \text{Ker}(L)$, alors en écrivant $\Phi = \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell) \hat{\chi_\ell}$, on a $L(\Phi) = \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell) L(\hat{\chi_\ell}) = 0$ par linéarité de L donc, comme $\hat{\hat{\chi_\ell}} = \overline{\chi_\ell}$ d'après la question **c.**, on a $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell) \overline{\chi_\ell} = 0$. En conjuguant, on obtient donc $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \overline{\Phi(\omega_\ell)} \chi_\ell = 0$ ce qui, par liberté de $\mathcal{B}$, montre que $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $\overline{\Phi(\omega_\ell)} = 0$ donc $\Phi(\omega_\ell) = 0$. Ainsi, $L = 0$. Comme $\text{Ker}(L) = \{0\}$, L est injectif et, comme on est en dimension finie, L est un automorphisme de E.

De plus, pour une fonction $\Phi \in E$, on a $||\hat{\Phi}||^2 =< \hat{\Phi}, \hat{\Phi} >=< \Phi, \Phi >= ||\Phi||^2$ d'après **e.** donc, comme $< \Phi, \Phi >= \sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \Phi(\omega) \overline{\Phi(\omega)} = \sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\Phi(\omega)|^2 \geqslant 0$, en passant à la racine, on a bien $||\hat{\Phi}|| = ||\Phi||$.

12 **a.** Comme $\deg(P_n) = n \geqslant 1$, on a $\deg(P_n') = n - 1$. De plus, comme la fonction polynomiale P_n est de classe C^1 et que $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $P(k) = P(k+1) = 0$, d'après le théorème de ROLLE, il existe $s_k \in]k; k+1[$ tel que $P'(s_k) = 0$. On a donc $n - 1$ racines distinctes $s_0, \cdots, s_{n-1}$ de P_n' qui est de degré $n - 1$, ce sont donc les seules. En particulier, $r_n = s_0$ est l'unique réel de $]0; 1[$ tel que $P'(r_n) = 0$.

b. Pour des fonctions dérivables, comme pour des polynômes formels, on a $\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\Big)' = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k' \Big(\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} f_i\Big)$. Si on applique ceci avec $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} f_k$ avec $f_k = X - k$, on a donc $P_n' = \sum\limits_{k=0}^{n} \prod\limits_{i=0,\ i\neq k}^{n} (X - i)$ car $f_k' = (X - k)' = 1$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus [\![0; n]\!]$, on a $P_n(x) \neq 0$, d'où $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\prod\limits_{i=0,\ i\neq k}^{n} (x - i)}{\prod\limits_{i=0}^{n} (x - i)}$ ce qui se simplifie en $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x - k}$.

c. Puisque $P_n'(r_n) = 0$ et $r_n \notin [\![0; n]\!]$, d'après **b.**, $\dfrac{1}{r_n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{r_n - k}$ donc $\dfrac{1}{r_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k - r_n} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ car $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $0 < k - r_n \leqslant k$. Comme la série harmonique diverge par RIEMANN, la suite $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = H_n\Big)_{n\geqslant 1}$ de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{r_n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

d. Mieux que ci-dessus, on a $\forall k \in [\![2; n]\!]$, $k - 1 \leqslant k - r_n \leqslant k$ donc $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{k - r_n} \leqslant \dfrac{1}{k - 1}$ donc, en sommant, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{r_n} \leqslant \dfrac{1}{1 - r_n} + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k - 1}$. Mais comme $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $H_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n-1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ car $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1 - r_n} = 0$, par encadrement, on a $\dfrac{1}{r_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $r_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(n)}$.

e. Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1)$ donc $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge ce qui, par dualité suite-série, prouve la convergence (vers $\gamma \sim 0,577$) de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} \gamma + o(1)$ d'où $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = u_n + \ln(n) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

13 **a.** Tout d'abord, comme le degré de P' est inférieur à celui de P, u va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, la linéarité de la dérivation montrant bien que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme $\forall k \in [\![1;n]\!],\ u\left(\frac{X^k}{k!}\right) = \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}$, si on prend la famille $\mathcal{B} = \left(\frac{X^k}{k!}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car elle contient $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ polynômes et qu'elle est libre puisque constituée de polynômes de degrés échelonnés. Par construction, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = (a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon : elle ne contient bien que des 0 et des 1.

b. Considérons l'endomorphisme $\varphi = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - u$ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P - P'$. D'après la question **a.**, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_{n+1} - A$ est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale donc $\det(\varphi) = 1 \neq 0$ ce qui prouve que $\varphi \in GL(\mathbb{R}_n[X])$. Comme φ est bijective, $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ P - P' = Q$.

On peut même facilement trouver φ^{-1} : si $Q = \varphi(P) = P - P'$, en dérivant successivement, on a même $P' - P'' = Q', \cdots, P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$. Or $P^{(n+1)} = 0$ donc $P = \varphi^{-1}(Q) = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$.

c. <u>Méthode 1</u> : Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)e^{-x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (P'(x) - P(x))e^{-x} = -Q(x)e^{-x} \leqslant 0$ donc f est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées, on a donc f positive sur $\mathbb{R}$ d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

<u>Méthode 2</u> : on constate d'abord que P et Q ont même degré et même coefficient dominant. Si $Q = \lambda \geqslant 0$, alors $P = \lambda$ aussi et le résultat est vérifié. Sinon, $\deg(Q) \geqslant 1$ donc, comme Q reste positif sur $\mathbb{R}$, Q est de degré pair et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x) = +\infty$. Par conséquent, on a aussi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$. S'il existait un réel x_0 tel que $P(x_0) < 0$, alors P admettrait un minimum sur $\mathbb{R}$ (classique). On peut donc définir $m = \underset{\mathbb{R}}{\text{Min}}(P) = P(\alpha)$. Comme P est de classe C^∞, on aurait $P'(\alpha) = 0$. Ainsi $Q(\alpha) = P(\alpha) - P'(\alpha) = P(\alpha) \leqslant P(x_0) < 0$: NON !!! On en déduit encore que P reste positif sur $\mathbb{R}$.

<u>Méthode 3</u> : La fonction P est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E)\ :\ y - y' = Q$. Les solutions de l'équation homogène associée $(E_0)\ :\ y - y' = 0$ sont les $y : x \mapsto \lambda e^x$. Par variation de la constante, on trouve qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \alpha e^x - e^x \int_0^x Q(t)e^{-t}dt$ qui s'écrit aussi $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)e^{-x} = \alpha - \int_0^x Q(t)e^{-t}dt$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)e^{-x} = 0$ par croissances comparées et $\int_0^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt$ converge car $t \mapsto Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $Q(t)e^{-t} \underset{+\infty}{=} o(e^{-t/2})$ par exemple. Ainsi, en passant à la limite, $\alpha = \int_0^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = e^x \int_0^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt - e^x \int_0^x Q(t)e^{-t}dt = e^x \int_x^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

d. Soit $d = \deg(P) \leqslant n$ et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_d$ les $d \leqslant n$ racines réelles distinctes de P qu'on suppose scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Les valeurs $P'(\alpha_1), \cdots, P'(\alpha_d)$ sont non nulles car les α_k sont des racines simples de P. Les valeurs $P'(\alpha_1), \cdots, P'(\alpha_d)$ ont des signes alternés car P change de signe au passage de chaque α_k : faire un dessin ! Comme $P - P' = Q$, on a $\forall k \in [\![1;d]\!],\ Q(\alpha_k) = -P'(\alpha_k)$ donc les valeurs $Q(\alpha_1), \cdots, Q(\alpha_d)$ sont de signes stricts alternés donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe des valeurs $\beta_1, \cdots, \beta_{d-1}$ telles que $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{d-1} < \beta_{d-1} < \alpha_d$ et $Q(\beta_1) = \cdots = Q(\beta_{d-1}) = 0$. Comme $Q = P - P'$, on a $\deg(Q) = \deg(P - P') = \deg(P)$ et P et Q ont les mêmes coefficients dominants. Traitons deux cas :

- Si $P'(\alpha_d) > 0$, P est positive localement à droite de α_d mais comme il n'y a pas de racine de P à droite de α_d, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$ aussi et, comme $Q(\alpha_d) < 0$, il existe encore par le théorème des valeurs intermédiaires un réel $\beta_d > \alpha_d$ tel que $Q(\beta_d) = 0$ ce qui fait bien

d racines distinctes de Q et Q est aussi scindé à racines simples.

• Si $P'(\alpha_d) < 0$, P est négative localement à droite de α_d mais comme il n'y a pas de racine de P à droite de α_d, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = -\infty$ aussi et, comme $Q(\alpha_d) > 0$, il existe encore par le théorème des valeurs intermédiaires un réel $\beta_d > \alpha_d$ tel que $Q(\beta_d) = 0$ ce qui fait bien d racines distinctes de Q et Q est aussi scindé à racines simples.

Dans les deux cas, si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors Q l'est aussi.

14 **a.** Méthode 1 : supposons que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée. Alors il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En notant L_i la ligne i de A_x, on a donc par construction $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ ce qui rend les lignes de A_x liée, donc $\det(A_x) = 0$. Par contre-apposée, si $\det(A_x) \neq 0$, $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E.

Méthode 2 : supposons $\det(A_x) \neq 0$ et soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En évaluant en les $x_1, \cdots, x_n$, $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_j) = 0$, ce qui se traduit par $A_x^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Or A_x est inversible par hypothèse, A_x^T l'est aussi, donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ceci assure directement la liberté de $(f_1, \cdots, f_n)$ dans E.

b. Initialisation : si $n = 1$, $f_1 \in E$ telle que (f_1) est libre, alors $f_1 \neq 0$ ce qui prouve l'existence d'un réel x_1 tel que $f_1(x_1) \neq 0$. Ainsi, en prenant $x = (x_1) \in \mathbb{R}$ et $A_x = (f_1(x_1)) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on a bien $\det(A_x) = f_1(x_1) \neq 0$.

Hérédité : soit $n \geqslant 2$ tel que pour toute famille libre $(f_1, \cdots, f_{n-1}) \in E^{n-1}$, il existe une famille de réels $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\det(A'_x) \neq 0$ en notant $A'_x = \big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Soit maintenant $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille libre de E, alors la sous-famille $(f_1, \cdots, f_{n-1})$ est libre donc, par hypothèse de récurrence, il existe $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel qu'en notant $A'_{x'} = \big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, on ait $\det(A'_{x'}) \neq 0$. Pour $x_n \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$, on pose $A_x = \big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on développe par rapport à la dernière colonne pour avoir $\det(A_x) = \alpha_1 f_1(x_n) + \cdots + \alpha_n f_n(x_n)$ avec $\alpha_n = \det(A'_{x'}) \neq 0$. Or la fonction $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ est non nulle car $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre donc il existe une valeur $x_n \in \mathbb{R}$ telle que $\alpha_1 f_1(x_n) + \cdots + \alpha_n f_n(x_n) = \det(A_x) \neq 0$ ce qui clôt les débats.

Par principe de récurrence, si $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre, il existe $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\det(A_x) \neq 0$.

15

16 **a.** Comme $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, on peut écrire $P = a_1 X + \cdots + a_p X^p$ de degré $p \geqslant 1$ tel que $a_1 = P'(0) \neq 0$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$, on a donc $f(x) = 0_E$ et $\exists y \in E,\ x = f(y)$. Ainsi $f^2(y) = 0_E$. Par hypothèse, $P(f) = a_1 f + \cdots + a_p f^p = 0$ qu'on applique en y pour avoir $0_E = a_1 f(y)$ puisque $\forall k \geqslant 2,\ f^k(y) = 0_E$. Ainsi, comme $a_1 \neq 0$, on a $f(y) = x = 0_E$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont donc en somme directe. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(E)$ par la formule du rang (voilà l'apport de la dimension finie), on conclut que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E si E est de dimension finie.

b. Avec les mêmes notations et le même raisonnement, on sait déjà que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe. Soit $x \in E$, alors $P(f)(x) = 0_E$ donc $a_1 f(x) + \cdots + a_p f^p(x) = f(a_1 x + a_2 f(x) + \cdots + a_p f^{p-1}(x)) = 0_E$ ce qui prouve que $a_1x+a_2f(x)+\cdots+a_pf^{p-1}(x)\in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $a_1\neq 0$, $y=x+\dfrac{a_2}{a_1}f(x)+\cdots+\dfrac{a_p}{a_1}f^{p-1}(x)\in \mathrm{Ker}(f)$. Mais $z=-\dfrac{a_2}{a_1}f(x)-\cdots-\dfrac{a_p}{a_1}f^{p-1}(x)\in \mathrm{Im}\,(f)$ car $z=f\Big(-\dfrac{a_2}{a_1}x-\cdots-\dfrac{a_p}{a_1}f^{p-2}(x)\Big)$ et on a $x=y+z$; on vient d'établir que $E=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}\,(f)$.

Même en dimension infinie qu'avec les conditions de l'énoncé, $\mathrm{Ker}\,f$ et $\mathrm{Im}\,f$ sont supplémentaires dans E.

17 Les deux applications f et g de l'énoncé sont clairement linéaires donc des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $\varphi=g\circ f=f\circ g$ donc φ est aussi linéaire (c'était clair) mais on a aussi $\det(\varphi)=\det(f)\det(g)$.

Pour f : soit $\mathcal{B}_\ell=(E_{1,1},E_{1,2},\cdots,E_{1,n},E_{2,1},\cdots,E_{2,n},\cdots\cdots,E_{n,1},\cdots,E_{n,n})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ écrite ligne par ligne et $P=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_\ell}(f)$. $f(E_{1,1})=E_{1,1}A$ est la matrice dont la première ligne est celle de A et toutes les autres sont nulles donc $f(E_{1,1})=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1,j}E_{1,j}$. Ceci prouve que la première colonne de P contient dans l'ordre $a_{1,1},\cdots,a_{1,n},0,\cdots,0$. De même, $f(E_{1,2})=E_{1,2}A$ est la matrice dont la première ligne est la seconde de A et toutes les autres sont nulles donc $f(E_{1,2})=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{2,j}E_{1,j}$ donc la seconde colonne de P contient dans l'ordre $a_{2,1},\cdots,a_{2,n},0,\cdots,0$. On continue comme ceci pour toutes les colonnes de P pour se rendre compte que P est diagonale par blocs avec n fois A^T sur la diagonale : $P=\mathrm{diag}(A^T,\cdots,A^T)$. On sait qu'alors $\det(f)=\det(P)=(\det(A^T))^n=(\det(A))^n$.

Pour g : soit $\mathcal{B}_c=(E_{1,1},E_{2,1},\cdots,E_{n,1},E_{1,2},\cdots,E_{n,2},\cdots\cdots,E_{1,n},\cdots,E_{n,n})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ écrite colonne par colonne et $Q=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(g)$. $g(E_{1,1})=AE_{1,1}$ est la matrice dont la première colonne est celle de A et toutes les autres sont nulles donc $g(E_{1,1})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i,1}E_{i,1}$. Ceci prouve que la première colonne de Q contient dans l'ordre $a_{1,1},\cdots,a_{n,1},0,\cdots,0$. De même, $g(E_{2,1})=AE_{2,1}$ est la matrice dont la première colonne est la seconde de A et toutes les autres sont nulles donc $g(E_{2,1})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i,2}E_{i,1}$ donc la seconde colonne de Q contient dans l'ordre $a_{2,1},\cdots,a_{2,n},0,\cdots,0$. On continue comme ceci pour toutes les colonnes de Q pour se rendre compte que Q est diagonale par blocs avec n fois A sur la diagonale : $Q=\mathrm{diag}(A,\cdots,A)$. On sait qu'alors $\det(g)=\det(Q)=(\det(A))^n$.

Ainsi, d'après ce qui précède, $\det(\varphi)=(\det(A))^{2n}$.

18 **a.** Comme $u^{n-1}\neq 0$, par définition, il existe un vecteur $x\in E$ tel que $u^{n-1}(x)\neq 0_E$. Posons alors $\mathcal{B}=(x,u(x),\cdots,u^{n-1}(x))$, cette famille de vecteurs de E comporte n vecteurs et $\dim(E)=n$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est libre pour établir que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Soit $(\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1})\in\mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_ku^k(x)=0_E$ (1). Par l'absurde, supposons $(\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1})\neq(0,\cdots,0)$ et posons alors $m=\mathrm{Min}(\{k\in[\![0;n-1]\!]\mid\lambda_k\neq 0\})$. La relation (1) devient donc $\sum\limits_{k=m}^{n-1}\lambda_ku^k(x)=0_E$ ce qui, en composant par u^{n-m-1}, devient $\sum\limits_{k=m}^{n-1}\lambda_ku^{n-m-1+k}(x)=0_E$. Or, dès que $k\geqslant m+1$, on a $n-m-1+k\geqslant n$ donc $u^{n-m-1+k}=u^n\circ u^{k-m-1}=0$ et la relation se résume à $\lambda_mu^{n-1}(x)=0_E$, ce qui est impossible car $\lambda_m\neq 0$ et $u^{n-1}(x)\neq 0_E$ par définition. On a donc montré que $(\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1})=(0,\cdots,0)$ ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est libre donc que $\mathcal{B}$ est une base de E.

b. Pour tout entier $k\in[\![0;n]\!]$, $\mathrm{Im}\,(u^k)=\mathrm{Vect}(u^k(x),\cdots,u^k(u^{n-1}(x))=\mathrm{Vect}(u^k(x),\cdots,u^{n-1}(x))$ car

$u^k(u^{n-k}(x)) = \cdots = u^k(u^{n-1}(x)) = 0_E$ et que $\mathcal{B} = (x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Comme $(u^k(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une famille libre car c'est une sous-famille de $\mathcal{B}$, la famille $(u^k(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est à la fois libre et génératrice dans $\mathrm{Im}\,(u^k)$ donc $\mathrm{rang}\,(u^k) = \dim(\mathrm{Im}\,(u^k)) = n - k$. Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$. Mais comme on a vu que $u^{n-k}(x), \cdots, u^{n-1}(x)$ étaient dans $\mathrm{Ker}(u^k)$ et que cette famille $(u^{n-k}(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ de k vecteurs est libre une nouvelle fois car c'est une sous-famille de $\mathcal{B}$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(u^k)$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Vect}(u^{n-k}(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est de dimension k pour $k \in [\![0; n]\!]$.

c. Comme u^k et u commutent pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on sait d'après le cours que $\mathrm{Ker}(u^k)$ est stable par u.

Réciproquement, soit F un sous-espace de E stable par u. Notons $k = \dim(F) \in [\![0; n]\!]$. Traitons deux cas :

- si $k = 0$, alors $F = \{0_E\} = \mathrm{Ker}(u^0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E)$.
- si $k \in [\![1; n]\!]$, on peut considérer l'endomorphisme u_F induit par u sur F. Comme u est nilpotent, u_F l'est aussi car $\forall x \in F,\ u_F^n(x) = u^n(x) = 0_E$. Posons p son indice de nilpotence, c'est-à-dire l'unique entier p tel que $u_F^p = 0$ et $u_F^{p-1} \neq 0$. Comme en **a.**, il existe un vecteur $x \in F$ tel que $(x, \cdots, u^{p-1}(x))$ est libre. Ainsi, $\dim(F) = k \geqslant p$ et on a donc $u_F^k = u_F^p \circ u_F^{k-p} = 0$ ce qui prouve que $\forall x \in F,\ u_F^k(x) = u^k(x) = 0_E$ donc $F \subset \mathrm{Ker}(u^k)$. Par inclusion et égalité des dimensions, $F = \mathrm{Ker}(u^k)$.

Par conséquent, les sous-espaces de E stables par u sont les $n + 1$ sous-espaces $\mathrm{Ker}(u^k)$ pour $k \in [\![0; n]\!]$.

ORAUX 2023 THÈME 3
SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

19 Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{2n^2+5n+3}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{2^{n-1}} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées donc, par comparaison à une série de Riemann, comme $2 > 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Pour calculer la somme de cette série numérique, posons $a_n = 2n^2+5n+3$ et considérons la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Toujours par croissances comparées, $(a_n x^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ donc, par définition, le rayon de cette série entière vaut $R = 1$. Pour $x \in]-1;1[$, comme $a_n = 2(n+1)(n+2)-(n+1)$, on a $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$ (les deux séries convergent puisque les deux rayons valent encore 1). On reconnaît les dérivées de la série géométrique, $\forall x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \Big(\dfrac{1}{1-x}\Big)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n = \Big(\dfrac{1}{1-x}\Big)'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ de sorte que $f(x) = \dfrac{4}{(1-x)^3} - \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{3+x}{(1-x)^3}$. Ainsi, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2n^2+5n+3}{2^n} = f\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{3+(1/2)}{(1-(1/2))^3} = 28$.

20

21 **a.** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ c qui montre, par le théorème fondamental de l'intégration, que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f qui s'annule en 0. De plus, on sait que $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^*, f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ et cette formule marche aussi pour $t = 0$ car $1 = \dfrac{(-1)^0 t^{2.0}}{(2.0+1)!}$. Comme le rayon de convergence de $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ vaut $R = +\infty$, on peut intégrer terme à terme sur $\widetilde{[0;x]}$ qui est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}\Big)dt = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \exp(-xe^{-it})$ est continue sur le segment $J = \Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big]$ donc l'intégrale $I(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt$ existe. On sait que $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ donc, en prenant $z = -xe^{-it}$, on obtient $\forall t \in J,\ \exp(-xe^{-it}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $h_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$.
Comme $\forall t \in J,\ |h_n(t)| = \dfrac{|x|^n}{n!}$, on a $||h_n||_{\infty,J} = \dfrac{|x|^n}{n!}$ et la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{|x|^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} h_n$ converge normalement vers h sur le segment J. Comme toutes les h_n et h sont continues sur J, le théorème d'intégration terme à terme sur segment montre que $I(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \dfrac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons l'intégrale $L_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!} dt$. On a le cas particulier $L_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1.dt = \frac{\pi}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $L_n = \dfrac{(-1)^n x^n}{n!} \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-int} dt = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{\pi/2} = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \times \frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}$.
Comme on sait que $\operatorname{Re}(I(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(L_n)$ et que $\operatorname{Re}\left(\dfrac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = 0$ si $n \geqslant 2$ est pair et que l'on a $\operatorname{Re}\left(\dfrac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{e^{-i(2k+1)\pi/2} - 1}{-i(2k+1)}\right) = \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ si $n = 2k+1 \geqslant 1$ est impair, il ne reste dans la formule ci-dessus que $\operatorname{Re}(I(x)) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.

c. Par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|I(x)| = \left|\displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})| dt$. Or $\exp(-xe^{-it}) = e^{-x\cos(t)} e^{ix\sin(t)}$ donc $|\exp(-xe^{-it})| = e^{-x\cos(t)}$.

<u>Méthode 1</u> : la fonction $\cos$ est concave sur J car $\cos'' = -\cos \leqslant 0$ sur J donc $\forall t \in J,\ \cos(t) \geqslant 1 - \dfrac{2t}{\pi}$. Ainsi, $e^{-x\cos(t)} \leqslant e^{-x} e^{2xt/\pi}$ donc $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})| dt \leqslant e^{-x} \int_0^{\pi/2} e^{2xt/\pi} dt$. On en déduit donc que $|I(x)| \leqslant e^{-x} \left[\dfrac{\pi}{2x} e^{2xt/\pi}\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi e^{-x}(e^x - 1)}{2x} = \dfrac{\pi(1 - e^{-x})}{2x}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x} = 0$, par encadrement, on obtient la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt = 0$.

<u>Méthode 2</u> : soit $g : \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \exp(-xe^{-it})$ de sorte que $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x,t) dt$.

(H_1) pour tout $t \in J$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x,t) = 0 = a(t)$ car $\cos(t) > 0$.

(H_2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $h_x : t \mapsto g(x,t)$ et a sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

(H_3) pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $|g(x,t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

D'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x) = \int_0^{\pi/2} a(t) dt = 0$.

D'après les questions précédentes, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(I(x)) = \dfrac{\pi}{2} - F(x)$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x) = 0$, on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Re}(I(x)) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - F(x)\right) = 0$. Ceci assure l'existence d'une limite finie de F en $+\infty$ et sa valeur $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$ qu'on note $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de DIRICHLET).

22

23 **a.** Si, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (-1)^n$, le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vaut $R = 1$ et sa fonction somme $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ est majorée par 1 sur $[0;1[$.

b. L'hypothèse se traduit par $a_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc, pour tout réel $r \in]0;1]$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi donc, par définition, le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie donc $R \geqslant 1$. Ainsi, la fonction somme $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-1;1[$ au minimum.

c. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|na_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, si $n \geqslant n_0$ et $x \in]0;1[$, il vient $\big|f(x)\big| = \left|\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| x^n \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ par inégalité triangulaire. On en déduit la majoration $\left|f(x)\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{n_0-1}|a_n|x^n - \frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=1}^{n_0-1}\frac{x^n}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$. De plus, comme $\varphi : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{n_0-1}|a_n|x^n - \frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=1}^{n_0-1}\frac{x^n}{n}$ est polynomiale donc continue en 1, elle est bornée et on a $\varphi(x) \underset{1}{=} o(\ln(1-x))$ car $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x) = -\infty$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [1-\alpha;1[,\ |\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|\ln(1-x)|$. En combinant ces deux renseignements, $\forall x \in [1-\alpha;1[,\ \left|f(x)\right| \leqslant \varepsilon|\ln(1-x)|$ car on sait que $\ln(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ si $x \in]-1;1[$. Ainsi, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in [1-\alpha;1[,\ \left|f(x)\right| \leqslant \varepsilon|\ln(1-x)|$. Ceci justifie bien que $f(x) \underset{1^-}{=} o(\ln(1-x))$.

d. Avec l'exemple de la question **a.**, si on pose $b_n = (-1)^n$, la fonction somme $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est bien définie sur $]-1;1[$ et vérifie bien $g(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$ car g est bornée sur $[0;1[$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x) = -\infty$. Pourtant, la suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. La réciproque espérée est donc fausse.

Même si on impose que tous les b_n sont positifs, il suffit de prendre $b_n = \frac{1}{n}$ si n est une puissance de 2 et $b_n = 0$ sinon. Alors, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{x^{2^n}}{2^n}$ est de rayon de convergence 1 car $\left(\frac{x^{2^n}}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ par croissances comparées. En notant $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^n}}{2^n}$, on a $\forall x \in [-1;1],\ |g(x)| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 2$ donc g est bornée sur $[-1;1]$ et $g(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$ même si $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 puisque $2^n b_{2^n} = 1$.

Conclusion : si, au voisinage de 1^-, $f(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$, on ne peut pas conclure que $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

24

25

26 **a.** On obtient classiquement $X^2 - 2\mathrm{ch}\,(\alpha)X + 1 = (X - e^{\alpha})(X - e^{-\alpha})$. La quantité $x^2 - 2\mathrm{ch}\,(\alpha)x + 1$ est donc strictement positive hors du segment $[e^{-\alpha};e^{\alpha}]$ reliant les deux racines. Par conséquent, l'ensemble de définition de f_α est $D =]-\infty;e^{-\alpha}[\cup]e^{\alpha};+\infty[$.

b. La fonction f_α est de classe C^1 sur D par opérations. Comme $\forall x \in D,\ f_\alpha(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2\mathrm{ch}\,(\alpha)x + 1)$, on a $f'_\alpha(x) = \frac{x - \mathrm{ch}\,(\alpha)}{(x-e^{\alpha})(x-e^{-\alpha})} = -\frac{1}{2(e^{\alpha}-x)} - \frac{1}{2(e^{-\alpha}-x)} = -\frac{e^{-\alpha}}{2}.\frac{1}{1-e^{-\alpha}x} - \frac{e^{\alpha}}{2}.\frac{1}{1-e^{\alpha}x}$. Pour tout réel $x \in]-e^{-\alpha};e^{-\alpha}[$, on a $|e^{-\alpha}x| < 1$ et $|e^{\alpha}x| < 1$ donc on a $f'_\alpha(x) = -\frac{e^{-\alpha}}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-\alpha}x)^n - \frac{e^{\alpha}}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{\alpha}x)^n$ grâce aux séries géométriques. On a donc la relation $\forall x \in]-e^{-\alpha};e^{-\alpha}[,\ f'_\alpha(x) = -\frac{e^{-\alpha}}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-\alpha}x)^n - \frac{e^{\alpha}}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{\alpha}x)^n$ qu'on peut simplifier en $f'_\alpha(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{(n+1)\alpha}+e^{-(n+1)\alpha}}{2}x^n = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathrm{ch}\,((n+1)\alpha)x^n$. f_α est donc développable en série entière sur $]-e^{-\alpha};e^{-\alpha}[$. En intégrant à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, comme $f_\alpha(0) = 0$, on a $\forall x \in]-e^{-\alpha};e^{-\alpha}[,\ f_\alpha(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathrm{ch}\,((n+1)\alpha)\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

27 **a.** Si $x = 0$, on a $\forall n \geqslant 2,\ u_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n(0)$ converge.

Si $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nx})$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n) = +\infty$ donc $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o((e^{-x})^n)$ et, comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}(e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n(x)$ converge absolument donc converge. On a donc convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ sur $\mathbb{R}_+$. On note $S = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}u_n$. Pour aller plus loin, si

$x<0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = -\infty$ par croissances comparées donc $\mathbb{R}_+$ est bien l'ensemble de définition de S.

b. Soit $n \geqslant 2$, u_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{\ln(n)}(1-nx)e^{-nx}$ avec $u_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Ainsi, u_n est positive et atteint son maximum (même en valeur absolue) en $x_n = \dfrac{1}{n}$ et il vaut $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = u_n(x_n) = \dfrac{1}{en\ln(n)}$. Comme la fonction $f : x \to \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue, décroissante sur $[2;+\infty[$ et admet comme primitive la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ qui admet une limite infinie en $+\infty$, f n'est pas intégrable ce qui prouve, par comparaison série-intégrale, que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge (les séries de Bertrand sont hors programme): ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Pour aller plus loin, comme le défaut de convergence normale est au voisinage de 0, si on prend $a>0$, alors dès que $n > \dfrac{1}{a}$, on a $\dfrac{1}{n} < a$ donc l'étude précédente de la fonction u_n montre que u_n est décroissante et positive sur $[a;+\infty[$ (on s'éloigne de 0) donc $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a)$ et, cette fois-ci, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(a)$ converge ce qui montre la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ sur $[a;+\infty[$.

c. Soit $x>0$, $n \geqslant 2$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{xe^{-kx}}{\ln k} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{xe^{-kx}}{\ln(n+1)}$ car les deux séries convergent et que $\forall k \geqslant n+1$, $\ln(k) \geqslant \ln(n+1)$. Ainsi : $R_n(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln(n+1)} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \dfrac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-(k-n-1)x}$.
On reconnaît une série géométrique de raison $e^{-x} < 1$ donc, comme tous les termes sont strictement positifs dans $R_n(x)$: $0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ et ainsi $0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ car $e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-x}$.
Par conséquent, en posant $\varphi : x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{x}{e^x-1}$, on a $\forall x>0$, $0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{\ln(n+1)}$. Or φ se prolonge par continuité en 0 avec $\varphi(0) = 1$ car $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ donc $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, par continuité de φ, elle est bornée (par M) sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geqslant 0$, $0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$ (ça marche aussi pour $x=0$ car $R_n(0) = 0$). Plus précisément, on a même $M=1$ car on connaît l'inégalité de convexité $\forall x>0$, $e^x \geqslant 1+x$ qui équivaut à $e^x - 1 \geqslant x > 0$ donc $\varphi(x) \leqslant 1$ pour $x>0$. On en déduit que $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{\ln(n+1)} = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Pour aller plus loin, comme toutes les u_n tendent vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées, en appliquant le théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} 0 = 0$. Et si on cherche un équivalent de S en $+\infty$, on peut constater que $u_{n+1}(x) \underset{+\infty}{=} o(u_n(x))$ pour tout entier $n \geqslant 2$ donc on peut conjecturer que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} u_2(x)$. Or $\dfrac{S(x)}{u_2(x)} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)x} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n(x)$ en posant $v_n(x) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)x}$. Or v_n est positive et décroissante sur $[1;+\infty[$ (par exemple) donc $||v_n||_{\infty,[1;+\infty[} = v_n(1) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)} \underset{+\infty}{=} o((e^{-1})^n)$ donc, comme $\sum\limits_{n\geqslant 2} (e^{-1})^n$ converge, on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ sur $[1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} v_2(x) = 1$ et que $\forall n \geqslant 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n(x) = 0$, on a à nouveau par théorème de la double limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{u_2(x)} = 1 + \sum\limits_{n=3}^{+\infty} 0 = 1$ ce qui prouve que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} u_2(x) = \dfrac{xe^{-2x}}{\ln(2)}$. De la même manière, on montre que $S(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} u_k(x) \underset{+\infty}{\sim} u_{n+1}(x)$.

28 **a.** Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Ainsi, par composition, $x \mapsto f(ax)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f' aussi ce qui montre que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Si on suppose que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ pour un entier $n \geqslant 1$, alors $x \mapsto f(ax)$ est aussi de classe C^n sur $\mathbb{R}$ donc f' l'est encore et f est donc de classe C^{n+1}

sur $\mathbb{R}$. Par principe de récurrence, f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = f(ax)$ donc $f''(x) = af'(ax) = af(a^2x)$. On continue, $f'''(x) = a^3f'(a^2x) = a^3f(a^3x)$ et $f^{(4)}(x) = a^6f'(a^3x) = a^6f(a^4x)$. Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$, qu'on ait $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}}f(a^nx)$. Alors, en dérivant cette relation, on a $f^{(n+1)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \times a^nf'(a^nx) = a^{\frac{n(n+1)}{2}}f(a^{n+1}x)$. Comme on a $f^{(0)}(x) = f(x) = a^{\frac{0(0-1)}{2}}f(a^0x)$, on a montré pa récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}}f(a^nx)$.

b. Pour $b > 0$, f étant continue sur le segment $[-b;b]$, elle y est bornée et on peut poser $M_b = ||f||_{\infty,[-b;b]}$. Pour $x \in [-b;b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k}! + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^nf^{(n+1)}(t)}{n!}dt$. Pour $t \in \widetilde{[0;x]}$, comme $f^{(n+1)}(t) = a^{\frac{n(n+1)}{2}}f(a^{n+1}t)$ et que $a^nt \in \widetilde{[0;x]} \subset [-b;b]$ car $|a| < 1$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant a^{\frac{n(n+1)}{2}}M_b$. Par inégalité triangulaire, on a $\left|\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^nf^{(n+1)}(t)}{n!}dt\right| \leqslant \left|\displaystyle\int_0^x \frac{|x|^na^{\frac{n(n+1)}{2}}M_b}{n!}\right| = \dfrac{|x|^{n+1}a^{\frac{n(n+1)}{2}}M_b}{n!}$ donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} = 0$ car $|a| < 1$, on a $\forall x \in [-b;b],\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$. Mais ceci étant vrai pour tout $b > 0$ et comme $f^{(k)}(0) = a^{\frac{k(k-1)}{2}}f(0)$, f est bien égale à sa série de TAYLOR sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction $g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_\lambda(x) = \lambda\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}$. Si on pose $a_k = \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} > 0$, on a $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{a^k}{k+1}$ donc, comme $0 < a < 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 0$ donc, par D'ALEMBERT, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_kx^k$ vaut $R = +\infty$ ce qui justifie que la fonction g_λ est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ g'_\lambda(x) = \lambda\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k+1)}{2}}x^k}{k!} = \lambda\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}(ax)^k}{k!} = g_\lambda(ax)$. Avec ce qui précède, les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = g(ax)$ sont les fonctions proportionnelles à $g_1 : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}$, elles constituent donc une droite vectorielle $\text{Vect}(g_1)$.

29 **a.** Posons $a_n = \dbinom{2n}{n} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 4$. D'après D'ALEMBERT, le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dbinom{2n}{n}x^n$ vaut $R = \dfrac{1}{4}$.

b. Si $x = \dfrac{1}{4}$, $a_nx^n = \dbinom{2n}{n}x^n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{2n}}{4^n(2\pi n)n^{2n}e^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec l'équivalent de STIRLING donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ diverge.

Si $x = -\dfrac{1}{4}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$ est alternée et $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \dfrac{2(2n+1)}{4(n+1)} = \dfrac{4n+2}{4n+4} < 1$ d'après **a.** donc la suite $\big(|a_nx^n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 puisqu'on vient de voir que $|a_nx^n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$ converge.

L'ensemble de définition de f est donc $\left[-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right[$.

c. On a vu en question **a.** que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$. En multipliant par x^n et en sommant, on a donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}2(2n+1)a_nx^n = 4x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ et on reconnaît, puisqu'on est dans l'intervalle ouvert de convergence, $f'(x) = 4xf'(x)+2f(x)$ ou $(1-4x)f'(x) = 2f(x)$ donc f est solution sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ de $(E)\ :\ (1-4x)y' - 2y = 0$.

d. On résout classiquement cette équation différentielle linéaire homogène normalisée (E) d'ordre 1 et, comme une primitive de $a : x \mapsto \frac{2}{1-4x}$ est $A : x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1-4x)$ et puisque $f(0) = a_0 = 1$, on a $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, $f(x) = e^{\frac{-\ln(1-4x)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

30 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$. Alors $|f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ donc, par comparaison et critère de RIEMANN, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge pour tout réel x. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$: f est définie sur $\mathbb{R}$. La majoration précédente montre même que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ (on a même égalité car $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2n^2}$) et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\pi}{2n^2}$ converge donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, par théorème, la fonction somme f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- (H_1) On vient de voir que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$).
- (H_2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.
- (H_3) Soit $a > 0$, posons $J_a =]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$, on a $\forall x \in J_a$, $\forall n \geqslant 1$, $|f_n'(x)| \leqslant f_n'(a)$ donc $||f_n'||_{\infty,J_a} = f_n'(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3a^2}$ donc, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 1}||f_n'||_{\infty,J_a}$ converge ce qui justifie que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur J_a.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

c. On effectue une comparaison série-intégrale. Si $x > 0$ est fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $n \geqslant 2$, on a $\int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n) = f_n'(x) \leqslant \int_{n-1}^n g_x(t)dt$. On somme pour n allant de 1 à p pour l'inégalité de gauche et pour n allant de 2 à p pour celle de droite et on obtient par CHASLES $\int_1^{p+1} g_x(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^{p} f_n'(x) \leqslant f_1'(x) + \int_1^p g_x(t)dt$. Or, pour $y \geqslant 1$, on a $\int_1^y g_x(t)dt = \int_1^y \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2t}{2(1+x^2t^2)}\right)dt = \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\right]_1^y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2y^2}{y^2}\right)$ donc $\lim_{y\to+\infty}\int_1^y g_x(t)dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Ainsi, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'encadrement ci-dessus, on parvient à $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x) \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Par encadrement, on en déduit l'équivalent $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$. Pour $x > 0$ par exemple, par le théorème des accroissements finis, puisque f est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$, il existe $c_x \in]0;x[$ tel que $\frac{f(x)}{x} = f'(c_x)$ donc, comme $\lim_{x\to 0^+} c_x = 0^+$, on a $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = +\infty$: le graphe de f admet donc en 0^+ une tangente verticale et f n'est pas dérivable en 0, ni à gauche ni à droite car toutes les f_n étant impaires, la fonction f est aussi impaire.

Pour $x > 0$, comme $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ pour $a > 0$ par le théorème fondamental de l'intégration, en faisant tendre a vers 0, par continuité de f en 0, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. Comme $f'(t) \underset{0}{\sim} -\ln((t)$, on a $f'(t) + \ln(t) \underset{0}{=} o(\ln(t))$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0;\alpha[, |f'(t) + \ln(t)| \leqslant \varepsilon|\ln(t)|$. Ainsi, $\left|\int_0^x (f'(t)+\ln(t))dt\right| \leqslant \varepsilon \int_0^x (-\ln(t))dt$. Il vient donc $\left|f(x)+x\ln(x)-x\right| \leqslant \varepsilon\left|x\ln(x)-x\right|$, ce qui garantit que $f(x) + x\ln(x) - x \underset{0}{=} o(x\ln(x) - x)$, ou encore que $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x) + x$. Mais comme $-x\ln(x) + x \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$, on a enfin l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$.

d. Comme toutes les f_n sont croissantes comme la fonction Arctan, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. On pouvait aussi utiliser la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et l'expression de sa dérivée positive vue en **b.**.

e. On a vu en **b.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Or les fonctions f_n admettent des limites finies en $\pm\infty$. Par le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^3}{12}$. Comme f est impaire car toutes les fonctions f_n le sont, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$.

f. La fonction f est impaire, croissante et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^3}{12} \sim 2,58$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$. Son graphe ressemble donc à celui de la fonction Arctan, avec deux asymptotes horizontales d'équation $y = \pm\frac{\pi^3}{12}$, mais avec une tangente verticale en 0.

31

32 **a.** On calcule $a_2 = a_1 + a_0 = 2$, $a_3 = a_2 + 2a_1 = 4$, $a_4 = a_3 + 3a_2 = 10$, $a_5 = a_4 + 4a_3 = 26$ et on peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_n \leqslant 2(n-1)!$. On vient de faire l'initialisation.

Soit $n \geqslant 1$ tel que $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 2n!$ et $0 \leqslant a_n \leqslant 2(n-1)!$, comme $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$, on a $0 + (n+1).0 \leqslant a_{n+2} \leqslant 2n! + 2(n+1)(n-1)! = 2(n-1)!(n+n+1) \leqslant 2(n-1)!(n(n+1)) = 2(n+1)!$ car $n+1 \leqslant n^2$ puisque $n \geqslant 1$. Par principe de récurrence double, on a $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant a_n \leqslant 2(n-1)!$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{a_n}{n!} \leqslant \frac{2}{n}$ donc, par encadrement, $\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Comme la suite $\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, elle est bornée, donc par définition du rayon de convergence d'une série entière, on a $R \geqslant 1$.

c. Les dérivations qui suivent sont valides sur l'intervalle ouvert de convergence. Pour $x \in]-R;R[$, on a $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{na_n}{n!}x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}x^n$ et $f''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{na_{n+1}}{n!}x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+2}}{n!}x^n$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+2}x^n}{n!} = \frac{a_{n+1}x^n}{n!} + \frac{(n+1)a_nx^n}{n!}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+2}x^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}x^n}{n!} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)a_nx^n}{n!}$ en sommant ce qui revient à $f''(x) = f'(x) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{na_nx^n}{n!} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_nx^n}{n!} = f'(x) + xf'(x) + f(x)$. Par conséquent, f est solution sur $]-R;R[$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - (1+x)y' - y = 0$.

d. D'après la question précédente, on a $f''(x) - (1+x)f'(x) - f(x) = (f'(x) - (1+x)f(x))' = 0$. Comme $]-R;R[$ est un intervalle et que $f'(0) - (1+0)f(0) = a_1 - a_0 = 0$, on a donc $\forall x \in]-R;R[,\ f'(x) - (1+x)f(x) = 0$. On en déduit en intégrant cette équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1 + x$ est $x \mapsto x + \frac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $]-R;R[$, que l'on a

$\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $f(0) = a_0 = 1$.

Alors $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}x^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!2^j}x^{2j}\right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i!j!2^j}\Big)x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $f(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_n}{n!} = \sum_{i+2j=n} \frac{1}{i!j!2^j}$ donc $a_n = \sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i!j!2^j}$. Puisque $2j \leqslant n$ et $i = n-2j$, on a la formule $a_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)!j!2^j}$.

Pour information : on considère l'ensemble I_n des permutations σ de $[\![1;n]\!]$ qui sont des involutions, c'est-à-dire qui vérifient $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$; et on pose $b_n = \mathrm{card}\,(I_n)$. Alors, pour $n \geqslant 1$, on partitionne les involutions σ de $[\![1;n+2]\!]$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de b_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $[\![1;n+1]\!]$ une involution de $[\![1;n+1]\!]$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)b_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors b_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $[\![1;n+1]\!] \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble.

Cette partition implique la relation $b_{n+2} = b_{n+1} + (n+1)b_n$ pour $n \geqslant 1$ et, comme $b_2 = 2 = 1+1.1 = b_1 + 1.b_0$ en prenant comme convention que $b_0 = 1$, on a bien $\forall n \geqslant 0,\ b_{n+2} = b_{n+1} + (n+1)b_n$. On montre alors par une récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

On peut alors expliquer la relation (R) de manière combinatoire, en constatant qu'une involution σ de $[\![1;n]\!]$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n, et on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et x est appelé un point fixe de σ.
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $[\![1;n]\!]$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f = n-2j$ avec $0 \leqslant j \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où $A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n-2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n-2j$ éléments de $[\![1;n]\!]$ qui sont fixes par σ : $\binom{n}{n-2j} = \binom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \binom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \frac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \frac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \mathrm{card}\,(A_n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)!2^j j!}$.

33

34 **a.** Initialisation : f est solution de (E) donc f est dérivable par définition donc continue, de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.
Hérédité : supposons, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, que f soit de classe C^n sur $\mathbb{R}$, alors $f' : x \mapsto f(x) + f(\lambda x)$ est aussi de classe C^n sur $\mathbb{R}$ par somme et composition. Ainsi, f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

Par principe de récurrence, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ pour tout entier n donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b. Soit f solution de (E) telle que $f(0) = 0$, alors $f'(0) = \alpha f(0) + f(0) = 0$ et, plus généralement, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n+1)}(0) = \alpha f^{(n)}(0) + \lambda^n f^{(n)}(0) = 0$. Soit $a > 0$, alors si on note $M_p = \underset{x \in [a-;a]}{\operatorname{Sup}} |f^{(p)}(x)|$, on a avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-a;a]$, $\left| f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leqslant \dfrac{a^{n+1} M_{n+1}}{(n+1)!}$. Mais puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-a;a],\ f^{(n+1)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$ on a $M_{n+1} \leqslant (\alpha+1) M_n$ et donc $M_n \leqslant (\alpha+1)^n M_0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-a;a]$, $\left| f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leqslant \dfrac{a^{n+1}(\alpha+1)^{n+1} M_0}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, f est développable en série entière sur $[-a;a]$ et $f = 0$ sur $[-a;a]$ pour tout $a > 0$: $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

c. Si f est développable en série entière (avec rayon $R > 0$) et solution de l'équation différentielle, alors $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On remplace dans l'équation et $\forall x \in]-R;R[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - \alpha a_n - \lambda^n a_n) x^n = 0$ donc, par unicité des coefficients dans une série entière de rayon strictement positif, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha + \lambda^n}{n+1} a_n$.
Réciproquement, si on définit f par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant cette récurrence et par exemple $a_0 = 1$, on a bien $R = +\infty$ avec d'Alembert car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{\alpha + \lambda^n}{n+1} \right| = 0$ et f est solution de l'équation en remontant les calculs.
Si g est une solution quelconque de l'équation, alors posons $h = g - g(0)f$ où $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\alpha + \lambda^k}{k+1} \Big) x^n$ est la solution développable en série entière qu'on vient de trouver (valant 1 en 0). Comme h est de classe C^∞ et vaut 0 en 0 par construction, on a $h = 0$ d'après la question **c.** car h est solution de l'équation aussi. Ainsi $g = g(0)f$. Par conséquent, $E = \mathrm{Vect}(f)$.

35 **a.** La série alternée $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Par conséquent, le reste d'ordre n de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, noté ici $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ existe bien pour tout $n \geqslant 1$, ce qui prouve que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est bien définie. En notant $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ la somme de la série et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ les sommes partielles, on a $u_n = S - S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (comme pour toute suite de restes d'une série numérique convergente).

b. Le critère spécial des séries alternées nous apprend aussi que u_n est du signe de son premier terme donc de $(-1)^n$. Ainsi, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$ est un terme positif. Enfin, on déduit encore du critère spécial des séries alternées que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ donc $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}} \Big)$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ converge par comparaison à une série de Riemann car $\dfrac{3}{2} > 1$.

c. Comme $S_n = S - u_n$, on a $w_n = \dfrac{(-1)^n S}{n} - \dfrac{(-1)^n}{n} u_n = \dfrac{(-1)^n S}{n} - v_n$. Comme la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n S}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{S}{n} \right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et que $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$

converge d'après la question précédente, par somme, la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge.

d. On a $x_n = (-1)^n w_n = \frac{S}{n} - (-1)^n v_n$. Comme $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n v_n$ converge puisque $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge absolument d'après **b.** et que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{S}{n}$ diverge par RIEMANN, par somme, $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ diverge.

36

37 **a.** f est définie comme la somme de la série entière lacunaire $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ où $a_n = 1$ si n est un carré et $a_n = 0$ sinon. Comme $(a_n x^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $(a_{n^2} x^{n^2})_{n\geqslant 0}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $|x| \leqslant 1$, la rayon de R de cette série entière vaut $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, cette série est grossièrement divergente donc le domaine de définition de f vaut $I =]-1;1[$.

b. En tant que somme d'une série entière de rayon 1, d'après le cours, f est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc a fortiori dérivable sur I.

c. Comme on étudie f au voisinage de 1, on peut se contenter de prendre $x \in]0;1[$, et de poser la fonction $h_x : t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)}$ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $h_x(t) = e^{t^2\ln(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées ($\ln(x) < 0$).

Comme la fonction h_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall k \geqslant 1$, $\int_k^{k+1} h_x(t)dt \leqslant x^{k^2} = h_x(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} h_x(t)dt$. On somme pour k allant de 0 à $+\infty$ à gauche et de 1 à $+\infty$ à droite (l'intégrale et la série convergent) ce qui donne par CHASLES l'encadrement $\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt + h_x(0) = \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt + 1$.

En posant $t = \frac{u}{\sqrt{-\ln(x)}} = \varphi(u)$, φ étant une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, par changement de variable, on a $\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln(x)}dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$.
En effet, par parité de $u \mapsto e^{-u^2}$ sur $\mathbb{R}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$.
Ainsi, on a l'équivalent $f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$ car $1 \underset{1^-}{=} o\left(\sqrt{\frac{1}{-\ln(x)}}\right)$ puisque $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}} = +\infty$.

38 Déjà, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car u_0 est donné et la relation $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}$ définit bien u_{n+1} connaissant les termes $u_0, \cdots, u_n$. On peut montrer facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.
a. Comme $u_0 = 3$, on a $u_1 = u_0^2 = 9$ et $u_2 = 2u_0u_1 = 54$. Ainsi, on a bien $0 \leqslant \frac{u_0}{0!} = 3 \leqslant 4 = 4^{0+1}$, $0 \leqslant \frac{u_1}{1!} = 9 \leqslant 16 = 4^{1+1}$ et $0 \leqslant \frac{u_2}{2!} = 27 \leqslant 64 = 4^{3+1}$. Soit $n \geqslant 3$ tel que $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $0 \leqslant \frac{u_k}{k!} \leqslant 4^{k+1}$, alors $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k} \geqslant 0$ car $u_0, \cdots, u_n$ sont positifs. De plus, par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k u_{n-k}}{k!(n-k)!} \leqslant n!\sum_{k=0}^{n}4^{k+1}4^{n+1-k} = (n+1)!4^{n+2}$ donc $\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} \leqslant 4^{n+2}$.
Par principe de récurrence forte, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$.

b. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$ d'après **a.**, et puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 4^{n+1}x^n$ vaut $\frac{1}{4}$ car $(4^{n+1}x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant \frac{1}{4}$. D'après le cours le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}x^n$ vérifie $R \geqslant \frac{1}{4}$. Ainsi, la fonction f, qui est la somme de cette série entière, est bien définie sur $I = \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\subset]-R;R[$.

c. On dérive terme à terme donc $\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{u_n}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!}x^n$ à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence et après changement d'indice. On a donc $\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k}{k!}.\frac{u_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n$ car $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On reconnaît un produit de CAUCHY, valide puisque $I \subset]-R;R[$, et on a $f'(x) = f(x)^2$. Par conséquent, f est bien solution sur I de l'équation $(E)\ :\ y' = y^2$.

d. Analyse : supposons que f ne s'annule pas sur I, alors $\forall x \in I,\ \frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1 \iff \left(\frac{1}{f(x)} + x\right)' = 0$ donc $x \mapsto \frac{1}{f(x)} + x$ est constante sur l'intervalle I. Or $f(0) = 3$ donc $\forall x \in I,\ \frac{1}{f(x)} + x = \frac{1}{3}$ et $f(x) = \frac{3}{1-3x}$.

Synthèse : soit $g : \left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{3}{1-3x}$. g ne s'annule pas sur I, $g(0) = \frac{1}{3}$ et $g'(x) = \frac{9}{(1-3x)^2} = g(x)^2$. Ainsi, f et g sont solutions du même problème de CAUCHY (non linéaire donc hors programme) et sont donc égales sur I. Si on veut rester dans le programme, on décompose $\forall x \in \left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right[,\ g(x) = 3\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n+1}x^n$. Posons, $v_n = n!3^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Par produit de CAUCHY dans $\left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right[$, on a $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{v_{n+1}}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{v_k}{k!}\frac{v_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n$. Par unicité du développement en série entière, il vient $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{v_k}{k!}\frac{v_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_kv_{n-k}$.
Par récurrence forte, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = n!\,3^{n+1}$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont le même premier terme et la même relation de récurrence, à savoir $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_kv_{n-k}$.

39 La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie par $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 1 + a_k > 0$ par hypothèse.

a. Initialisation : $u_1 + u_2 = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} = \frac{a_1 + a_1a_2 + a_2 + 1 - 1}{(1+a_1)(1+a_2)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$.

Hérédité : soit $n \geqslant 1$, supposons que $\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}$. Alors $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + u_{n+1}$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1 - \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k} + a_{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{1}{1+a_k}$ par hypothèse de récurrence et définition de u_{n+1}. Ainsi, en regroupant les deux derniers termes, $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1 - \frac{1 + a_{n+1} - a_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k)} = 1 - \prod_{k=1}^{n+1}\frac{1}{1+a_k}$.

Par principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}$.

b. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs, la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante donc convergente par le théorème de la limite monotone car elle est minorée par 0. Ainsi, la suite de ses sommes partielles étant convergente, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

c. Posons, $v_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{k}}} > 0$. D'après **b.**, $\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - v_n$. Or on a $\ln(v_n) = -\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Comme $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge par RIEMANN, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{k\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ diverge, ses sommes partielles tendent donc vers $+\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty}\ln(v_n) = -\infty$. Ainsi, puisque $v_n = e^{\ln(v_n)}$, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Par conséquent, si on suppose que $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

40

41 **a.** $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]-\infty;1[$ en la prolongeant par continuité en 0 avec $f(0) = -1$ puisque $\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t$. F est donc la primitive de $-f$ qui s'annule en 0 donc F est au moins définie sur $]-\infty;1[$.
Si $x = 1$, $f(t) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-t) \underset{1^-}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\Big)$ donc f est intégrable sur $[0;1[$ et $F(1)$ existe par comparaison aux intégrales de Riemann. Par conséquent, le domaine définition de F est $D =]-\infty;1]$.
b. D'après le cours, $\forall t \in]-1;1[,\ \ln(1-t) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}$ donc $-f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^{n-1}}{n}$ (marche aussi si $t = 0$). Pour $x \in]-1;1[$, en intégrant terme à terme sur le segment $\widetilde{[0;x]}$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, il vient $F(x) = \displaystyle\int_0^x (-f(t))dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = S(x)$. Par définition de la convergence d'une intégrale, $F(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$. En posant $u_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}$, on a $||u_n||_{\infty,[0;1]} = \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[0;1]$ et, puisque toutes les u_n sont continues sur $[0;1]$, S est continue sur $[0;1]$ donc $F(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = S(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$. On a bien $\forall x \in [0;1],\ F(x) = S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.
c. Soit $G :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$. Par opérations, la fonction G est dérivable sur $]0;1[$. De plus, la fonction F est dérivable sur $]0;1[$ avec $F'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ donc, pour $x \in]0;1[$, on a la relation $(F(x)+F(1-x)-G(x))' = F'(x) - F'(1-x) - G'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\ln(1-(1-x))}{1-x} + \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(x)}{1-x} = 0$ avec l'abus de notation usuel. Ainsi, la fonction $x \mapsto F(x)+F(1-x)-G(x)$ est constante sur l'intervalle $]0;1[$. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} (F(x)+F(1-x)-G(x)) = F(0)+F(1)-\dfrac{\pi^2}{6}$ d'après **b.** et car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\ln(1-x) = 0$ puisque $\ln(1-x) \underset{0}{=} -x$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, donc $\forall x \in]0;1[,\ F(x)+F(1-x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

42

43

44 **a.** Avec la condition de l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \Big|\varphi\Big(\dfrac{x}{2^n}\Big)\Big| \leqslant \dfrac{c|x|}{2^n}$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{c|x|}{2^n}$ converge donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \varphi\Big(\dfrac{x}{2^n}\Big)$ converge absolument donc converge.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n : x \mapsto \varphi\Big(\dfrac{x}{2^n}\Big)$, avec la même majoration, comme $|x| \leqslant a$ pour $x \in I$, on a $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{ca}{2^n}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{ca}{2^n}$ converge comme avant donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur I. Or les u_n sont continues sur I par hypothèse donc, d'après le cours, S est continue sur I.
b. D'après l'hypothèse, comme $0 \in I$, on a $|\varphi(0)| \leqslant c|0| = 0$ donc $\varphi(0) = 0$. Ainsi, $S(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi(0) = 0$. De plus, d'après **a.**, S est continue sur I. Enfin, pour $x \in I$, $S(x) - S\Big(\dfrac{x}{2}\Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\Big(\dfrac{x}{2^n}\Big) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\Big(\dfrac{x}{2^{n+1}}\Big) = \varphi(x)$ après simplification. Par conséquent, S est solution de (P).
c. <u>Méthode 1</u> : soit f une fonction vérifiant (P) et $x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x}{2^k} \in I$ donc $f\Big(\dfrac{x}{2^k}\Big) - f\Big(\dfrac{x}{2^{k+1}}\Big) = \varphi\Big(\dfrac{x}{2^k}\Big)$.

En sommant pour $k \in [\![0;n]\!]$, on obtient, après télescopage, $f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$ (R). Comme f est continue en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(0) = 0$ donc, en passant à la limite dans (R), on a finalement $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = S(x)$ ce qui assure l'unicité.

Méthode 2 : soit S_1 et S_2 deux solutions de (P). Posons $d = S_1 - S_2$, alors d est continue sur I par opérations, $d(0) = S_1(0) - S_2(0) = 0$ et $\forall x \in I,\ d(x) - d\left(\frac{x}{2}\right) = S_1(x) - S_1\left(\frac{x}{2}\right) - S_2(x) + S_2\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$. Soit $x \in I$, en itérant la relation $d(x) = d\left(\frac{x}{2}\right)$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N},\ d(x) = d\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Comme d est continue en 0, en passant à la limite dans cette relation, on a donc $d(x) = d(0)$ donc d est constante. Mais comme on a vu que $d(0) = 0$, la fonction d est nulle sur I.

Ainsi, la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle ce qui assure l'unicité.

d. Comme S est solution de (P) avec la question **b.** et que deux solutions de (P) sont égales d'après la question **c.**, on en déduit que S est la seule solution de (P).

e. Supposons φ de classe C^1 sur I. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- D'après **a.**, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement (même normalement) sur I.
- Toutes les u_n sont de classe C^1 sur I car φ l'est.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $u_n'(x) = \frac{1}{2^n}\varphi'\left(\frac{x}{2^n}\right)$ or φ' est continue sur le segment I donc elle y est bornée et on peut définir $M = ||\varphi'||_{\infty,I}$. On a donc $\forall x \in I,\ |u_n'(x)| \leqslant \frac{M}{2^n}$ donc u_n' est bornée sur I, $||u_n'||_{\infty,I} \leqslant \frac{M}{2^n}$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{M}{2^n}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement sur I.

Si on suppose φ de classe C^1 sur I, alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est aussi de classe C^1 sur I.

45 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$. Si $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ car $\cos$ est bornée. Par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons le théorème adéquat :

(H_1) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (vu en **a.**).

(H_2) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations et $u_n'(x) = -\frac{\sin(nx)}{n^3 + x^2} - \frac{2x\cos(nx)}{(n^3 + x^2)^2}$.

(H_3) Soit $a > 0$, alors $\forall x \in [-a;a],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n'(x)| \leqslant \frac{|\sin(nx)|}{n^3 + x^2} + \frac{2x|\cos(nx)|}{(n^3 + x^2)^2} \leqslant \frac{1}{n^3} + \frac{2a}{n^6} = a_n$ donc $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant a_n$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge par Riemann donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $[-a;a]$.

Par un théorème du cours, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin(nx)}{n^3 + x^2} + \frac{2x\cos(nx)}{(n^3 + x^2)^2}\right)$.

46

47 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{n^2 + t^2}$. Traitons deux cas :

- si $t < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nt} = +\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t) = +\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(t)$ diverge.

- si $t \geqslant 0$, $e^{-nt} \underset{+\infty}{=} O(1)$ donc $u_n(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $f(t)$ existe par RIEMANN.

Ainsi, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc u_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et on a $||u_n||_{\infty, \mathbb{R}_+} = u_n(0) = \frac{1}{n^2}$ et la série de RIEMANN $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Comme toutes les fonctions u_n sont continue sur $\mathbb{R}_+$, par un théorème du cours, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} u_n(t) = \ell_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$.

On peut conjecturer que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} u_1(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t^2}$. Posons $g(t) = \frac{f(t)}{u_1(t)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1+t^2}{n^2+t^2} e^{-(n-1)t}$ donc $g(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$ en posant $g_n(t) = \frac{1+t^2}{n^2+t^2} e^{-(n-1)t}$. La fonction $g_1 : t \mapsto 1$ est bornée sur $[1; +\infty[$ avec $||g_1||_{\infty, [1;+\infty[} = 1 = e^{-(1-1)}$ et, si $n \geqslant 2$, $|g_n(t)| = g_n(t) \leqslant e^{-(n-1)t} \leqslant e^{-(n-1)}$ donc g_n est bornée sur $[1; +\infty[$ et $||g_n||_{\infty, [1;+\infty[} \leqslant e^{-(n-1)}$ et la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 1} e^{-(n-1)}$ converge. Ainsi, $\sum\limits_{n \geqslant 1} g_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$. de plus, $\lim\limits_{t \to +\infty} g_1(t) = 1 = \ell'_1$ et, pur $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{t \to +\infty} g_n(t) = 0 = \ell'_n$. Par double limite à nouveau, $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell'_n = 1$. On a donc bien $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{u_1(t)} = 1$ donc $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t^2}$.

ORAUX 2023 THÈME 4
ESPACES VECTORIELS NORMÉS, GÉOMÉTRIE ET DÉRIVABILITÉ

48 **a.** Soit $f \in E$, on a $f \leqslant |f|$ donc $g = |f| - f \geqslant 0$ ce qui donne, par hypothèse, $u(g) = u(|f|) - u(f) \geqslant 0$ par linéarité de u. De même, $-f \leqslant |f|$ donc $h = |f| + f \geqslant 0$ et, à nouveau $u(h) = u(|f|) + u(f) \geqslant 0$ donc $-u(|f|) \leqslant u(f) \leqslant u(|f|)$ ce qui garantit bien que $|u(f)| \leqslant u(|f|)$.

b. Pour $f \in E$, comme f est continue sur le segment I, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc $|f| \leqslant ||f||_{\infty,I}e$. On pose cette fois $a = ||f||_{\infty,I}e - f \geqslant 0$ donc $u(a) \geqslant 0$ ce qui donne une nouvelle fois par linéarité de u, $||f||_{\infty,I}u(e) - u(|f|) \geqslant 0$. On a donc, d'après **a.**, $|u(f)| \leqslant u(|f|) \leqslant ||f||_{\infty,I}u(e)$ donc on a bien $\forall f \in E,\ |u(f)| \leqslant C||f||_{\infty,I}$ en posant $C = u(e) \geqslant 0$ car e est positive sur I.

c. D'après la question précédente, $\forall f \in E \setminus \{0\},\ \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} \leqslant u(e)$. La partie $A = \left\{ \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} \ \middle|\ f \in E \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$ est non vide (car il existe des fonction non nulle sur I et majoré par $u(e)$ ce qui montre que la borne supérieure de l'énoncé existe et que $\text{Sup}(A) \leqslant u(e)$. De plus, en prenant $f = e$, on a $e \in E \setminus \{0\}$ et $\dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} = u(e)$ donc $u(e) \in A$ ce qui montre que cette borne supérieure est un maximum (atteint en e) et que $\underset{\substack{f \in E \\ f \neq 0}}{\text{Sup}} \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} = u(e)$.

49 **a.** p_2 est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- si $p_2(A) = 0$, on a $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = 0$ ce qui montre, comme une somme de quantités positives ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls, que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = 0$ donc que $A = 0$ (séparation).
- si $\lambda \in \mathbb{R}$, $p_2(\lambda A) = \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\lambda a_{i,j})^2} = \sqrt{\lambda^2} \times \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2} = |\lambda| p_2(A)$ (homogénéité).
- $p_2(A+B)^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} + b_{i,j})^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}b_{i,j} + \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{i,j}^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$, on a $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}b_{i,j} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2}\sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{i,j}^2}$ donc on obtient $p_2(A+B)^2 \leqslant p_2(A)^2 + 2p_2(A)p_2(B) + p_2(B)^2$ ce qui, en passant à la racine, donne bien la majoration $p_2(A+B) \leqslant p_2(A) + p_2(B)$ (inégalité triangulaire).

Par conséquent, p_2 est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. La norme p_2 définie par l'énoncé est, d'après le cours, la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $(\,.\,|\,.\,) : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \to \mathbb{R}$ défini par $(A|B) = \text{Tr}\,(A^T B) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$.

c. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X^T = (x_1\ \cdots\ x_n)$, en notant $L_i(M)$ la ligne i de la matrice M vu comme un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $(MX)^T = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} m_{1,j}x_j\ \cdots\ \sum\limits_{j=1}^{n} m_{n,j}x_j \right) = \big((L_1(M)|X)\ \cdots\ (L_n(M)|X) \big)$. Ainsi, $||MX||_2^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (L_i(M)|X)^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $(L_i(M)|X)^2 \leqslant ||L_i(M)||_2^2 ||X||_2^2$ donc $||MX||_2^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} ||L_i(M)||_2^2 \right) ||X||_2^2 = p_2(M)^2 ||X||_2^2$. En passant à la racine, on a bien $||MX||_2 \leqslant p_2(M)||X||_2$.

c. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $||MX||_2^2 = (MX|MX) = X^T M^T MX$. La matrice $M^T M$ est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable par le théorème spectral. De plus, si λ est une valeur propre de M^TM, il existe $X \neq 0$ tel que $M^TMX = \lambda X$ ce qui donne $X^TM^TMX = \lambda X^TX$ ou encore $||MX||_2^2 = \lambda||X||_2^2$ donc $\lambda \geqslant 0$ car $||X||_2^2 > 0$ puisque $X \neq 0$. On dit que M^TM est symétrique positive. Il existe donc $P \in O(n)$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec des termes positifs sur la diagonale (les valeurs propres de M^TM), plus précisément $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ telles que $M^TM = PDP^T$.

Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||MX||_2^2 = X^TM^TMX = X^TPDP^TX = Y^TDY$ en posant $Y = P^TX$. Si on note $Y^T = (y_1 \ \cdots \ y_n)$, on calcule $Y^TDY = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant \lambda_n \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 = \lambda_n||Y||_2^2$. Or $||Y||_2^2 = Y^TY = X^TPP^TX = X^TX = ||X||_2^2$ car $PP^T = I_n$. Ainsi, $||MX||_2^2 \leqslant \lambda_n||X||_2^2$ d'où, en passant à la racine, $||MX||_2 \leqslant \sqrt{\lambda_n}||X||_2$ donc $\dfrac{||MX||_2}{||X||_2} \leqslant \sqrt{\lambda_n}$. Si on prend un vecteur unitaire X_n de M^TM associé à la valeur propre λ_n, on a $\dfrac{||MX_n||_2^2}{||X_n||_2^2} = X_n^TM^TMX_n = \lambda_nX_n^TX_n = \lambda_n$ donc $\dfrac{||MX_n||_2}{||X_n||_2} = \sqrt{\lambda_n}$. Par conséquent, $\sqrt{\lambda_n}$ majore $\left\{\dfrac{||MX||_2}{||X||_2} \;\middle|\; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X \neq 0\right\}$ et fait partie de cet ensemble, ceci prouve que $\underset{\substack{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ X\neq 0}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{||MX||_2}{||X||_2} = \underset{\substack{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ X\neq 0}}{\mathrm{Max}} \dfrac{||MX||_2}{||X||_2} = \sqrt{\lambda_n}$.

50 **a.** Supposons que f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, alors, pour tout réel x tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha = \dfrac{\varepsilon}{k+1}$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0| \leqslant \dfrac{\varepsilon k}{k+1} \leqslant \varepsilon$. Ceci prouve que f est continue en x_0 et, comme ceci est valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $f : x \mapsto |x|$. La fonction f n'est pas dérivable en 0. Pourtant, f est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En effet, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$, traitons quatre cas :

- si $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $|f(x) - f(y)| = |x - y| \leqslant 1.|x - y|$.
- si $x \leqslant y \leqslant 0$, on a $|f(x) - f(y)| = |(-x) - (-y)| = |y - x| = |x - y| \leqslant 1.|x - y|$.
- si $x \leqslant 0 \leqslant y \leqslant |x|$, on a $|f(x) - f(y)| = |(-x) - y| = |x + y| = -x - y \leqslant 1.|x - y| = y - x$ car $-y \leqslant y$.
- si $x \leqslant 0 \leqslant |x| \leqslant y$, on a $|f(x) - f(y)| = |(-x) - y| = |x + y| = x + y \leqslant 1.|x - y| = y - x$ car $x \leqslant -x$.

Le fait que f soit lipschitzienne n'implique donc pas que f soit dérivable.

51 **a.** Si $a = 0$, puisque $bt \geqslant 0$ pour tout réel t, on doit clairement avoir $b = 0$.

Si $a \neq 0$, $f : t \mapsto at^2 + bt$ est polynomiale de degré 2 et son discriminant $\Delta = b^2$ doit être négatif car sinon f s'annulerait deux fois et changerait de signe au passage des racines. Ainsi, $0 \leqslant b^2 \leqslant 0$ donc $b = 0$.

b. <u>Méthode 1</u> : pour se servir de la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $f : t \mapsto < B(x_0+tx), x_0+tx >$. Par bilinéarité du produit scalaire, $f(t) =< Bx_0, x_0 > +(< Bx_0, x > + < Bx, x_0 >)t+ < Bx, x > t^2$. Or la matrice B est symétrique donc $< Bx_0, x >= x_0^TB^Tx == x_0^TBx =< x_0, Bx >=< Bx, x_0 >$. Ainsi, par hypothèse, $\forall t \in \mathbb{R}$, $2 < Bx_0, x > t+ < Bx, x > t^2 \geqslant 0$. La question précédente montre alors que $< Bx_0, x >= 0$. Ceci étant vrai pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a $Bx_0 \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ donc $Bx_0 = 0$.

<u>Méthode 2</u> : d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $B = PDP^T$. Comme B est positive par hypothèse, on peut écrire $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ positives de B. Alors $< Bx_0, x_0 >= x_0^TBx_0 = x_0^TPDP^Tx_0 = y_0^TDy_0$ en posant $y_0 = P^Tx_0$. Si on pose $y_0 = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et , on a $< Bx_0, x_0 >= \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = 0$ donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_i y_i^2 = 0$ donc $\lambda_i y_i = 0$ ce qui montre

que $Dy_0 = 0$ d'où $Bx_0 = PDP^TPy_0 = PDy_0 = 0$ car $P^TP = I_n$.

c. En notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j$ donc F est polynomiale en les coordonnées de x ce qui prouve que F est continue. On pouvait aussi écrire $F = G \circ H$ où $H : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^2$ et $G : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$ sont définies par $H(x) = (Ax, x)$ et $G(x, y) =< x, y >$ puis, comme G et H sont continues car respectivement bilinéaire et linéaire en dimension finie, F est continue par composition. La sphère unité S est clairement bornée. De plus, en notant $N : x \mapsto ||x||$ la fonction norme qui est continue car 1-lipschitzienne d'après le cours, on a $S = N^{-1}(\{1\})$ et $\{1\}$ est fermé donc S est aussi fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue. F étant continue sur un fermé borné en dimension finie, on sait d'après le théorème des bornes atteintes que F est bornée sur S et y atteint ses bornes, d'où l'existence de $\underset{x\in S}{\mathrm{Inf}}\, F(x) = \underset{x\in S}{\mathrm{Min}}\, F(x) = \lambda_1 = F(e_1)$ avec $e_1 \in S$ d'après l'énoncé.

d. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, si $x = 0$, alors $< (A - \lambda_1 I_n)x, x >= 0 \geqslant 0$. Si $x \neq 0$, on pose $y = \dfrac{x}{||x||} \in S$ donc $F(y) \geqslant \lambda_1$ d'après la question précédente, ce qui s'écrit $< Ay, y >= \dfrac{1}{||x||^2} < Ax, x >\geqslant \lambda_1$ par bilinéarité du produit scalaire et on a donc $< Ax, x >\geqslant \lambda_1 < x, x >$ ou encore $< (A - \lambda_1 I_n)x, x >\geqslant 0$.

e. Comme $A - \lambda_1 I_n$ est symétrique, que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $< (A - \lambda_1 I_n)x, x >\geqslant 0$ et que, d'après ce qui précède, on a aussi $< (A - \lambda_1 I_n)e_1, e_1 >= F(e_1) - \lambda_1 = 0$, on a $(A - \lambda_1 I_n)e_1 = 0$ d'après la question **b.**. Ainsi, λ_1 est une valeur propre de A et e_1 un vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre λ_1.

Soit λ une valeur propre de A et $e \in S$ un vecteur propre de A associé à λ_1, alors on a $Ae = \lambda e$ donc $F(e) =< \lambda e, e >= \lambda||e||^2 = \lambda \geqslant \lambda_1$ par construction de λ_1. Ainsi, λ_1 est la plus petite valeur propre de A.

52

53 **a.** Si $n = 1$, $M \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc M est diagonalisable.

Si $n \geqslant 2$, M n'est pas forcément diagonalisable. En effet, si $M_k = \mathrm{diag}\Big(\dfrac{1}{k+1}, \cdots, \dfrac{1}{k+n}\Big) + E_{1,2}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, alors M_k est triangulaire supérieure avec des termes tous différents sur la diagonale donc $\chi_{M_k} = \prod\limits_{i=1}^{n} \Big(X - \dfrac{1}{k+i}\Big)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc M_k est diagonalisable. Clairement, en regardant case par case, $\lim\limits_{k\to+\infty} M_k = E_{1,2}$ et $\chi_{E_{1,2}} = X^n$ alors que $\dim \mathrm{Ker}(E_{1,2}) = n - 1$ avec la formule du rang car rang $(E_{1,2}) = 1$. Ainsi, M n'est pas diagonalisable même en étant limite d'une suite de matrices toutes diagonalisables.

b. ($\Longrightarrow$) Supposons P unitaire et scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors $P = \prod\limits_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k}$ avec $r \geqslant 1$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les racines réelles distinctes de P et $m_1, \cdots, m_r$ les ordres de multiplicité associés. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = \prod\limits_{k=1}^{r} (z-\alpha_k)^{m_k}$ donc $|P(z)|^2 = \prod\limits_{k=1}^{r} |z - \alpha_k|^{2m_k}$. Or, pour $k \in [\![1; r]\!]$, $|z - \alpha_k|^2 = (\mathrm{Re}\,(z) - \alpha_k)^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2 \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^2$ et on a donc $|P(z)|^2 \geqslant \prod\limits_{k=1}^{r} |\mathrm{Im}\,(z)|^{2m_k}$. Comme $\deg(P) = n = \sum\limits_{k=1}^{r} m_k$, on a $|P(z)|^2 \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^{2n}$ ce qui donne bien $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^n$ en passant à la racine.

($\Longleftarrow$) On sait d'après le théorème de d'Alembert-Gauss que P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Soit λ une racine de P, comme $|P(z)| = 0 \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^n$, on a $|\mathrm{im}(z)| = 0$ donc z est réelle. Ainsi, P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ car toutes les racines de P sont réelles.

c. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers M, donc $(zI_n - M_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers $zI_n - M$. Comme la fonction $\det$ est polynomiale donc continue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie, par caractérisation séquentielle de la continuité, $\big(\det(zI_n - M_k)\big)_{k\geqslant 0}$ converge vers $\det(zI_n - M)$. Ainsi, $(\chi_{M_k}(z))_{k\geqslant 0}$ converge vers $\chi_M(z)$. Comme toutes les matrices M_k sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les polynômes χ_{M_k} sont scindés sur $\mathbb{R}$, ce qui montre avec la question **b.** que $\chi_{M_k}(z)| \geqslant |\text{Im}\,(z)|$. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient donc $|\chi_M(z)| \geqslant |\text{Im}\,(z)|$, ce qui montre avec l'autre sens de la question précédente que χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par théorème, M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

54

55

56 **a.** Pour $f \in E$, la fonction $g : t \mapsto tf(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc $\int_0^x tf(t)dt$ est bien défini pour tout $x \in [0;1]$. Ceci justifie que φ est bien définie. De plus, $\phi(f)$ étant la primitive de g qui s'annule en 0, $\phi(f)$ est de classe C^1 donc a fortiori continue : ϕ va donc bien de E dans E. La linéarité de ϕ découle très naturellement de la linéarité de l'intégrale. Par conséquent, ϕ définit un endomorphisme de E.

b. Pour une fonction $f \in E$ et un réel $x \in [0;1]$, par inégalité triangulaire sur les intégrales, on obtient la majoration $|\phi(f)(x)| = \Big|\int_0^x tf(t)dt\Big| \leqslant \int_0^x t|f(t)|dt \leqslant \int_0^x t||f||_\infty dt = ||f||_\infty \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^x = \frac{||f||_\infty x^2}{2}$. Ainsi, il vient $||\phi(f)||_1 = \int_0^1 |\phi(f)(x)|dx \leqslant \int_0^1 \frac{||f||_\infty x^2}{2}dx = ||f||_\infty \Big[\frac{x^3}{6}\Big]_0^1 = \frac{||f||_\infty}{6}$. Si on prend $f = 1$, alors $\phi(f) : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ donc $||\phi(f)||_1 = \frac{1}{6}$ alors que $||f||_\infty = 1$. Ceci justifie que $K_1 = \frac{1}{6}$ est le plus petit réel tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_1||f||_\infty$. En effet, s'il existait $k < \frac{1}{6}$ tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant k||f||_\infty$, en prenant $f = 1$, on aurait $||f||_\infty = 1$, $\phi(f) : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ donc $||\phi(f)||_1 = \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6} \leqslant k$ ce qui est contradictoire.

c. Pour une fonction $f \in E$ et un réel $x \in [0;1]$, posons la fonction $F : x \mapsto \int_0^x t|f(t)|dt$ de sorte que l'on a $||\phi(f)||_1 = \int_0^1 |\phi(f)(x)|dx \leqslant \int_0^1 \Big(\int_0^x t|f(t)|dt\Big)dx = \int_0^1 F(x)dx$ par inégalité triangulaire sur les intégrales. Ainsi, comme F est de classe C^1 sur $[0;1]$ d'après le théorème fondamental de l'intégration car $t \mapsto t|f(t)|$ est continue sur $[0;1]$, en posant $u = F$ et $v' : x \mapsto x - 1$, par intégration par parties, on obtient la relation $\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 v'(x)u(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx = \int_0^1 x(1-x)|f(x)|dx$ car $u(0) = v(1) = 0$. Alors, comme $\forall x \in [0;1],\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, on a $||\phi(f)||_1 \leqslant \int_0^1 \frac{|f(x)|}{4}dx = \frac{||f||_1}{4}$. On ne va pas pouvoir trouver de fonction non nulle f telle que $||\phi(f)||_1 = \frac{||f||_1}{4}$ mais on peut essayer les suites de fonctions. Il faut que l'intégrale se condense autour de $\frac{1}{2}$, là où $x(1-x)$ est maximal. On peut donc prendre, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto (x(1-x))^n = x^n(1-x)^n$. Posons $I_n = ||f_n||_1$ et, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $J(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx > 0$. Par le changement de variables $x = 1 - t$ on trouve facilement $J(p,q) = J(q,p)$ et par intégration par parties, en posant $u : x \mapsto (1-x)^{q+1}$ et $v : x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$, on obtient $J(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1}J(p+1, q)$. Ainsi, comme $J(p,0) = \Big[\frac{t^{p+1}}{p+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{p+1}$, on a par télescopage

$J(p,q) = \Big(\prod_{k=0}^{q} \dfrac{J(p+k,q-k)}{J(p+k+1,q-k-1)}\Big) \times J(p+q,0) = \Big(\prod_{k=0}^{q-1} \dfrac{q-k}{p+k+1}\Big) \times \dfrac{1}{p+q+1} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Ainsi, $I_n = J(n,n) = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant k||f||_1$, en prenant $f = f_n \neq 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{||\phi(f_n)||_1}{||f_n||_1} = \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)} \leqslant k$ ce qui donne, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, $k \geqslant \dfrac{1}{4}$. Comme on a vu que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant \dfrac{||f||_1}{4}$, ceci justifie que $K_2 = \dfrac{1}{4}$ est le plus petit réel tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_2||f||_1$.

57

58 **a.** Soit $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = f(x) - x$. Comme f est continue sur $[0;1]$, φ est aussi continue sur $[0;1]$. Or $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$ car $f(0) \in [0;1]$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car $f(1) \in [0;1]$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, comme $\varphi(0)\varphi(1) \leqslant 0$ et que φ est continue sur $[0;1]$, il existe un réel $\alpha \in [0;1]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$, ce qui justifie que $\alpha \in A$ donc $A \neq \emptyset$.

A est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par 1 et minorée par 0. La propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ montre que A admet une borne supérieure $M \leqslant 1$ et une borne inférieure $m \geqslant 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = u_n \quad (R)$ et, en passant à la limite dans cette relation (R) et par caractérisation séquentielle de la continuité de f, on a $f(M) = M$. Ainsi, $M \in A$ et M majore A assure que M est le maximum de A. De même, m est le minimum de A.

b. Posons $h = f - g$, de sorte que h est continue sur $[0;1]$ par opérations. Comme $f\circ g = g\circ f$, en l'appliquant en M, on a $f(g(M)) = g(f(M)) = g(M)$ donc $g(M) \in A$ ce qui montre que $g(M) \leqslant M = Max(A)$. Ainsi, $h(M) = f(M) - g(M) = M - g(M) \geqslant 0$. De même, $f(g(m)) = g(f(m)) = g(m)$ donc $g(m) \in A$ ce qui montre que $g(m) \geqslant m = Min(A)$. Ainsi, $h(m) = f(m) - g(m) = m - g(m) \leqslant 0$. À nouveau, par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque h est continue sur $\widetilde{[m;M]}$ et $h(m)h(M) \leqslant 0$, il existe un réel $c \in \widetilde{[m;M]} \subset [0;1]$ tel que $h(c) = 0$, ce qui revient à $f(c) = g(c)$.

59

ORAUX 2023 THÈME 5
RÉDUCTION

60 **a.** Pour $m \in \mathbb{R}$, on a $\chi_{A_m} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ -1 & X-1 & 1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 2-X \\ -1 & X-1 & 2(2-X) \\ m-2 & 2-m & X-2 \end{vmatrix}$ après avoir effectué $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 - 2C_2$ et $\chi_{A_m} = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & -2 \\ m-2 & 2-m & 1 \end{vmatrix}$ en factorisant par $X-2$ dans la troisième colonne. On développe et $\chi_{A_m} = (X-2)\big((X-1)(X-1+4-2m)+(m-2)(X-2)\big) = (X-2)(X^2-mX+1)$.

b. Traitons les deux valeurs $m = 1$ et $m = 2$:

Si $m = 1$, $\chi_{A_1} = (X-2)(X^2-X+1) = (X-2)(X+j)(X+j^2)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ mais n'est même pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mais même pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $m = 2$, $\chi_{A_2} = (X-2)(X^2-2X+1) = (X-2)(X-1)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_2 est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(A_2) = \{1,2\}$. Comme $A_2 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $\dim(E_1(A_2)) = 1$ par la formule du rang donc A_2 n'est pas diagonalisable.

c. Le discriminant Δ_m de X^2-mX+1 vaut $\Delta_m = m^2-4$. Si $\Delta_m > 0$, on pose $\alpha_m = \dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}$ et $\beta_m = \dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ de sorte que $\alpha_m < \beta_m$. Si $\alpha_m = 2$ ou $\beta_m = 2$ implique que $(m-4)^2 = m^2-4$ en passant $m-4 = \pm\sqrt{m^2-4}$ donc que $m = \dfrac{5}{2}$. Avec les signes, α_m ne vaut jamais 2 mais $\beta_m = 2$ si et seulement si $m = \dfrac{5}{2}$. On traite plusieurs cas :

Si $m \in]-2;2[$, $\Delta_m < 0$ donc χ_{A_m} est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ mais n'est même pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_m est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mais même pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $m = 2$, on a déjà en vu en **b.** que A_2 est trigonalisable mais pas diagonalisable.

Si $m = -2$, $\chi_{A_m} = (X-2)(X^2+2X+1) = (X-2)(X+1)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_{-2} est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(A_{-2}) = \{-1,2\}$. Comme $A_{-2}+I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $\dim(E_{-1}(A_{-2})) = 1$ par la formule du rang donc A_{-2} n'est pas diagonalisable.

Si $m = 5/2$, $\chi_{A_{5/2}} = (X-2)^2\left(X-\dfrac{1}{2}\right)$ donc $\mathrm{Sp}(A_{5/2}) = \{2, 5/2\}$, $\chi_{A_{5/2}}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc $A_{5/2}$ est trigonalisable. Comme $A_{5/2} - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $\dim(E_2(A_{5/2})) = 1$ par la formule du rang donc $A_{5/2}$ n'est pas diagonalisable.

Si $m \notin [-2;2] \cup \{5/2\}$, $\Delta_m > 0$ donc χ_{A_m} est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et ses racines sont $2, \alpha_m$ et β_m qui sont distinctes. Ainsi, A_m est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

61 **a.** Si $\deg(P) = 1$, $P = a(X-\lambda)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a $P(A) = 0$ si on pose la matrice $A = \lambda I_n$. Dans ce cas, on a existence mais aussi unicité de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$ car $a(A - \lambda I_n) = 0$ si et seulement si $A = \lambda I_n$ puisque $a \neq 0$.

Si $\deg(P) = 2$, $P = a(X^2 + bX + c)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\Delta = b^2 - 4c$. Traitons trois cas :

$\Delta > 0$, $P = a(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On peut prendre $A = \lambda_1 I_n$ ou $A = \lambda_2 I_n$ car, pour ces matrices, on a bien $P(A) = a(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) = 0$.

$\Delta = 0$, $P = a(X - \lambda)^2$ avec $\lambda = -\dfrac{b}{2} \in \mathbb{R}$ et $A = \lambda I_n$ convient encore.

$\Delta < 0$, $P = a(X - re^{i\theta})(X - re^{-i\theta}) = a(X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2)$ avec $r > 0$ et $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$ (les deux racines de P sont complexes non réelles conjuguées). On se souvient que la matrice de rotation R_θ de $SO_2(\mathbb{R})$ a pour polynôme caractéristique $\chi_{R_\theta} = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. On prend, pour $p = 1$ et $n = 2$, la matrice $A_2 = rR_\theta = r\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et on calcule facilement $\chi_{A_2} = X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2$ donc, avec Cayley-Hamilton, on a $A_2^2 - 2r\cos(\theta)A_2 + r^2 I_2 = 0$ donc $P(A_2) = 0$. Il suffit alors de prendre A diagonale par blocs (p blocs) en posant $A = \mathrm{diag}(A_2, \cdots, A_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $P(A) = \mathrm{diag}(P(A_2), \cdots, P(A_2)) = 0$.

Si $\deg(P) \geqslant 3$, traitons à nouveau deux cas :

- si P admet au moins une racine réelle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$ et $P(\lambda I_n) = P(\lambda)I_n = 0$ donc la matrice $A = \lambda I_n$ convient et vérifie $P(A) = 0$.
- si P n'admet pas de racine réelle, on sait d'après d'Alembert-Gauss que P s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles de degré 2, il existe donc une décomposition $P = (X^2 + bX + c)Q$ avec $\Delta = b^2 - 4c < 0$. D'après le cas ci-dessus, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + bA + cI_n = 0$ donc $P(A) = (A^2 + bA + cI_n)Q(A) = 0$ et A convient.

Dans tous les cas, si n est pair, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

b. Si $\deg(P) = 1$, $P = a(X - \lambda)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a $P(A) = 0$ si on pose la matrice $A = \lambda I_n$.

Si $\deg(P) = 2$, $P = a(X^2 + bX + c)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\Delta = b^2 - 4c$. Traitons trois cas :

$\Delta \geqslant 0$, P admet une racine réelle λ (elle peut être double) et, si $A = \lambda I_n$, on a encore $P(A) = 0$.

$\Delta < 0$, $P = a(X - re^{i\theta})(X - re^{-i\theta}) = a(X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2)$ avec $r > 0$ et $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$. Comme P n'a pas de racine réelle, il n'y a pas, en identifiant les matrices 1×1 aux scalaires, de matrice $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$. Supposons, pour n impair quelconque, qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$, alors $A^2 - 2r\cos(\theta)A + r^2 I_2 = 0$ donc $(A - r\cos(\theta)I_n)^2 + r^2\sin^2(\theta)I_n = 0$ car on a $X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2 = (X - r\cos(\theta))^2 + r^2\sin^2(\theta)$. Par conséquent, en passant au déterminant, $\det(A - r\cos(\theta)I_n)^2 = \det\big((A - r\cos(\theta)I_n)^2\big) = \det(-r^2\sin^2(\theta)I_n) = -(r^{2n}\sin^{2n}(\theta)) < 0$. Comme $\det(A - r\cos(\theta)I_n)^2 \geqslant 0$, ceci fournit une contradiction et il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

Si $\deg(P) \geqslant 3$, traitons à nouveau deux cas :

- si P admet au moins une racine réelle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$ et $P(\lambda I_n) = P(\lambda)I_n = 0$ donc la matrice $A = \lambda I_n$ convient et vérifie $P(A) = 0$.

• si P n'admet pas de racine réelle, si on suppose qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A)$, d'après le cours, les valeurs propres de A sont incluses dans les racines de P, ce qui justifie que A n'a pas de valeur propre réelle. Or le polynôme χ_A est de degré n impair donc, comme il est unitaire, on a $\lim\limits_{t \to -\infty} \chi_A(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \chi_A(t) = +\infty$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque χ_A est continue, il existe une racine réelle de χ_A, qui est donc une valeur propre de A, c'est absurde.

On en déduit que, si n est impair et si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a deux cas :

• si P admet une racine réelle, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

• si P n'admet pas de racine réelle, il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

62

63 Comme le polynôme $X^n - 1$ annule A par hypothèse et que $X^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (ses racines sont les n racines n-ièmes de l'unité), la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ où z_1, z_2 sont des racines n-ièmes de l'unité car toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A, notamment $X^n - 1$. Par conséquent, $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(D) = z_1 + z_2$ et $\det(A) = \det(D) = z_1 z_2$. Ainsi, $|\mathrm{Tr}\,(A)| \leqslant |z_1| + |z_2| \leqslant 1 + 1 = 2$ donc $\mathrm{Tr}\,(A) \in [\![-2; 2]\!]$ et $|\det(A)| = |z_1||z_2| = 1$ donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$. De plus, puisque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Tr}\,(A) = a + d \in \mathbb{Z}$ et $\det(A) = ad - bc \in \mathbb{Z}$ et on sait d'après le cours que $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A) \in \mathbb{Z}[X]$. Les valeurs possibles de $\mathrm{Tr}\,(A)$ et $\det(A)$ montrent que $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A)$ ne peut être que l'un des 10 polynômes suivants : $X^2 - 2X + 1$, $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$, $X^2 + 2X + 1$ ou $X^2 - 2X - 1$, $X^2 - X - 1$, $X^2 - 1$, $X^2 + X - 1$, $X^2 + 2X - 1$.

Éliminons quelques cas ! En effet, si $\det(A) = -1$, $z_1 z_2 = -1$ donc z_1 et z_2 ne peuvent pas être conjugués sinon $z_1 z_2 = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$. Par conséquent, z_1 et z_2 sont des racines réelles de $X^n - 1$ donc ne peuvent être que ± 1. Pour avoir $z_1 z_2 = -1$, forcément $z_1 = 1 = -z_2$ ou $z_1 = -1 = -z_2$ d'où $\mathrm{Tr}\,(A) = 1 - 1 = 0$. Ainsi, χ_A est l'un des 6 polynômes $X^2 - 2X + 1$, $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$, $X^2 + 2X + 1$, $X^2 - 1$.

<u>Cas 1 : $\chi_A = X^2 - 2X + 1$</u> : comme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$ donc, comme A est diagonalisable, A est donc semblable à la matrice I_2, c'est-à-dire $A = PI_2P^{-1} = I_2$ donc $A^{12} = I_2$.

<u>Cas 2 : $\chi_A = X^2 - X + 1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2 - X + 1 = (X + j)(X + j^2)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-j, -j^2\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^6 = I_2$ car $(-j, -j^2) \in \mathbb{U}_6^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Cas 3 : $\chi_A = X^2 + 1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-i, i\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ donc $A^4 = I_2$ car $(-i, i) \in \mathbb{U}_4^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Cas 4 : $\chi_A = X^2 + X + 1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{j, j^2\}$, on a $A = P\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^3 = I_2$ car $(j, j^2) \in \mathbb{U}_3^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Cas 5 : $\chi_A = X^2 + 2X + 1$</u> : comme $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1\}$ donc, comme A est diagonalisable, $A = P(-I_2)P^{-1} = -I_2$ donc $A^2 = I_2$ puis $A^{12} = I_2$.

<u>Cas 6 : $\chi_A = X^2 - 1$</u> : comme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ donc, comme A est diagonalisable,

$A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^2 = I_2$ car $(-1,1) \in \mathbb{U}_2^2$. Ainsi, $A^{12} = I_2$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Fondamentalement, c'est parce les racines de ces 6 polynômes sont $1, -1, i, -i, j, j^2, -j, -j^2$, c'est-à-dire des racines seconde, troisième, quatrième, sixième de l'unité et que ppcm $(2,3,4,6) = 12$, donc toutes ces valeurs $z \in \{1, -1, i, -i, j, j^2, -j, -j^2\}$ vérifient $z^{12} = 1$.

Réciproquement, soit une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que χ_A est l'un des polynômes X^2-X+1, X^2+1, X^2+X+1, X^2-1, alors comme $X^{12}-1 = (X^2-X+1)(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2-1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$, d'après CAYLEY-HAMILTON, on a $\chi_A(A) = 0$ donc, comme χ_A divise $X^{12}-1$, on a aussi $A^{12} = I_2$.

Par contre, si $\chi_A = (X+1)^2$ ou $\chi_A = (X-1)^2$, on ne peut pas être sûr que $A^{12} = I_2$ car A pourrait ne pas être diagonalisable, comme dans les cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

64 **a.** Si $\alpha = 1$, on a $f^2 + 2f + \mathrm{id}_E = (f + \mathrm{id}_E)^2 = 0$ donc le polynôme $(X+1)^2$ est annulateur de f. Soit A la matrice de f dans n'importe quelle base de E, on a aussi $(X+1)^2$ annulateur de A et on sait qu'alors la seule valeur propre complexe possible de A est -1, ce qui prouve que $\chi_A = (X+1)^2 = \chi_f$ car χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$. Comme χ_f est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, f est trigonalisable d'après le cours, il existe donc une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ du plan E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Il y a deux cas :

- Si $a = 0$, alors $f = -\mathrm{id}_E$.
- Si $a \neq 0$, en prenant la base $\mathcal{B}' = (av_1, v_2)$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans les deux cas, $\det(f) = 1$ et $\mathrm{Tr}\,(f) = -2$ donc $\chi_f = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$; on pouvait s'en douter.

b. Méthode 1 : toujours en prenant la matrice A de f dans n'importe quelle base, on a $P = X^2 + 2X + \alpha$ annulateur de A mais le discriminant $\Delta = 4 - 4\alpha$ de P vérifie $\Delta < 0$ donc P n'a pas de racine réelle. D'après le cours, les valeurs propres réelles de A sont soit $z = z_1 = -1 + i\sqrt{\alpha - 1}$ soit $z = z_2 = -1 - i\sqrt{\alpha - 1}$. Comme χ_A est réel car A est réelle, z_1 et z_2 étant conjuguées, elles ont la même multiplicité dans χ_A ce qui fait que $\chi_f = \chi_A = (X - z)^m(X - \overline{z})^m = (X^2 + 2X + \alpha)^m$ donc $n = \deg(\chi_f) = 2m$ est pair.

Méthode 2 : $f^2 + 2f + \alpha\mathrm{id}_E = (f + \mathrm{id}_E)^2 + (\alpha - 1)\mathrm{id}_E$ donc $(f + \mathrm{id}_E)^2 = (1-\alpha)\mathrm{id}_E$. En passant au déterminant, on a $\det((f + \mathrm{id}_E)^2) = (\det(f + \mathrm{id}_E))^2 = (1-\alpha)^n$. Or $\det(f + \mathrm{id}_E) \in \mathbb{R}$ donc $(\det(f + \mathrm{id}_E))^2 = (1-\alpha)^n \geqslant 0$ ce qui montre que n est pair car $1 - \alpha < 0$.

c. Soit $e_2 \in E$ un vecteur non nul (il en existe car E est un plan) et $e_1 \in E$ défini par $e_1 = f(e_2) + e_2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0_E$, alors $\lambda(f(e_2) + e_2) + \mu e_2 = \lambda f(e_2) + (\lambda + \mu)e_2 = 0_E$. Or $(e_2, f(e_2))$ est libre car f ne possède aucune valeur propre réelle d'après **b.**, ainsi $\lambda = \lambda + \mu = 0$ donc $\lambda = \mu = 0$ ce qui montre que (e_1, e_2) est une base de E. Comme $f(e_2) = e_1 - e_2$ et $f(e_1) = f(f(e_2) + e_2) = f^2(e_2) + f(e_2) = \alpha e_2$ car $f^2 + f + \alpha\mathrm{id}_E = 0$, par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} = A$.

d. Soit $e_2 \in E$ un vecteur non nul (il en existe car $\dim(E) > 2$) et $e_1 \in E$ défini par $e_1 = f(e_2) + e_2$. Comme ci-dessus, on montre que (e_1, e_2) est une famille libre de E et que $f(e_2) = e_1 - e_2$ et $f(e_1) = \alpha e_2$. Comme $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) \neq E$, il existe un vecteur non nul $e_4 \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Soit $e_3 \in E$ défini par $e_3 = f(e_4) + e_4$. À nouveau, on montre que (e_3, e_4) est une famille libre de E et que $f(e_4) = e_3 - e_4$ et $f(e_3) = \alpha e_4$. Si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0$ (1), on applique f à (1) pour avoir $\alpha\lambda_1 e_2 + \lambda_2(e_1 - e_2) + \alpha\lambda_3 e_4 + \lambda_4(e_3 - e_4) = 0$ (2).

En effectuant $\lambda_4(1)-\lambda_3(2)$, on a $\lambda_4(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4)-\lambda_3(\alpha\lambda_1e_2+\lambda_2(e_1-e_2)+\alpha\lambda_3e_4+\lambda_4(e_3-e_4))=0$ donc $(\lambda_1\lambda_4-\lambda_2\lambda_3)e_1+(\lambda_2\lambda_4-\alpha\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)e_2+(\lambda_3^2+\lambda_4^2)e_4=0$. Mais, par construction, (e_1,e_2,e_4) est libre donc $\lambda_3^2+\lambda_4^2=0$ ce qui, montre, comme λ_3,λ_4 sont réels, que $\lambda_3=\lambda_4=0$. Il ne reste que $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2=0$ donc $\lambda_1=\lambda_2=0$ car (e_1,e_2) est libre. Ainsi, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ et (e_1,e_2,e_3,e_4) est libre.

Si $n=4$, on a trouvé une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}A&0\\0&A\end{pmatrix}$.

Si $n>4$, on continue en prenant $e_6\in E\setminus\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)$, on pose $e_5=f(e_6)+e_6$ et on a $f(e_6)=e5-e_6$, $f(e_5)=\alpha e_6$ et $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6)$ libre. Par récurrence, en notant $n=2p$, on construit une famille libre $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_{2n})$ telle que $\forall k\in[\![1;n]\!],\ f(e_{2k-1})=\alpha e_{2k},\ f(e_{2k})=e_{2k-1}-e_{2k}$. Comme $\dim(E)=n=2p$, $\mathcal{B}$ est une base de E et on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\mathrm{diag}(A,\cdots,A)$ avec p fois le bloc sur la diagonale.

65

66

67

68 **a.** Pour f dans E, comme f est continue sur I, par le théorème fondamental de l'intégration, $A(f)$ est la primitive de la fonction f qui s'annule en 0 et $B(f)$ est l'opposé de la primitive de f qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $A(f)$ et $B(f)$ sont de classe C^1 sur I donc a fortiori elles y sont continues ce qui montre que A et B sont bien définies et à valeurs dans E. De plus, la linéarité de A et de B provient de la linéarité de l'intégrale ; A et B sont bien des endomorphismes de E. On peut même dire que A et B ne sont pas surjectives car, par exemple, $\text{Im}(A)\subset C^1(I,\mathbb{R})$ et que l'inclusion $C^1(I,\mathbb{R})\subset C^0(I,\mathbb{R})$ est stricte. Par contre, A et B sont injectives car, par exemple, si $B(f)=0$, en dérivant, on obtient $-f=0$ donc $\mathrm{Ker}(B)=\{0\}$.

b. Pour $(f,g)\in E^2$, comme $A(f)$ et $B(g)$ sont de classe C^1 sur I d'après **a.**, par intégration par parties, on a $<A(f),g>=\int_0^{\pi/2}A(f)g=-\int_0^{\pi/2}A(f)B(g)'=-[A(f)B(g)]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}A(f)'B(g)=\int_0^{\pi/2}fB(g)$ car $A(f)(0)=B(g)(\pi/2)=0$ et on conclut bien que $<A(f),g>=<f,B(g)>$.

c. Soit λ une valeur propre de $B\circ A$, il existe donc une fonction non nulle $f\in E$ telle que $B\circ A(f)=\lambda f$. Or, d'après la question précédente, $<f,B\circ A(f)>=<f,B(A(f))>=<A(f),A(f)>=||A(f)||^2\geqslant 0$ alors que $<f,B\circ A(f)>=<f,\lambda f>=\lambda||f||^2$ avec $||f||>0$ donc $\lambda\geqslant 0$. Les valeurs propres de $B\circ A$ sont bien positives.

d. Par CAUCHY-SCHWARZ, $\left|\int_0^x f(t)dt\right|^2=\left|\int_0^x 1.f(t)dt\right|^2\leqslant\int_0^x 1^2dt\times\int_0^x f(t)^2dt=x\int_0^x f(t)^2dt$.

e. Pour $f\in E$, on a $||A(f)||^2=\int_0^{\pi/2}A(f)(x)^2dx\leqslant\int_0^{\pi/2}x\Big(\int_0^x f(t)^2dt\Big)dx\leqslant\int_0^{\pi/2}x\Big(\int_0^{\pi/2}f(t)^2dt\Big)dx$ donc $||A(f)||^2\leqslant||f||^2\int_0^{\pi/2}xdx=\frac{\pi^2}{8}||f||^2$ et, en passant à la racine, $||A(f)||\leqslant K||f||$ avec $K=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

f. Soit λ une valeur propre de $B\circ A$, on sait d'après la question **c.** que $\lambda\geqslant 0$. Comme $B\circ A$ est injective d'après **a.**, 0 n'est pas une valeur propre de $B\circ A$ donc $\lambda>0$. Soit $f\in E$ une fonction non nulle telle que $B\circ A(f)=B(A(f))=\lambda f$, en dérivant, $-A(f)=\lambda f'$ qu'on dérive encore pour avoir $-f=\lambda f''$ qui s'écrit aussi $f''+\frac{f}{\lambda}=0$ (E). On résout classiquement cette équation différentielle linéaire (E) du second ordre à coefficients constants et il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f:x\mapsto\alpha\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)+\beta\sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$. Comme $\lambda f(0)=A(f)(0)=0$ et

$\lambda f(\pi/2) = B(A(f))(\pi/2) = 0$, on a $\beta = 0$ et $\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0$. Comme f n'est pas nulle, on ne peut pas avoir $\alpha = 0$ donc $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ d'où l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = n\pi + \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Réciproquement, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : I \to \mathbb{R}$ définie par $f_n : x \mapsto \cos((2n+1)x)$, on a bien $f_n \in E$: Méthode 1 : on a par calculs $A(f_n)(x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$ (bien nul en 0) et $B(A(f_n))(x) = \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$ (bien nul en $\frac{\pi}{2}$) d'où $B \circ A(f_n) = \frac{1}{(2n+1)^2} f_n$ avec $f_n \neq 0$ donc $\frac{1}{(2n+1)^2}$ est valeur propre de $B \circ A$.

Méthode 2 : en posant $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$, on a clairement $-f_n = \lambda f_n''$. Or on sait que $(B \circ A(f_n))'' = -f_n$ donc $(B \circ A(f_n) - \lambda f_n)'' = 0$. Ceci prouve que la fonction $h = B \circ A(f_n) - \lambda f_n$ est affine donc qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I,\ h(x) = B \circ A(f_n)(x) - \lambda f_n(x) = \alpha x + \beta$. Or les relations $h(\pi/2) = 0$ et $h'(0) = 0$ nous donnent $\alpha = \beta = 0$ et $B \circ A(f_n) = \lambda f_n$ avec, à nouveau, la conclusion que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$ est valeur propre de $B \circ A$.

On conclut donc que $\mathrm{Sp}(B \circ A) = \left\{ \frac{1}{(2n+1)^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

69

70

71

72

73

74 **a.** Comme A est triangulaire supérieure, $\chi_A = X^2(X-1)(X-2)$. Les colonnes $1, 2$ et 4 de A forment une famille libre donc $\mathrm{rang}\,(A) = 3$ et $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$ par la formule du rang ce qui montre d'après le cours que A n'est pas diagonalisable. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Comme $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et que 1 et 2 sont des valeurs propres simples de A, on a $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_1 = (1,0,0,0)$ et $v_2 = (1,1,0,0)$. De même, comme $\mathrm{rang}\,(A) = 3$, on voit que $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1,0,1,0)$. On cherche v_4 tel que $Av_4 = v_3$ (réduction de JORDAN) et on trouve en résolvant ce système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, par exemple, $v_4 = (-1, 0, -1, 1)$. Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme Q est inversible car $\det(Q) = 1$, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et on a, par formule de changement de base, comme $Av_1 = v_1$, $Av_2 = 2v_2$, $Av_3 = 0$ et $Av_4 = v_3$, $A = QTQ^{-1}$.

b. Comme $AM = MA$, on a aussi $A^2M = MA^2$ donc $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_4)$, $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_4)$, $E_0(A) =$

$\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^2)$ sont stables par M, comme $A^2 = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$, on a $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$.

On traduit matriciellement ces stabilités par $M = Q\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}Q^{-1}$. Or $AMv_4 = MAv_4 = Mv_3 = cv_3$ et $AMv_4 = A(dv_3 + ev_4) = ev_3$ donc $c = e$. Ainsi, $M = Q\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}Q^{-1}$. Réciproquement, on vérifie que ces matrices commutent avec A ce qui montre que le commutant de A est de dimension 4, engendré par $QE_{1,1}Q^{-1}$, $QE_{2,2}Q^{-1}$, $Q(E_{3,3} + E_{4,4})Q^{-1}$ et $QE_{3,4}Q^{-1}$.

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme quelconque.

<u>Analyse</u> : on suppose que $M = P(A)$, or comme $A = PTP^{-1}$, on a classiquement $M = QP(T)Q^{-1}$, on calcule

$$P(T) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} \text{ donc } M = Q\begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(0) & P'(0) \\ 0 & 0 & 0 & P(0) \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

<u>Synthèse</u> : soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ définie par $\varphi(P) = (P(1), P(2), P(0), P'(0))$. φ est clairement linéaire et si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $P(1) = P(2) = P(0) = P'(0) = 0$ donc 1 et 2 sont racines au moins simples de P et 0 racine au moins double de P donc $P = X^2(X-1)(X-2)U$ avec $U \in \mathbb{R}[X]$ mais la condition $\deg(P) \leqslant 3$ impose $U = 0$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. φ est donc injective, et comme $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$, φ est un isomorphisme. Ainsi, comme $M = Q\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}Q^{-1}$, on a $M = Q\begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(0) & P'(0) \\ 0 & 0 & 0 & P(0) \end{pmatrix}Q^{-1} = P(A)$ en prenant le polynôme $P = \varphi^{-1}(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_3[X]$.

On en conclut qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ (même plus précisément $P \in \mathbb{R}_3[X]$) tel que $M = P(A)$ si $AM = MA$.

c. Si $M^2 = A$, alors $AM = M^2M = MM^2 = MA$ donc on peut écrire $M = Q\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}Q^{-1}$ d'après

b.. Ainsi, $M^2 = A = QTQ^{-1} \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 2cd \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne $a = \pm 1$, $b = \pm\sqrt{2}$, $c = 0$ et $2cd = 1$ mais ceci est impossible. Par conséquent, il n'existe aucune matrice $M \in \mathcal{M}_4\,\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

75

76

77 • Si $n = 1$ et $A = (a) \neq 0$, $B = (b) \neq 0$, alors $ABAB = (a^2b^2) \neq 0$. Rien à signaler.

• Si $n = 2$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ telles que $ABAB = 0$, alors la matrice AB est nilpotente d'indice inférieur ou égal à 2. Mais on a aussi $(BA)^3 = BABABA = B(ABAB)A = B \times 0 \times A = 0$ donc BA est aussi nilpotente. Comme X^3 est annulateur de BA, on sait d'après le cours que $\mathrm{Sp}(BA) \subset \{0\}$ car 0 est la seule racine de X^3. Mais comme le spectre complexe est non vide d'après D'ALEMBERT-GAUSS, on a donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(BA) = \{0\}$ ce qui montre que $\chi_{BA} = X^2$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a donc $(BA)^2 = 0$ donc $BABA = 0$.

• Si $n = 3$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ telles que $ABAB = 0$, alors AB est nilpotente et, comme avant BA l'est aussi. Mais la même démarche conduit à $(BA)^3 = 0$, on va construire un exemple tel que l'indice de nilpotente de AB soit 2, et celui de BA soit supérieur ou égal à 3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,3}$, alors $N^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $N^3 = 0$ donc N est nilpotente d'indice 3. On cherche A et B non nulles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $BA = N$ alors que $(AB)^2 = 0$. Si on prend $A = N = E_{1,2} + E_{2,3}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,2} = N'$, alors on a comme attendu $BA = N$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$ donc $BABA = E_{1,3} \neq 0$ alors que $ABAB = 0$.

• Si $n \geqslant 4$, on construit par blocs $A = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0_{n-3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} N' & 0 \\ 0 & 0_{n-3} \end{pmatrix}$ et on a comme dans le cas $n = 3$, par des calculs par blocs, $AB = E_{1,2}$, $BABA = E_{1,3} \neq 0$ alors que $ABAB = 0$.

78 **a.** L'application f va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même et sa linéarité provient de celle de la transposition ; on vérifie que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ f(\lambda A + B) = \lambda f(A) + f(B)$. Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. <u>Méthode 1</u> : pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f^2(M) = f(f(M)) = M + M^T + (M + M^T)^T = 2f(M)$ car $(M^T)^T = M$. Par conséquent, $X^2 - 2X = X(X-2)$ est annulateur de f et scindé à racines simples donc f est diagonalisable.

<u>Méthode 2</u> : munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(A|B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, alors $(f(A)|B) = (A + A^T|B) = (A|B) + (A^T|B) = (A|B) + \mathrm{Tr}\,(AB) = (B|A) + \mathrm{Tr}\,(BA)$ par bilinéarité et symétrie du produit scalaire et car on sait qu $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$. Ainsi, on a la relation $(f(A)|B) = (B|A) + (B^T|A) = (f(B)|A) = (A|f(B))$. Ceci prouve que f est autoadjoint donc, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable.

c. Si on a utilisé la méthode 1 ci-dessus, on sait que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 2\}$.

Si M est symétrique, $f(M) = 2M$. De plus, $f(M) = 2M \iff M + M^T = 2M \iff M = M^T \iff M \in S_n(\mathbb{R})$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $E_2(f) = S_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Si M est antisymétrique, $f(M) = 0$. De plus, $f(M) = 0 \iff M + M^T = 0 \iff M = -M^T \iff M \in A_n(\mathbb{R})$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $E_0(f) = A_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Comme $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires (même orthogonaux pour le produit scalaire choisi) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il n'y a pas d'autres valeurs propres de f. Ainsi, on a $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2\}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_0(f) \oplus E_2(f)$, $\mathrm{Tr}\,(f) = n(n+1)$ et $\det(f) = 2$ si $n = 1$ et $\det(f) = 0$ si $n \geqslant 2$.

79

80

81 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on effectue dans $\chi_A(\lambda)$ l'opération de GAUSS $L_1 \longleftarrow L_1 + \lambda L_2 + \lambda^2 L_3 + \cdots + \lambda^{n-1} L_n$ et on développe par rapport à la ligne n, $\chi_A(\lambda) = (-1)^{n+1}\Big(\lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\Big) \times (-1)^{n-1} = \lambda^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$ donc $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ (en fait A est une matrice compagnon).

b. Pour tout complexe λ, le rang de $A - \lambda I_n$ est au moins égal à $n-1$ grâce à la sous-diagonale de 1 échelonnés sur les $n-1$ premières colonnes. Par la formule du rang, la multiplicité géométrique de toute valeur propre λ de A vérifie donc $\mathrm{dim}(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rang}\,(A - \lambda I_n) \leqslant 1$.

($\Longleftarrow$) Si χ_A est scindé à racines simples, d'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

($\Longrightarrow$) Réciproquement, si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en écrivant $\chi_A = \prod\limits_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}(A)}$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A, on sait d'après le cours que $\forall j \in [\![1; r]\!]$, $m_{\lambda_j(A)} = \mathrm{dim}(E_{\lambda_j}(A))$. D'après ce qui précède, on a donc $1 \leqslant m_{\lambda_j(A)} = \mathrm{dim}(E_{\lambda_j}(A)) \leqslant 1$ donc $m_{\lambda_j(A)} = 1$. Toutes les valeurs propres de A sont donc simples, on en déduit que $r = n$ et que χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Par double implication, A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

82

83 ($\Longrightarrow$) Supposons A diagonalisable et traitons deux cas :

• Soit A n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $A = P(\lambda I_2)P^{-1}$ avec P inversible donc $A = \lambda I_2$. Soit Q un polynôme complexe non constant. D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, le polynôme $Q - \lambda$ admet une racine complexe puisqu'il n'est pas constant. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Q(\alpha) = \lambda$. Il suffit de prendre $M = \alpha I_2$ pour avoir $Q(M) = Q(\alpha) I_2 = \lambda I_2 = A$.

• Soit A admet deux valeurs propres complexes $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, il existe une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Soit Q un polynôme complexe non constant, comme ci-dessus il existe des complexes α_1 et α_2 tels que $Q(\alpha_1) = \lambda_1$ et $Q(\alpha_2) = \lambda_2$ (autrement dit $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective). Il suffit de prendre $M = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}P^{-1}$ pour avoir $Q(M) = P\begin{pmatrix} Q(\alpha_1) & 0 \\ 0 & Q(\alpha_2) \end{pmatrix}P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

($\Longleftarrow$) Supposons A non diagonalisable, alors χ_A ne peut pas être scindé à racines simples donc $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$, $\chi_A = (X - \lambda)^2$ et $\mathrm{dim}(E_\lambda(A)) = 1$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, A est trigonalisable donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.

Pour réduire "à la JORDAN" et avoir 1 à la place de μ : si on note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a donc par CAYLEY-HAMILTON $(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})^2 = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})$. Puisque $\mathrm{dim}(E_\lambda(A)) = 1$, par le théorème du rang, on a $\mathrm{dim}(\mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})) = \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})) = 1$ donc $\mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})$. Si on prend $v_1 \in \mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathrm{Vect}(v_1)$, alors il existe donc $v_2 \in \mathbb{C}^2$ tel que $(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})(v_2) = v_1$. Comme $v_2 \notin \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})$, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{C}^2$. Par construction, comme $u(v_1) = \lambda v_1$ et $u(v_2) - \lambda v_2 = v_1$, il vient $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}$, on a par la formule de changement bases : $A = PTP^{-1}$.

Prenons le polynôme non constant $Q = X^2 + \lambda$ et supposons l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $Q(M) = A$. Posons $N = P^{-1}MP$ de sorte que $M = PNP^{-1}$. On a la suite suivante d'équivalences : $Q(M) = M^2 + \lambda I_2 = A \iff P(N^2 + \lambda I_2)P^{-1} = PTP^{-1} \iff N^2 + \lambda I_2 = A \iff N^2 = \mu E_{2,1}$. Comme $E_{2,1}^2 = 0$, on a $N^4 = 0$ donc N est nilpotente. Or, il est classique que $\chi_N = X^2$ (seul 0 est valeur propre de N) donc $N^2 = 0$ par CAYLEY-HAMILTON. Ceci impose donc $E_{2,1} = 0$ qui est absurde. Ainsi, pour ce polynôme $Q = X^2 + \lambda$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a $Q(M) \neq A$. On a donc montré que $(\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$ est faux.

Par double implication : A diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.

84 **a.** Pour $k = 0$, on a bien $AB^0 - B^0A = 0.B^0$ car $B^0 = I_n$. Pour $k = 1$, $AB^1 - B^1A = AB - BA = B = 1.B^1$ par hypothèse. Soit $k \geqslant 1$, supposons que $AB^k - B^kA = kB^k$, alors $AB^{k+1} = AB^k \times B = (B^kA + kB^k) \times B$ par hypothèse de récurrence donc $AB^{k+1} = AB^k \times B = (B^kA + kB^k) \times B = B^k \times AB + kB^{k+1}$. Mais comme $AB = BA + B$, en reportant, on a $AB^{k+1} = B^k \times (BA + B) + kB^{k+1} = B^{k+1}A + (k+1)B^{k+1}$ qui s'écrit aussi $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^{k+1}$: l'hérédité est établie.
Par principe de récurrence, on a montré que $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k - B^kA = kB^k$.
b. Soit $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $L(M) = AM - MA$. Il est clair que L est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Or la question précédente montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ L(B^k) = kB^k$ ce qui prouve que k est une valeur propre de L si $B^k \neq 0$. Comme il est impossible qu'un endomorphisme en dimension finie ($\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$) ait une infinité de valeurs propres, il existe forcément une valeur $k \in \mathbb{N}^*$ telle que $B^k = 0$, et donc forcément $B^i = 0$ si $i \geqslant k$. Par conséquent, B est bien nilpotente.

85

86 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on effectue dans $\chi_A(\lambda)$ l'opération de GAUSS $C_n \longleftarrow C_n + \lambda C_{n-1} + \lambda^2 C_{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1}C_1$ et on développe par rapport à la colonne n, $\chi_A(\lambda) = (-1)^{n+1}\left(\lambda^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-k}\lambda^k\right) \times (-1)^{n-1} = \lambda^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-k}\lambda^k$ donc $\chi_A = X^n - a_1X^{n-1} - \cdots - a_n$ (en fait A est une matrice compagnon).
b. Pour tout complexe λ, le rang de $A - \lambda I_n$ est au moins égal à $n-1$ grâce à la sous-diagonale de 1 échelonnés sur les $n-1$ premières colonnes. Par la formule du rang, la multiplicité géométrique de toute valeur propre λ de A vérifie donc $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rang}\,(A - \lambda I_n) \leqslant 1$.

On va montrer que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

($\Longleftarrow$) Si χ_A est scindé à racines simples, d'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

($\Longrightarrow$) Réciproquement, si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en écrivant $\chi_A = \prod\limits_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}(A)}$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A, on sait d'après le cours que $\forall j \in [\![1;r]\!],\ m_{\lambda_j(A)} = \dim(E_{\lambda_j}(A))$. D'après ce qui précède, on a donc $1 \leqslant m_{\lambda_j(A)} = \dim(E_{\lambda_j}(A)) \leqslant 1$ donc $m_{\lambda_j(A)} = 1$. Toutes les valeurs propres de A sont donc simples, on en déduit que $r = n$ et que χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Par double implication, A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

87 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & 1 \\ 1 & X-5 & 1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)((X-5)(X-2)+1) - (-2(X-2)+1)$ en développement par rapport à la première colonne. Ainsi, $\chi_A = (X-2)(X^2-7X+11) + 2X - 5 = X^3 - 9X^2 + 27X - 27 = (X-3)^3$

(binôme de NEWTON). Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par contre, comme $E_3(A) = \text{Ker}(A - 3I_3) \neq \mathbb{R}^3$ donc $\dim(E_3(A)) \neq 3$ (l'ordre de multiplicité de 3 dans χ_A) car $A \neq 3I_3$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ni bien sûr dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$).

b. Comme $\text{Sp}(A) = \{3\}$ d'après **a.**, si x est un vecteur propre de A, alors $Ax = 3x$ donc la droite $D = \text{Vect}(x)$ est stable par A. Réciproquement, si la droite $D' = \text{Vect}(y)$ est stable par A, on a $y \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ car D' est une droite et $Ay \in D$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ Ay = \lambda y$ donc y est un vecteur propre de A donc $\lambda = 3$ et $y \in D$ ce qui montre que $D' = D$. Par conséquent, la seule droite stable par A est D. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on voit que $(1, 1, 1)$ est dans le noyau de $A - 3I_3$ donc $D = \text{Vect}(x)$ avec $x = (1, 1, 1)$.

c. Soit une base $\mathcal{B}' = (a_1, a_2)$ de P qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Par stabilité de P, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(a')$. Ainsi, $\chi_a = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} XI_2 - A' & * \\ 0 & X - \lambda \end{vmatrix}$ donc $\chi_A = (X - \lambda)\chi_{A'}$ ce qui justifie que $\chi_{A'}$ divise χ_A (et en plus que $\lambda = 3$).

d. Comme P est de dimension 2, $\chi_{a'}$ est unitaire et de degré 2 et il divise $\chi_a = (X-3)^3$ donc $\chi_{a'} = (X-3)^2$. Par CAYLEY-HAMILTON, $(a' - 3\text{id}_P)^2 = 0$ donc $\forall x \in P,\ (a' - 3\text{id}_P)^2(x) = (a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2(x) = 0$ et on a bien l'inclusion $P \subset \text{Ker}\big((a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2\big)$.

e. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A - 3I_3)^2$ et $(a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ sont de rang 1 ce qui montre avec la formule du rang que $\dim(\text{Ker}((a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2) = 2$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a $P = \text{Ker}\big((a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2\big)$.

Dans cet exemple, il y a seulement quatre sous-espaces stables par a : $\{0\}$ de dimension 0, $D = \text{Ker}\big(a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3}\big)$ de dimension 1, $P = \text{Ker}\big((a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2\big)$ de dimension 2 et $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

88

89

90 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & -3 \\ -2 & X-1 & 3 \\ 2 & -1 & X-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1 & -3 \\ -2 & X-1 & 3 \\ 0 & X-2 & X-2 \end{vmatrix}$ après avoir effectué $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$. On factorise par $X - 2$ dans la troisième ligne ce qui donne $\chi_A = (X-2) \begin{vmatrix} X & -1 & -3 \\ -2 & X-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X & 2 & -3 \\ -2 & X-4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ après $C_2 \longleftarrow C_2 - C_3$. On développe par rapport à la troisième ligne et on a $\chi_A = (X-2)(X(X-4)+4) = (X-2)^3$. Ainsi, comme les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, il vient $\text{Sp}(A) = \{2\}$.

b. A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_2(A)) = 3$, ce qui équivaut à $A = 2I_3$, ce n'est visiblement pas le cas. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

c. $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est visiblement de rang 1 donc, avec la formule du rang, $\dim(E_2(A)) = 2$.

Un simple coup d'œil à $A - 2I_3$ nous permet d'écrire $E_2(A) = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 2, 0)$ et $v = (0, 3, -1)$. Le théorème de la base incomplète montre l'existence de $w \in \mathbb{R}^3$ tel que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$. Bien sûr 100% des vecteurs w conviennent mais si on prend par exemple $w = (1, 0, 0)$, la matrice de la famille

$\mathcal{B} = (u, v, w)$ dans la base canonique vaut $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(P) = 2 \neq 0$ donc P est inversible ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ alors que u et v sont des vecteurs propres de A.

d. Puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, la matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le cours. Comme la première colonne de A vaut $Aw = (0, 2, -2) = 2v - 2u + 2w$, et comme $Au = 2u$ et $Av = 2v$ par construction, par la formule de changement de base, on a $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ car, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T = P^{-1}AP$.

91 **a.** f_A va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par propriété du produit matriciel et f_A est bien linéaire par distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $f_A(\lambda M + M') = A(\lambda M + M') = \lambda AM + AM' = \lambda f_A(M) + f_A(M')$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Ainsi f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. ($\Longrightarrow$) Si $A^2 = A$, alors $f_A^2(M) = f_A(f_A(M)) = f_A(AM) = A(AM) = (AA)M = A^2M = AM = f_A(M)$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $f_A^2 = f_A$ et f_A est bien un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

($\Longleftarrow$) Si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A^2 = f_A$ donc, en particulier, $f_A^2(I_n) = f_A(I_n)$ d'où $A^2 = A$.

Par double implication, $A^2 = A$ si et seulement si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Par une récurrence facile, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A^k(M) = A^kM$. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(f_A) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kf_A^k$ donc $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(f_A)(M) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kA^kM = P(A)M$.

- Si P est annulateur de A, la relation précédente montre que $P(f_A) = 0$ donc P est aussi annulateur de f_A.
- Si P est annulateur de f_A, alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(A)M$ d'après ce qui précède donc, en particulier en prenant $M = I_n$, on a $P(A) = 0$ donc P est aussi annulateur de A.

Par conséquent, A et f_A ont les mêmes polynômes annulateurs. Comme A (ou f_A) est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples : A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.

d. Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors $AX = \lambda X$. Construisons par exemple la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont égales à X, alors $f_A(M) = AM = \lambda M$ par calcul matriciel donc, comme $M \neq 0$ car $X \neq 0$, M est un vecteur propre de f_A associé à la valeur propre λ.

e. Si $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de f_A associé à la valeur propre λ, alors $f_a(M) = AM = \lambda M$. Comme $M \neq 0$, il existe au moins une colonne, disons la colonne C_j, qui est non nulle. Comme $AM = \lambda M$, on en déduit que $AC_j = \lambda C_j$ donc C_j est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

f. Les deux questions précédentes montrent par double inclusion que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f_A)$.

92 **a.** Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kX^k$ un polynôme annulateur de M. Il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^kX = \lambda^kX$. Ainsi, on peut calculer $0 = P(M)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kM^kX = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\lambda^kX = P(\lambda)X = 0$. Comme $X \neq 0$, on a forcément $P(\lambda) = 0$. Ainsi, toute valeur propre λ de M est racine de tout polynôme annulateur P de M.

b. Si M est symétrique, comme $M^T = M$, on a $M^2+M-I_n = 0$ donc $P = X^2+X-1$ annule M. Classiquement, $P = (X-\alpha)(X-\beta)$ avec $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ donc P est scindé à racines simples. Par théorème, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c. Si on ne suppose plus M symétrique, on cherche un polynôme annulateur de M de degré supérieur. En transposant la relation, on obtient $(M^T)^2 + M = I_n$ donc $(I_n - M^2)^2 + M - I_n = M^4 - 2M^2 + M = 0$ et le polynôme $Q = X^4 - 2X^2 + X$ annule M. Or $Q = X(X-1)(X^2+X-1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$ qui est à nouveau scindé à racines simples. Ainsi M est encore diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

d. Puisque $(M^T)^2 = I_n - M$, en passant au déterminant, on a $\det((M^2)^T) = \det(M)^2 = \det(I_n - M) = \chi_M(1)$. Ainsi, $\det(M) \neq 0 \Longleftrightarrow \chi_M(1) \neq 0 \Longleftrightarrow$ (1 n'est pas valeur propre de M).

Ou encore, M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

93 **a.** Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme annulateur de A et λ une valeur propre de A, alors il existe un vecteur colonne $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Par une récurrence simple, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X$. Ainsi, $P(A)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k X = \Big(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\Big) X = 0$ car $P(A) = 0$ donc, comme $X \neq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{d} a_k \lambda^k = P(\lambda) = 0$.

Les valeurs propres de A sont racines de tout polynôme annulateur de A.

b. Comme χ_A est unitaire par construction et scindé sur $\mathbb{C}$ par D'ALEMBERT-GAUSS, si $a_1, \cdots, a_r$ sont les valeurs propres distinctes de A, on peut écrire $\chi_A = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - a_i)^{m_{a_i}(A)}$ d'où $\chi_A(B) = \prod\limits_{i=1}^{r} (B - a_i I_n)^{m_{a_i}(A)}$. Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe multiplicatif, on a $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1;n]\!],\ B - a_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. On peut aussi le justifier par le déterminant (qui est une fonction multiplicative), en écrivant que l'on a $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \det(\chi_A(B)) \neq 0 \Longleftrightarrow \prod\limits_{i=1}^{r} (\det(B - a_i I_n))^{m_{a_i}(A)} \neq 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1;r]\!],\ \det(B - a_i I_n) \neq 0$.

Or $B - a_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ car a_i étant une valeur propre de A, elle ne peut pas être une valeur propre de B car on a supposé $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. On a donc bien $\chi_A(B)$ inversible.

c. Par hypothèse, $AX = XB$. Alors $A^2X = A(AX) = A(XB) = (AX)B = XB^2$. Par une récurrence facile, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = XB^k$. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X B^k = XP(B)$. En prenant $P = \chi_A$, on obtient donc $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$ ce qui donne, avec CAYLEY-HAMILTON, $X\chi_A(B) = 0$. Or on a vu en **b.** que $\chi_A(B)$ est inversible. Il ne reste donc plus que $X = 0$.

d. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(X) = AX - XB$. Comme φ est visiblement linéaire et qu'on est en dimension finie, φ est un automorphisme si et seulement si elle est injective. Soit $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $AX = XB$ et, avec la question précédente, $X = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ ce qui montre que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette bijectivité s'écrit, comme attendu, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = \varphi(X) = M$.

94 **a.** Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a $f(\lambda M + \mu N) = B(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)B$ qu'on développe en $f(\lambda M + \mu N) = \lambda(MB - BM) + \mu(NB - BN) = \lambda f(M) + \mu f(N)$ donc f est linéaire, et comme va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. On a $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(AB - BA) = \mathrm{Tr}\,(AB) - \mathrm{Tr}\,(BA) = 0$ par linéarité de la trace et d'après la propriété classique $\forall (U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \mathrm{Tr}\,(UV) = \mathrm{Tr}\,(VU)$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on pose l'assertion $\mathcal{P}(k) =$ "$A^k B - BA^k = kA^k$".

Initialisation : l'énoncé se traduit par le fait que $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $AB - BA = A$.

Hérédité : soit $k \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, $A^{k+1}B - BA^{k+1} = A(A^kB) - BA^{k+1} = A(BA^k + kA^k) - BA^{k+1}$ par hypothèse de récurrence et $A^{k+1}B - BA^{k+1} = (AB - BA)A^k + kA^{k+1} = A^{k+1} + kA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$ donc l'assertion $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a bien $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^kB - BA^k = kA^k$. Ainsi, par linéarité de la trace, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\,\mathrm{Tr}\,(A^k) = \mathrm{Tr}\,(A^kB) - \mathrm{Tr}\,(BA^k)$ donc $\mathrm{Tr}\,(A^k) = 0$.

c. Si on suppose que A n'est pas nilpotente, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \neq 0$ et $f(A^k) = kA^k$ d'après la question précédente. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N},\ k \in \mathrm{Sp}(f)$. Ceci est impossible car cela ferait une infinité de valeurs propres pour l'endomorphisme f en dimension finie. Ainsi, la matrice A est bien nilpotente.

95 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 1 & -3 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 0 & 2-X & X-2 \end{vmatrix}$ après avoir effectué $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$. On factorise par $X-2$ dans la troisième ligne et on effectue $C_2 \longleftarrow C_2 + C_3$ et on arrive à $\chi_A = (X-2)\begin{vmatrix} X-3 & 1 & -2 \\ 1 & X-3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la troisième ligne, on arrive par identité remarquable à $\chi_A = (X-2)^2(X-4)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 4\}$. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 1, on a $\dim(E_2(A)) = 3 - 1 = 2 = m_2(A)$ donc A est diagonalisable. D'après la matrice $A - 2I_3$ précédente, une équation du plan $E_2(A)$ est $x - 3y + 2z = 0$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (3, 1, 0)$ et $v_2 = (-2, 0, 1)$ par exemple. De même, $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (on le savait car 4 est valeur propre simple de A) et $E_4(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (-1, 1, 1)$.

b. D'après la question précédente et avec la formule de changement de base, si on pose $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$. Si on pose $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $D'^2 = D$ et si on pose $R = PD'P^{-1}$, on a $R^2 = PD'P^{-1}PD'P^{-1} = P(D')^2P^{-1} = PDP^{-1}$ donc $R^2 = A$.

c. Comme A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 4\}$, le polynôme $P = (X-2)(X-4)$ est annulateur de A. Si $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $R^2 = A$, alors $P(R^2) = P(A) = 0$ donc $(R^2 - 2I_3)(R^2 - 4I_3) = 0$ et le polynôme $Q = (X^2-2)(X^2-4) = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-2)(X+2)$ est annulateur de R et scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ donc R est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On peut même dire d'après le cours que $\mathrm{Sp}(R) \subset \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2, 2\}$.

d. Si $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $R^2 = A$, alors $RA = R^3 = AR$ donc les sous-espaces propres de A sont stables par R, ce qui justifie que les sous-espaces $E_2(A)$ et $E_4(A)$ sont stables par R. On en déduit que dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = E_2(A) \oplus E_4(A)$, la matrice de l'endomorphisme associé à R est diagonale par blocs, donc que $R = P\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $R^2 = P\begin{pmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1} = A$ si et seulement si $B^2 = 2I_2$ et $\lambda^2 = 4$. On ne peut donc prendre que $\lambda = \pm 2$ mais par contre il existe une infinité de matrices B telles que $B^2 = 2I_2$, par exemple

$B = \sqrt{2}S_\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ avec $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ qui est la matrice d'une réflexion du plan $\mathbb{R}^2$.

Il existe donc une infinité de matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

96 **a.** On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -3 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X^3 - 3X - 3$ donc, par CAYLEY-HAMILTON, $P = X^3 - 3X - 3$ est un polynôme annulateur de A. Pour $n \in \mathbb{N}$, on multiplie $A^3 - 3A - 3I_3 = 0$ par A^n pour avoir $A^{n+3} - 3A^{n+1} - 3A^n = 0$ et, par linéarité de la trace, $u_{n+3} - 3u_{n+1} - 3u_n = 0$.

b. $u_0 = \text{Tr }(I_3) = 3$, $u_1 = \text{Tr }(A) = 0$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ donc $u_2 = \text{Tr }(A^2) = 6$, $u_3 = 3u_1 + 3u_0 = 9$ et $u_4 = 3u_2 + 3u_1 = 18$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}) \in (\mathbb{N}^*)^3$, alors $u_{n+3} = 3u_{n+1} + 3u_n \in \mathbb{N}^*$ car $\mathbb{N}^*$ est stable par somme et produit. Par principe de récurrence, on a bien $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in \mathbb{N}^*$.

c. Comme $\chi_A'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$, la fonction χ_A est croissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $[-1;1]$ avec $\lim\limits_{t\to-\infty} \chi_A(t) = -\infty$, $\chi_A(-1) = -1$, $\chi_A(1) = -5$, $\chi_A(2) = -1$, $\chi_A(3) = 15$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \chi_A(t) = +\infty$. Avec le tableau de variations de χ_A, on se rend compte que χ_A n'admet qu'une seule racine réelle $\alpha \in]2;3[$ et, comme χ_A est réel, ses deux autres racines sont β et $\overline{\beta}$ (deux complexes non réels et conjugués). Comme χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et semblable à $\text{diag}(\alpha, \beta, \overline{\beta})$. Ainsi, A^n est semblable à $\text{diag}(\alpha^n, \beta^n, \overline{\beta}^n)$ donc $u_n = \text{Tr }(A^n) = \alpha^n + \beta^n + \overline{\beta}^n$.

d. Comme $\alpha\beta\overline{\beta} = 3$ par les relations coefficients-racines, on a $|\beta|^2 = \frac{3}{\alpha} \leqslant \frac{3}{2}$ donc $|\beta| < 2$. Ainsi, $\beta^n \underset{+\infty}{=} o(\alpha^n)$ et $\overline{\beta}^n \underset{+\infty}{=} o(\alpha^n)$ ce qui montre que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \alpha^n$ donc $\frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^n}$. Ainsi, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{u_n}$ à termes positifs converge par comparaison à une série géométrique car $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$.

97 **a.** Par blocs, pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a $\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n & -A \\ -I_n & \lambda I_n \end{vmatrix}$. On fait l'opération (par blocs) $C_1 \longleftarrow C_1 + \frac{C_2}{\lambda}$ et on a $\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - \frac{A}{\lambda} & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{vmatrix} = \det(\lambda I_n) \times \det\left(\lambda I_n - \frac{A}{\lambda}\right) = \lambda^n \times \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \det(\lambda^2 I_n - A) = \chi_A(\lambda^2)$. On a donc $\chi_B = \chi_A(X^2)$ car ces deux polynômes coïncident sur $\mathbb{C}^*$. Ainsi, le spectre de B est constitué des racines carrées complexes des valeurs propres de A.

b. Soit $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les valeurs propres de A. Comme $\det(A) = \prod\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont distinctes et non nulles. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, notons λ_k une racine carrée de α_k, alors les valeurs propres de B sont les $\lambda_1, -\lambda_1, \cdots, \lambda_n, -\lambda_n$ d'après **a.** et elles sont distinctes car $\lambda_k \neq -\lambda_k$ et qu'on ne peut pas avoir $\lambda_i = \pm\lambda_j$ car sinon leurs carrés α_i et α_j seraient égaux. Ainsi, B a $2n$ valeurs propres distinctes donc B est diagonalisable.

c. Supposons B diagonalisable, alors $B = Q\Delta Q^{-1}$ avec $\Delta \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ diagonale et $Q \in GL_{2n}(\mathbb{C})$. Alors $B^2 = Q\Delta^2 Q^{-1}$ donc B^2 est aussi diagonalisable. Mais $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Soit R un polynôme scindé à racines simples qui annule B^2, alors $R(B^2) = \begin{pmatrix} R(A) & 0 \\ 0 & R(A) \end{pmatrix} = 0$ donc $R(A) = 0$ donc A est diagonalisable car elle a un polynôme annulateur scindé à racines simples.

d. Prenons $A = 0$, alors A est on ne peut plus diagonalisable car elle est diagonale. Mais $\chi_B = X^{2n} = (X-0)^{2n}$ donc, d'après le cours, B est diagonalisable si et seulement $\text{Ker}(B) = E_0(B)$ est de dimension $2n$, c'est-à-dire si et seulement si $B = 0$. Mais non, donc B n'est pas diagonalisable alors que A l'est.

e. Si A est diagonalisable, comme avant, $R(B^2) = \begin{pmatrix} R(A) & 0 \\ 0 & R(A) \end{pmatrix} = 0$ pour un polynôme annulateur R scindé à racines simples de A. Ainsi, B^2 est diagonalisable. Posons $R = \prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k)$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ distincts. Aucun des α_k n'est nul car α_k est une valeur propre de A et que A est inversible. Notons δ_k une racine carrée de α_k pour $k \in [\![1;r]\!]$. Alors, comme avant, $\delta_1, -\delta_1, \cdots, \delta_r, -\delta_r$ sont distincts donc le polynôme $Q = \prod_{k=1}^{r}(X - \delta_k)(X + \delta_k)$ annule B car $R(B^2) = \prod_{k=1}^{r}(B^2 - \alpha_k I_{2n}) = \prod_{k=1}^{r}(B - \delta_k I_{2n})(B + \delta_k I_{2n}) = Q(M) = 0$ et Q est scindé à racines simples donc B est diagonalisable.

98 **a.** Posons $P = \chi_{M(a,b,c)} = \begin{vmatrix} X-a & 0 & -c \\ 0 & X-b & 0 \\ -c & 0 & X-a \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la deuxième colonne, $P = (X-b)\begin{vmatrix} X-a & -c \\ -c & X-a \end{vmatrix} = (X-b)\big((X-a)^2 - c^2\big)$ donc $\mathrm{Sp}(M(a,b,c)) = \{a-c, a+c, b\}$.

b. Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$ (on le savait déjà car $M(a,b,c)$ est symétrique réelle), on sait d'après le cours que $d = \det(M(a,b,c)) = -P(0) = b(a^2 - c^2)$. On sait déjà que $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c))$ et $\mathrm{Ker}(M(a,b,c))$ sont orthogonaux car $M(a,b,c)$ est symétrique. Traitons quelques cas :

- Si $a = b = c = 0$, alors $M(a,b,c) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \{0\}$.
- Si $b = 0$ et $a = c \neq 0$, alors $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 1$ et on a $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$.
- Si $b = 0$ et $a = -c \neq 0$, alors $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 1$ et on a $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1))$.
- Si $b = 0$ et $a^2 \neq c^2$, les colonnes 1 et 3 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 2$ et $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((0,1,0))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,0,-1))$.
- Si $b \neq 0$ et $a = c = 0$, alors $M = bE_{2,2}$ donc $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 1$ et on trouve comme avant $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,0,1))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((0,1,0))$.
- Si $b \neq 0$ et $a = c \neq 0$, les colonnes 1 et 2 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 2$ et $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$.
- Si $b \neq 0$ et $a = -c \neq 0$, les colonnes 1 et 2 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc $\mathrm{rang}\,(M(a,b,c)) = 2$ et $\mathrm{Ker}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$ et $\mathrm{Im}\,(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$.

c. La matrice $M(a,b,c)$ est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable, et même orthodiagonalisable.

d. Les conditions imposées à a,b,c montrent que $a-c \neq a+c$, que $a+c \neq b$ et que $a-c \neq b$. La matrice $M(a,b,c)$ admet donc trois valeurs propres distinctes donc les sous-espaces propres associés sont des droites. Comme $M(a,a,c) - (a+c)I_3 = \begin{pmatrix} -c & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}$, on constate que $(M(a,a,c) - (a+c)I_3)v_1 = 0$ donc que $M(a,a,c)v_1 = (a+c)v_1$ avec $v_1 = (1,0,1)$. Il est clair que $M(a,a,c)v_2 = bv_2$ pour $v_2 = (0,1,0)$. De même, on $M(a,a,c)v_3 = (a-c)v_3$ avec $v_3 = (1,0,-1)$. La famille $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ est libre car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de cette famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique est donc inversible. Par formule de changement de base, on a

$M(a,a,c) = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(a+c, a, a-c)$.

En général, pour a, b, c quelconques, avec les mêmes vecteurs v_1, v_2 et v_3 et la même matrice P, on a $M(a,b,c)v_1 = (a+c)v_1$, $M(a,b,c)v_2 = bv_2$ et $M(a,b,c)v_3 = (a-c)v_3$ donc, par la formule de changement de base, on a $M(a,b,c) = PDP^{-1}$ en notant $D = \text{diag}(a+c, b, a-c)$. On pourrait imposer P orthogonale grâce au théorème spectral en prenant plutôt $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ mais ce n'est pas demandé.

99 **a.** Par définition, ce reste R de l'énoncé a un degré majoré par 3 donc ϕ va bien de E dans E. Pour $(P,Q) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $X^2(\lambda P+\mu Q) = \lambda(X^2P)+\mu(X^2Q) = \lambda(UD+\phi(P))+\mu(VD+\phi(Q)) = (\lambda U+\mu V)D+(\lambda\phi(P)+\mu\phi(Q))$ avec des polynômes réels U, V qui sont des quotients dans la division euclidienne par D. Comme le polynôme $\lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$ est de degré inférieur ou égal à 3 car $\deg(\lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)) \leqslant \text{Max}(\deg(\phi(P), \phi(Q)) \leqslant 3$, il est le reste de la division euclidienne de $X^2(\lambda P + \mu Q)$ par D (et $\lambda U + \mu V$ en est le quotient). Ainsi $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$ et ϕ est bien un endomorphisme de E.

b. Clairement $\phi(1) = X^2$ et $\phi(X) = X^3$ car $X^2.1 = D.0 + 1$ et $X^2.X = D.0 + X^3$. Comme $X^2X^2 = X^4 = D + 1$, on a $\phi(X^2) = 1$. Enfin $X^2X^3 = XD + X$ donc $\phi(X^3) = X$. Ainsi, la matrice ϕ dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Après $C_1 \longleftarrow C_1 + XC_3$ et $C_2 \longleftarrow C_2 + XC_4$ puis développement par rapport aux première et dernière colonnes, $\chi_\phi = \chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & -1 \\ -1 & 0 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & X^2-1 \\ X^2-1 & 0 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)^2$.

Par conséquent, $\text{Sp}(\phi) = \{-1, 1\}$ et ϕ est diagonalisable si et seulement si A l'est, c'est-à-dire si et seulement $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ est annulateur de A. Or $A^2 = I_4$ par calculs donc ϕ est diagonalisable. Bien sûr, on pouvait dire que A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable par le théorème spectral.

Soit $P \in E$, déterminons les sous-espaces propres associés à 1 et -1 :

- $\phi(P) = P \iff (\exists U \in \mathbb{R}[X],\ X^2P = UD + P) \iff (X^2P - P$ est un multiple de $X^4 - 1)$. Avec les congruences, $\phi(P) = P \iff (X^2 - 1)P \equiv 0\ [D] \iff P \equiv 0\ [X^2 + 1]$ car $D = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$ donc $\mathbb{E}_1(\phi) = \text{Vect}(X^2 + 1, X(X^2 + 1))$ est un plan (on le savait déjà avec l'égalité des ordres).
- $\phi(P) = -P \iff (X^4 - 1$ divise $X^2P + P)$ d'où $\phi(P) = -P \iff (X^2 + 1)P \equiv 0\ [D] \iff P \equiv 0\ [X^2 - 1]$ car $D = (X^2 + 1)(X^2 - 1)$ donc $\mathbb{E}_{-1}(\phi) = \text{Vect}(X^2 - 1, X(X^2 - 1))$ est encore un plan.

c. $A^2 = I_4$ donc A est inversible et $A^{-1} = A$ donc ϕ est inversible et $\phi^{-1} = \phi$.

100 **a.** Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = D$ est diagonale. Comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2) = D^2$ est diagonale, $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de u^2 qui est donc diagonalisable.

b. • Si $n = 1$, tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ étant une homothétie, u et u^2 sont diagonalisables.

• Si $n \geqslant 2$, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $\text{Mat}_{can}(u) = E_{1,2}$, alors $A^2 = 0$ donc $u^2 = 0$ est diagonalisable alors que $\chi_u = \chi_A = X^n$ puisque A est nilpotente. Si u était diagonalisable, comme 0 est d'ordre algébrique n, on aurait aussi $\dim(E_0(u)) = \dim(\text{Ker}(u)) = n$ et $u = 0$ ce qui est faux. Ainsi, u n'est pas diagonalisable.

Ainsi, la réciproque de la question précédente est vraie si $n = 1$ et fausse dès que $n \geqslant 2$.

c. $(\supset)$ Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) + \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$, alors $\exists (y, z) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \times \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$, $x = y + z$ donc $u^2(x) = u^2(y) + u^2(z)$. Or $u(y) = \lambda y$ donc $u^2(y) = u(\lambda y) = \lambda u(y) = \lambda^2 y$ et $u(z) = -\lambda z$ donc $u^2(z) = u(-\lambda z) = -\lambda u(z) = (-\lambda)^2 y = \lambda^2 z$ d'où $u^2(x) = \lambda^2(y + z) = \lambda^2 x$ et on a bien $x \in \mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$. On a bien établi l'inclusion $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) + \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \subset \mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$.

$(\subset)$ Soit un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$:

<u>Analyse</u> : supposons que $x = y + z$ (1) avec $(y, z) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \times \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$, par linéarité de u on a $u(x) = \lambda y - \lambda z$ (2) donc $y = \dfrac{u(x) + \lambda x}{2\lambda}$ et $z = \dfrac{\lambda x - u(x)}{2\lambda}$ en combinant (1) et (2) puisque $\lambda \neq 0$.

<u>Synthèse</u> : si $y = \dfrac{u(x) + \lambda x}{2\lambda}$ et $z = \dfrac{\lambda x - u(x)}{2\lambda}$, on a $x = y + z$ et $u(y) = \dfrac{u^2(x) + \lambda u(x)}{2\lambda} = \dfrac{\lambda^2 x + \lambda u(x)}{2\lambda} = \lambda y$ et, de même $u(z) = \dfrac{\lambda u(x) - u^2(x)}{2\lambda} = \dfrac{\lambda x - \lambda^2 x}{2\lambda} = -\lambda z$.

On vient de prouver l'inclusion $\mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) + \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$.

Par double inclusion, on a donc $\mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$ puisque les deux sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$ et $\mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$ sont en somme directe puisqu'associés à des valeurs propres différentes car $\lambda \neq -\lambda$.

d. <u>Méthode 1</u> : si u^2 est diagonalisable, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u^2, elles sont non nulles car u^2 est inversible. Par définition, $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(u^2 - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$. D'après la question précédente, on a donc $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(u - \delta_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \delta_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$ en notant δ_k une racine carrée complexe de λ_k. Comme $\mathbb{C}^n$ est la somme directe de sous-espaces propres associés à u, par définition, u est diagonalisable.

<u>Méthode 2</u> : si u^2 est diagonalisable et u inversible, alors $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u^2 (non nulles car u^2 est aussi inversible). On sait que $P = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)$ est annulateur de u^2 d'où $P(u^2) = \prod\limits_{k=1}^{r} (u^2 - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = 0$. Notons, pour $k \in [\![1; r]\!]$, δ_k une racine carrée (complexe) de λ_k, alors $\prod\limits_{k=1}^{r} (u^2 - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = \prod\limits_{k=1}^{r} (u - \delta_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \circ (u + \delta_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = 0$ donc $Q = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \delta_k)(X + \delta_k)$ est annulateur de u. De plus, $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $\delta_k \neq -\delta_k$ car $\lambda_k = \delta_k^2 \neq 0$ et $\forall (i, j) \in [\![1; r]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\pm \delta_i \neq \pm \delta_j$ car $\lambda_i = \delta_i^2 \neq \delta_j^2 = \lambda_j$. Ainsi, Q annule u et est scindé à racines simples donc u est diagonalisable.

101

102 **a.** L'application φ est bien définie de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$ et elle est clairement linéaire (il suffit de l'écrire). Comme $\dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{K}^n) = n$, φ est un isomorphisme si et seulement si φ est injective. Or, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi(P) = (P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n)) = (0, \cdots, 0)$ donc $P(\lambda_1) = \cdots = P(\lambda_n) = 0$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des racines de P. Il y a donc n racines distinctes d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$, on sait d'après le cours que ceci implique $P = 0$ ce qui prouve que φ est injective.

Par conséquent, φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$.

Pour $(\beta_1,\cdots,\beta_n) \in \mathbb{K}^n$, l'unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie $\varphi(P) = (\beta_1,\cdots,\beta_n)$ s'appelle le polynôme d'interpolation de LAGRANGE et on a classiquement $P = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \dfrac{X-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}$.

b. <u>En général</u>, si deux endomorphismes f et g commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. En effet, si $v \in E_\lambda(f)$ pour une valeur propre λ de f, alors $f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$ donc $g(v) \in E_\lambda(f)$, ce qui prouve que $E_\lambda(f)$ est stable par g.

<u>Plus spécifiquement ici</u>, soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, comme λ est valeur propre simple de f, on sait d'après le cours que $E_\lambda(f) = \mathrm{Vect}(v)$. Alors, $f\big(g(v)\big) = g\big(f(v)\big) = \lambda g(v)$ donc $g(v) \in \mathrm{Vect}(v) = E_\lambda(f)$. Alors $\exists \beta \in \mathbb{R},\ g(v) = \beta v$ donc v est un vecteur propre pour g (associé à la valeur propre β). Tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g (la réciproque n'est pas forcément vraie).

c. Comme f est diagonalisable puisqu'il admet n valeurs propres distinctes en dimension n, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1,\cdots,v_n)$ de E composée par des vecteurs propres de f. D'après la question **b.**, ces vecteurs sont aussi des vecteurs propres pour g donc la base $\mathcal{B}$ est composée de vecteurs propres communs à f et à g.

d. Avec $\mathcal{B}$ une des bases de codiagonalisation de la question précédente, il existe donc deux matrices diagonales $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ telles que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ et $D' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$. Pour $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a $g = P(f) \Longleftrightarrow D' = P(D) \Longleftrightarrow (\forall k \in [\![1;n]\!],\ \beta_k = P(\lambda_k)) \Longleftrightarrow (\beta_1,\cdots,\beta_n) = \varphi(P)$. D'après la question **a.**, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie ceci donc tel que $g = P(f)$.

e. $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{C}(f)$ est non vide car $\mathrm{id}_E \in \mathcal{C}(f)$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(g,h) \in \mathcal{C}(f)^2$, alors $\lambda g + h \in \mathcal{C}(f)$ car $f \circ (\lambda g + h) = \lambda f \circ g + f \circ h = \lambda g \circ f + h \circ f = (\lambda g + h) \circ f$. Ainsi, $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (même une sous-algèbre) et la question précédente montre que l'application $\psi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathcal{C}(f)$ définie par $\psi(P) = P(f)$ est un isomorphisme. Ainsi, $\dim(\mathcal{C}(f)) = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = n$.

103 **a.** Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{Ker}(u^k)$, alors $u^k(x) = 0_E$ donc $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. On a bien montré l'inclusion $\mathrm{Ker}(u^k) \subset_k er(u^{k+1})$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

b. On a clairement $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^p)$, et $\mathrm{Ker}(u^{p+1}) = \mathrm{Ker}(u^p)$ par hypothèse, donc $\mathrm{Ker}(u^{p+\ell}) = \mathrm{Ker}(u^p)$ est vrai pour $\ell = 0$ et $\ell = 1$: voilà pour l'initialisation. Si on suppose, pour un entier $\ell \geqslant 1$, que $\mathrm{Ker}(u^{p+\ell}) = \mathrm{Ker}(u^p)$, alors on sait déjà, par transitivité de l'inclusion et avec la question précédente, que $\mathrm{Ker}(u^p) \subset \mathrm{Ker}(u^{p+\ell+1})$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{p+\ell+1})$, alors $u^{p+\ell+1}(x) = u^{p+\ell}(u(x)) = 0_E$ donc il vient $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{p+\ell})$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^p)$ donc $u^p(u(x)) = u^{p+1}(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{p+1}) = \mathrm{Ker}(u^p)$. On a établi l'autre inclusion $\mathrm{Ker}(u^{p+\ell+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^p)$. Par double inclusion, on a donc $\mathrm{Ker}(u^{p+\ell+1}) = \mathrm{Ker}(u^p)$ et l'hérédité est prouvée.

Par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall \ell \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(u^{p+\ell}) = \mathrm{Ker}(u^p)$.

c. Comme u est nilpotent, $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0\}$ n'est pas vide, cette partie non vide et minorée de $\mathbb{N}$ admet donc un minimum noté q par l'énoncé. Ainsi, $u^q = 0$ car $q \in A$ et $u^{q-1} \neq 0$ car $q-1 \notin A$.

Soit M la matrice de u dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de E. Alors $M^q = 0$ donc X^q annule M. Soit λ une valeur propre complexe de M, elle fait donc partie des racines de X^q, elle ne peut donc valoir que 0. Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ car un spectre complexe ne peut pas être vide par D'ALEMBERT-GAUSS. On en déduit que

$\chi_M = \prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)} (X-\lambda)^{m_\lambda(M)} = X^n$ donc $\chi_u = \chi_M = X^n$.

d. Par CAYLEY-HAMILTON, on a $u^n = 0$ donc $n \in A$. Comme $q = Min(A)$, on a donc $q \leqslant n$.

104 **a.** $B^2 = 3B$ donc $B^3 = 3B^2 = 9B$. Si on suppose que $B^n = 3^{n-1}B$ pour $n \geqslant 1$, on a $B^{n+1} = B^nB$ donc $B^{n+1} = 3^{n-1}B.B = 3^{n-1}B^2 = 3^{n-1}(3B) = 3^nB$. Par principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = 3^{n-1}B$.

b. Comme $A = aB + I_3$ et que I_3 et B commutent, on a $A^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^k \binom{n}{k} B^k = I_3 + \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a^k \binom{n}{k} 3^{k-1}\Big)B$ par le binôme de NEWTON et d'après la question précédente. Or $\sum\limits_{k=1}^{n} a^k \binom{n}{k} 3^{k-1} = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(3a)^k$ qu'on transforme en $\sum\limits_{k=1}^{n} a^k \binom{n}{k} 3^{k-1} = \dfrac{(1+3a)^n-1}{3}$ donc $A^n = I_3 + \dfrac{(1+3a)^n-1}{3}B$.

c. Si $a = 0$, on a $A = I_3$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I_3$ est très simple. On suppose dans la suite que $a \neq 0$. Comme $B^2 = 3B$, on a $A^2 = (aB+I_3)^2 = a^2B^2 + 2aB + I_3 = (3a^2+2a)B + I_3 = (3a+2)(aB) + I_3$ donc $A^2 = (3a+2)(A-I_3)+I_3 = (3a+2)A-(3a+1)I_3$. Ainsi, $P = X^2-(3a+2)X+(3a+1) = (X-(3a+1))(X-1)$ annule A. Comme $a \neq 0$, P est annulateur de A et scindé à racines simples donc A est diagonalisable, ce qui se déduisait aussi directement du théorème spectral car A est réelle et symétrique.

Mais pour les puissances de A, on écrit la division euclidienne de X^n par P, à savoir $X^n = Q_nP + R_n$ avec $R_n = a_nX + b_n$ et on évalue en 1 et $3a+1$ pour avoir $1 = a_n + b_n$ et $(3a+1)^n = a_n(3a+1) + b_n$ donc $a_n = \dfrac{(3a+1)^n-1}{3a}$ et $b_n = \dfrac{(3a+1)-(3a+1)^n}{3a}$. Et comme $P(A) = 0$, en remplaçant X par A dans la division euclidienne, on a $A^n = \dfrac{(3a+1)^n-1}{3a}A + \dfrac{(3a+1)-(3a+1)^n}{3a}I_3$.

105 **a.** Pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\Phi_2(P) = \int_X^{X+1}(at^2+bt+c)dt = \Big[\dfrac{at^3}{3}+\dfrac{bt^2}{2}+ct\Big]_X^{X+1}$ donc $\Phi_2(P) = \frac{a}{3}\big((X+1)^3-X^3\big) + \frac{b}{2}\big((X+1)^2-X^2\big) + c(X+1-X) = \frac{a}{3}(3X^2+3X+1) + \frac{b}{2}(2X+1) + c \in \mathbb{R}_2[X]$. La linéarité de Φ, donc de Φ_2, provient de la linéarité de l'intégrale. Ainsi, Φ_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Comme $\Phi_2(X^2) = X^2 + X + \frac{1}{3}$, $\Phi_2(X) = X + \frac{1}{2}$ et $\Phi_2(1) = 1$, si on note $\mathcal{B}_2 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\Phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\chi_{\Phi_2} = (X-1)^3$ donc 1 est la seule valeur propre de Φ_2. Comme $E_1(\Phi_2) \neq \mathbb{R}_2[X]$ car $\Phi_2 \neq \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, Φ_2 n'est pas diagonalisable.

c. Comme en **a.**, la linéarité de Φ_n provient de celle de Φ, qui découle de la linéarité de l'intégrale. En notant $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kX^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\Phi_n(P) = \Phi(P) = \int_X^{X+1}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_kt^k\Big)dt = \Big[\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_kt^{k+1}}{k+1}\Big]_X^{X+1}$ qui s'écrit aussi $\Phi_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_k\big((X+1)^{k+1}-X^{k+1}\big)}{k+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\forall k \in [\![0;n]\!],\ (X+1)^{k+1}-X^{k+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ après simplification des termes en X^{k+1}. Ainsi, Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme en question **b.**, puisque $\Phi_n(X^k) = \dfrac{(X+1)^{k+1}-X^{k+1}}{k+1} = \sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\dfrac{X^i}{k+1} = X^k + \sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i}\dfrac{X^i}{k+1}$ car $\binom{k+1}{k} = k+1$, la matrice de Φ_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Ainsi, $\chi_{\Phi_n} = (X-1)^n$ alors que $\Phi_n \neq \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ dès que $n \geqslant 1$ car par exemple $\Phi_n(X) \neq X$. On a donc deux cas :

- si $n=0$, $\Phi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_0[X]}$ donc Φ_0 est diagonalisable.

- si $n \geqslant 1$, Φ_n n'est plus diagonalisable mais seulement trigonalisable.

106 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & -3 \\ -1 & 1 & X-4 \end{vmatrix} = X((X-1)(X-4)+3) - (3-(X-1))) = X^3 - 5X^2 + 7X - 4 + X$ donc $\chi_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ en développant par rapport à la première ligne. 1 est une racine évidente de χ_A donc $\chi_A = (X-1)(X^2-4X+4) = (X-1)(X-2)^2$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est déjà trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après le cours, A est diagonalisable $\Longleftrightarrow \dim(E_2(A)) = 2 \Longleftrightarrow (X-1)(X-2)$ annule A.

- $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car 2 est valeur propre de A et clairement pas de rang 1 (les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles) donc $A - 2I_3$ de rang 2 donc, par la formule du rang, $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ est de dimension 1 donc A n'est pas diagonalisable.

- On aurait aussi pu, comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer $(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ avec la même conclusion : A n'est pas diagonalisable.

b. Dans la matrice $A - 2I_3$, en notant C_1, C_2, C_3 ses colonnes, on a $C_1 + 3C_2 + C_3 = 0$ donc, comme on sait déjà que $E_2(A)$ est une droite, on a $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1,3,1)$.

c. La matrice $A - I_3$ est de rang 2 donc $\dim(E_1(A)) = 3 - 2 = 1$ par la formule du rang ; on le savait déjà étant donné que 1 est racine simple de χ_A. Comme la somme des deux premières colonnes de $A - I_3$ est nulle, on a $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,1,0)$.

Si on veut effectivement trigonaliser la matrice A, on cherche un vecteur v_3 tel que $Av_3 = 2v_3 + v_2$, ce qui revient à résoudre le système $(A - 2I_3)X = V_2$ ou $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = V_2$ et on trouve sans peine parmi l'infinité de solutions, par exemple $v_3 = (-1,0,1)$. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, comme $\det(P) = 1 \neq 0$, P est inversible donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$. Par formule de changement de base, $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Analyse : soit F un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par A. En notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on peut induire u dans F et on note u_F l'endomorphisme induit. On sait que χ_{u_F} divise χ_u. Ainsi, on n'a que deux possibilités, $\chi_{u_F} = (X-1)(X-2)$ ou $\chi_{u_F} = (X-2)^2$.

- Si $\chi_{u_F} = (X-1)(X-2)$, comme χ_{u_F} est scindé à racines simples, u_F est diagonalisable donc $F = E_1(u_F) \oplus E_2(u_F)$. Or $E_1(u_F) \subset E_1(u)$ et $E_2(u_F) \subset E_2(u)$ donc, par inclusion et égalité des dimensions, $E_1(u_F) = E_1(u) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $E_2(u_F) = E_2(u) = \mathrm{Vect}(v_2)$ donc $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

- Si $\chi_{u_F} = (X-2)^2$, par Cayley-Hamilton, $(u_F - 2\mathrm{id}_F)^2 = 0$ donc $F = \mathrm{Ker}((u_F - 2\mathrm{id}_F)^2)$. Or

$\mathrm{Ker}((u_F - 2\mathrm{id}_F)^2) \subset \mathrm{Ker}((u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2)$ et $(A - 2I_3)^2 = P(T - 2I_3)^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ est de rang 1 (ou directement $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$) donc, par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}((A - 2I_3)^2) = 2$.

Par inclusion et égalité des dimensions, $F = \mathrm{Ker}((u_F - 2\mathrm{id}_F)^2) = \mathrm{Ker}((u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$.

Synthèse : comme on a montré que $u(v_1) = v_1$, $u(v_2) = 2v_2$ et $u(v_3) = 2v_3 + v_2$, les plans $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ sont stables par u.

Il existe donc exactement deux plans stables par A, ce sont $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$.

ORAUX 2023 THÈME 6 THÉORÈMES DE DOMINATION

107 Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $h_n : t \mapsto \dfrac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, $h_n(t) = \dfrac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}} \underset{0}{=} O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ donc h_n est intégrable en 0. Comme on a aussi $h_n(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nt}) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$, par comparaison, h_n est aussi intégrable en $+\infty$. Ainsi, a_n est bien défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelle que soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, h_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_n : t \mapsto nt$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, par changement de variable, en posant $u = nt = \varphi_n(t)$, on a $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}f(u/n)}{\sqrt{u}}du$ par linéarité de l'intégrale. On pose $g_n : u \mapsto \dfrac{e^{-u}f(u/n)}{\sqrt{u}}$ de sorte que $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(u)du$.

- (H_1) Comme f est continue en 0, $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $g : u \mapsto \dfrac{e^{-u}f(0)}{\sqrt{u}}$.
- (H_2) Les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0$, $|g_n(u)| = \dfrac{e^{-u}|f(u/n)|}{\sqrt{u}} \leqslant \dfrac{e^{-u}||f||_{\infty,\mathbb{R}_+}}{\sqrt{u}} = \varphi(u)$ et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}+^*$ car $\varphi(u) \underset{0}{=} O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\Big)$ et $\varphi(u) \underset{+\infty}{=} o(e^{-u})$ comme avant.

Par théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)du = \int_0^{+\infty} g(u)du$ donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)du = f(0)\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = 2f(0)\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv$ en posant $u = \psi(v) = v^2$ avec ψ bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On reconnaît l'intégrale de Gauss et on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)du = f(0)\sqrt{\pi} \neq 0$ par hypothèse d'où, avec le calcul précédent, que $a_n \underset{+\infty}{\sim} f(0)\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme en **a.**, on a $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-u}\sin(u/n)}{\sqrt{u}}du$. Pour pouvoir utiliser $\sin(t)\underset{0}{\sim} t$, on écrit plutôt $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt{u}e^{-u}\sin(u/n)}{(u/n)}du$. On pose $k_n : u \mapsto \dfrac{\sqrt{u}e^{-u}\sin(u/n)}{(u/n)}$ de sorte que, dorénavant, on aura $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty} k_n(u)du$.

- (H_1) Comme $\sin(t)\underset{0}{\sim} t$, $(k_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $k : u \mapsto \sqrt{u}e^{-u}$.
- (H_2) Les fonctions k_n et la fonction k sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0$, $|k_n(u)| = \dfrac{\sqrt{u}e^{-u}|\sin(u/n)|}{(u/n)} \leqslant \sqrt{u}e^{-u} = \psi(u)$ car il est classique que $\forall t > 0,\ |\sin(t)[\leqslant t$ et ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}+^*$ car ψ se prolonge par continuité en 0 en posant $\psi(0) = 0$ et que $\psi(u) \underset{+\infty}{=} o(e^{-(u/2)})$ par croissances comparées.

Par théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} k_n(u)du = \int_0^{+\infty} k(u)du$ donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} k_n(u)du = \int_0^{+\infty}\sqrt{u}e^{-u}du = I$. Par intégration par parties, en posant $a(u) = \sqrt{u}$ et $b(u) = -e^{-u}$, comme a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\lim_{u\to 0^+} a(u)b(u) = \lim_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$, on a

$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après **a.**. Ainsi, si $f = \sin$, $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}$.

108 **a.** Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $f_{p,q} : x \mapsto x^p \ln^q(x)$ est continue sur $]0; 1]$ et $f_{0,q}(x) = (\ln(x))^q \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim_{x \to 0^+} f_{p,q}(x) = 0$ si $p \geqslant 1$ par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, $f_{p,q}$ est intégrable sur $]0; 1]$ donc $I_{p,q}$ existe.

b. Si $q = 0$, alors $I_{p,0} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$. De plus, pour $q \geqslant 1$, on effectue une intégration par parties en posant $u : x \mapsto (\ln x)^q$ et $v : x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0; 1]$ et $\lim_{x \to 0^+} u(x)v(x) = 0$ et $u(1)v(1) = 0$. Ainsi, $I_{p,q} = \int_0^1 f_{p,q}(x)dx = -\frac{q}{p+1} \int_0^1 (\ln x)^{q-1} x^p dx = -\frac{qI_{p,q-1}}{p+1}$.

Alors, pour $p \in \mathbb{N}$, on a $I_{p,q} = -\frac{qI_{p,q-1}}{p+1} = \frac{q}{p+1} \times \frac{(q-1)I_{p,q-2}}{p+1} = \cdots = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} I_{p,0} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$.

c. La fonction $f : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$ est continue sur $]0; 1]$, on a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ car $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées donc f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 1$. Ainsi, $\int_0^1 f(x)dx$ existe car f se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0; 1]$. Comme $x^x = e^{x \ln(x)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p (\ln x)^p}{p!}$ en développant l'exponentielle en série entière, on a $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_{p,p}(x)dx$.

(H_1) La série de fonctions $\sum_{p \geqslant 0} \frac{f_{p,p}}{p!}$ converge simplement vers la fonction f sur $]0; 1]$.

(H_2) Toutes les fonctions $f_{p,p}$ sont continues et intégrables sur $]0; 1]$ (on vient de le voir) et la fonction f est continue sur $]0; 1]$.

(H_3) Pour $p \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |\frac{f_{p,p}}{p!}| = \frac{1}{(p+1)^{p+1}}$ d'après **b.** et la série $\sum_{p \geqslant 0} \int_0^1 |\frac{f_{p,p}}{p!}|$ converge par comparaison aux séries de Riemann car $u_p = \frac{1}{(p+1)^{p+1}} \leqslant \frac{1}{p^2}$ dès que $p \geqslant 1$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0; 1]$ (on le savait déjà) et il vient $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^x dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^{p+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^p}$ après changement d'indice.

109 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{\sin^n(t)}{t}$ est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ par opérations et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 1$ et $f_n(0) = 0$ si $n \geqslant 2$ car $f_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^n}{t} = t^{n-1}$. Ainsi, f_n étant maintenant continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H_1) la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ (attention à $t = \frac{\pi}{2}$),

(H_2) les fonctions f_n et la fonction nulle sont continues sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, comme $\sin(t) \leqslant t$, on a $|f_n(t)| = \frac{\sin(t)}{t} \times \sin^{n-1}(t) \leqslant 1 = \varphi(t)$ et la fonction φ est clairement continue et intégrable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} 0.dt = 0$.

c. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $0 \leqslant \frac{\sin^{n+1}(t)}{t} \leqslant \frac{\sin^n(t)}{t}$, par positivité et croissance de l'intégrale, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et elle tend vers 0 d'après la question précédente. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ converge.

d. Méthode 1 : supposons que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, comme

- (H_1) la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers $S : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t(1-\sin(t))}$ sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ (série géométrique),
- (H_2) les f_n sont continues et intégrables sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ d'après la question précédente et la fonction S est continue sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$,
- (H_3) la série $\sum_{n\geqslant 1}\displaystyle\int_0^{\pi/2}|f_n(t)|dt$ converge par hypothèse

Par le théorème d'intégration terme à terme, S est intégrable sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et on a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} S(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Or $S(t) = \dfrac{\sin(t)}{t(1-\sin(t)} \underset{(\pi/2)^-}{\sim} \dfrac{2}{\pi(1-\sin(t))} = \dfrac{2}{\pi\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)} \underset{(\pi/2)^-}{\sim} \dfrac{4}{\pi\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2}$ car $1-\cos(u)\underset{0}{\sim}\dfrac{u^2}{2}$ donc S n'est pas intégrable en $\dfrac{\pi}{2}$ par RIEMANN. On conclut ce raisonnement par l'absurde, et la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

Méthode 2 : beaucoup plus précis mais pas nécessaire si c'est juste pour répondre à la question de l'énoncé, on peut chercher un équivalent de u_n. On pose $u = \sin^n(t) = \varphi_n(t)$ et φ_n est une bijection C^1 strictement croissante de $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $]0;1]$, ce qui revient à poser $t = \varphi_n^{-1}(u) = \text{Arcsin}(u^{1/n})$ et on a par changement de variable $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{u}{\text{Arcsin}(u^{1/n})}\dfrac{u^{(1/n)-1}}{\sqrt{1-u^{2/n}}}du$. Or $1-u^{2/n} = 1-e^{(2/n)\ln(u)} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{n}\ln(u)$ donc on écrit plutôt $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{u^{(1/n)}}{\text{Arcsin}(u^{1/n})}\dfrac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}du$. Soit $g_n :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(u) = \dfrac{u^{(1/n)}}{\text{Arcsin}(u^{1/n})}\dfrac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- (H_1) Comme $1-u^{2/n} = 1-e^{(2/n)\ln(u)} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{n}\ln(u)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\text{Arcsin}(u^{1/n}) = \dfrac{\pi}{2}$, la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{2}{\pi\sqrt{-\ln(u)}}$ sur $]0;1[$.
- (H_2) Les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $]0;1[$.
- (H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in]0;1[$, $0 < \text{Arcsin}(u^{1/n}) \geqslant u^{1/n}$ et $0 < 1-u^{2/n} = 1-e^{(2/n)\ln(u)} \leqslant -\dfrac{2}{n}\ln(u)$ donc $0 < \dfrac{u^{(1/n)}}{\text{Arcsin}(u^{1/n})}\dfrac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \leqslant 1$ et $|g_n(u)| \leqslant \varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}$. Or φ est continue sur $]0;1[$ où elle est intégrable par RIEMANNcar $\lim\limits_{u\to 0^+}\varphi(u) = 0$ et $\varphi(u) \underset{u\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 g_n(u)du = \int_0^1 g(t)dt = I$. En posant $u = e^{-x} = \psi(x)$, comme ψ est C^1, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0;1[$, on a $I = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \dfrac{2}{\pi\sqrt{-\ln(e^{-x})}}(-e^{-x})dx$ donc $I = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$. On pose $x = v^2$ et, comme $v \mapsto v^2$ est C^1, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $I = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS) donc $I = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi n}}$ et, par comparaison aux séries de RIEMANN, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

110

111 **a.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $g_\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha(1+x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^\alpha}$ et $g_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$. D'après le critère de RIEMANN, g_α est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ et g_α est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $1+\alpha > 1$. Comme g_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si elle l'est sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$ et que g_α est positive, $f(\alpha)$ est définie si et seulement si $\alpha \in]0;1[$. Ainsi, $D =]0;1[$.

b. Soit $h :]0;1[\times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(\alpha, x) = \dfrac{1}{x^\alpha(1+x)}$.

(H_1), pour $x > 0$, $\alpha \mapsto h(\alpha, x)$ est continue sur $]0;1[$.

(H_2), pour $\alpha \in]0;1[$, $g_\alpha : x \mapsto h(\alpha, x)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (vu en **a.**).

(H_3), soit $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b < 1$, $\forall (\alpha, x) \in [a;b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|h(\alpha, x)| = \dfrac{x^{-\alpha}}{1+x} \leqslant \dfrac{x^{-b}}{1+x}$ si $x \in]0;1]$ et $|h(\alpha, x)| \leqslant \dfrac{x^{-a}}{1+x}$ si $x \in [1;+\infty[$. Soit $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,b}(x) = \dfrac{x^{-b}}{1+x}$ si $x \in]0;1]$ et $\varphi_{a,b}(x) = \dfrac{x^{-a}}{1+x}$ si $x \in [1;+\infty[$. Alors $\varphi_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec $\varphi_{a,b}(1) = \dfrac{1}{2}$) et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $]0;1[$.

c. Dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$, on pose $x = \dfrac{1}{t} = \varphi(t)$ avec φ qui est bien C^1, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ pour avoir $f(\alpha) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^{-\alpha}(1+t^{-1})}\Big(-\frac{dt}{t^2}\Big) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^{-\alpha}(1+t^{-1})}\Big(-\frac{dt}{t^2}\Big)$ donc $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)} = f(1-\alpha)$. Ainsi la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \dfrac{1}{2}$.

d. La symétrie précédente suggère que c'est en $\dfrac{1}{2}$ que f atteint une valeur particulière, pourquoi pas son minimum. Soit $\alpha \in D$, alors $f(\alpha) = f(1-\alpha) = \dfrac{f(\alpha)+f(1-\alpha)}{2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{2x^\alpha(1+x)} + \frac{1}{2x^{1-\alpha}(1+x)}\Big) dx$ par linéarité de l'intégrale. On l'écrit $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-(1/2)} + x^{(1/2)-\alpha}}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$ et on se rappelle de l'inégalité classique $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ de sorte que $f(\alpha) \geqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = f(0) = \big[2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})\big]_0^{+\infty} = \pi$. Ainsi, la valeur minimale prise par f sur D est $f(0) = \pi$.

e. Quand α tend vers 0, c'est au voisinage de $+\infty$ qu'il va y avoir un problème. D'après CHASLES, on a $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ est certainement "de l'ordre" de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ et, comme $\dfrac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$, la quantité $f(\alpha)$ se doit d'être assez proche de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}$. Évaluons la différence, $f(\alpha) - \dfrac{1}{\alpha} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)}$. Or on peut encadrer $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \frac{1}{1-\alpha}$ et $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2+\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha} \leqslant 1$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \underset{0}{=} O(1)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)} \underset{0}{=} O(1)$. Par somme, $f(\alpha) - \dfrac{1}{\alpha} \underset{0}{=} O(1) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)$ donc $f(\alpha) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\alpha}$.

112 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{(\ln t)^2}{1+t^2}$. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, que $f(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\Big)$ par croissances comparées.

De plus, on sait que $\forall t \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$ (série géométrique). Ainsi, $\forall t \in]0;1[$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ en posant $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{2n}(\ln(t))^2$. Mais que faire pour $t \in [1;+\infty[$? Un changement de variable !

On écrit $I = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt$ et on pose $t = \frac{1}{u}$ (facile à justifier) dans la seconde intégrale d'où $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt = \int_1^0 \frac{(-\ln u)^2}{1+(1/u)^2}\Big(-\frac{du}{u^2}\Big) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt$. Ainsi $I = 2\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt$ (on intègre sur $]0;1[$).

Par construction, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$. Les f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ car $f_0(t) \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ et les f_n se prolongent par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ par croissances comparées pour $n \geqslant 1$. Elles se prolongent toutes par continuité en 1 avec $f_n(1) = 0$. De plus, f est continue sur $]0;1[$. Pour $n \geqslant 0$, $\int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 (\ln(t))^2 t^{2n}dt = \frac{2}{(2n+1)^3}$ avec deux intégrations par parties (à faire). Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)^3}$ converge, le théorème d'intégration terme à terme nous apprend que f est intégrable sur $]0;1[$ (on le savait déjà) et que $\int_0^1 f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^3}$ donc $I = 4\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \sim 3,87$.

Il se trouve que $I = \frac{\pi^3}{8}$ mais c'est une autre histoire.

113

114

115

116 **a.** Si $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-xt}$. Traitons deux cas :

- si $x \leqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-xt} = +\infty$ donc g_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ n'existe pas.
- si $x > 0$, par croissances comparées, $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-xt} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ donc, par Riemann, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ existe.

Par conséquent, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+^*$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-xt} \geqslant e^{-yt}$ donc $g_x(t) \geqslant g_y(t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geqslant f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$.

(H_1) Pout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Pour $x > 0$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $a > 0$, $(x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\Big|\frac{\partial g}{\partial (}x,t)\Big| = \frac{t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant t^2 a^{-at} = \varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $a > 0$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, avec la formule de Leibniz, $\forall x > 0,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-xt} \geqslant e^{-yt}$ ce qui donne $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \leqslant \frac{\partial g}{\partial x}(y,t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f'(x) \leqslant f'(y)$. Ainsi, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. f est donc une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu mais, plus élémentairement, on majore $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} te^{-xt}dt = \Big[-t\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}dt = \Big[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}$ par une intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\dfrac{e^{-xt}}{x}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

d. La fonction $t \mapsto t^3e^{-xt}$ est continue sur R_+ et $t^3e^{-xt} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées car $x > 0$. Ainsi, $g(x)$ existe. On peut procéder à trois intégrations par parties successives (pour passer de t^3 à t^0) ou, plus simple, poser $t = \dfrac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et avoir $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^3}{x^4}e^{-u}du = \frac{1}{x^4}\Gamma(4) = \frac{3!}{x^4} = \frac{6}{x^4}$.

e. Pour $x > 0$, par linéarité de l'intégrale, on a $|f(x)-g(x)| = \Big|\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} - t^3e^{-xt}\Big)dt\Big|$ qu'on écrit aussi $|f(x)-g(x)| = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}\Big(1-\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\Big)dt = \int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}\Big(\frac{\sqrt{1+t^4}-1}{\sqrt{1+t^4}}\Big)dt$ et, avec la quantité conjuguée, $|f(x)-g(x)| = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3e^{-xt}\Big(\frac{(1+t^4)-1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\Big)dt = \int_0^{+\infty} t^7e^{-xt}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\Big)dt$. Or on minore $\forall t \geqslant 0$, $\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4}) \geqslant 1$ donc $|f(x)-g(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} t^7e^{-xt}dt = \frac{\Gamma(8)}{x^8} = \frac{7!}{x^8}$ comme ci-dessus. On a donc $f(x)-g(x) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^8}\Big) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^4}\Big) \underset{+\infty}{=} o(g(x))$, ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) = \dfrac{6}{x^4}$.

f. Pour $x > 0$, par Chasles, $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} g(x,t)dt + \int_{1/x}^{+\infty} g(x,t)dt \geqslant \int_{1/x}^{+\infty} g(x,t)dt$. Or on peut minorer $\displaystyle\int_{1/x}^{+\infty} g(x,t)dt = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt \geqslant \int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{t^2}dt = \int_{1/x}^{+\infty} te^{-xt}dt$ car $\sqrt{1+t^4} \leqslant t^2$, ce qui permet la minoration effective $\displaystyle\int_{1/x}^{+\infty} g(x,t)dt \geqslant \Big[-t\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_{1/x}^{+\infty} + \int_{1/x}^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{x}dt = \frac{1}{ex^2} + \Big[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\Big]_{1/x}^{+\infty} = \frac{2}{ex^2}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{ex^2} = +\infty$, par encadrement, on obtient finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\boxed{117}$

$\boxed{118}$ **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x(1+t)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $g_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$. D'après Riemann, g_x est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $x < 1$ et g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $1+x > 1$. Ainsi, g_x étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si elle l'est sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x \in]0;1[$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $D =]0;1[$ car pour une fonction continue positive, la convergence ou l'absolue convergence de l'intégrale sont équivalentes.

b. Soit $h :]0;1[\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{1}{t^x(1+t)}$ de sorte que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x,t)dt$.

(H_1) pour $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0;1[$.

(H_2) pour $x \in]0;1[$, $t \mapsto h(x,t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**.

(H_3) soit $0 < a < b < 1$, $\forall (x,t) \in [a;b]\times\mathbb{R}_+^*$, $|h(x,t)| = \dfrac{t^{-x}}{1+t} \leqslant \dfrac{t^{-b}}{1+t}$ si $t \in]0;1]$ et $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{t^{-a}}{1+t}$ si $t \in [1;+\infty[$. Soit $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,b}(t) = \dfrac{t^{-b}}{1+t}$ si $t \in]0;1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = \dfrac{t^{-a}}{1+t}$ si $t \in [1;+\infty[$ et $\forall (x,t) \in [a;b]\times\mathbb{R}_+^*$, $|h(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ d'après ce qui précède. La fonction $\varphi_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec $\varphi_{a,b}(1) = \dfrac{1}{2}$) et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^b}$ avec $b < 1$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{a+1}}$ avec $1+a > 1$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $]0;1[$.

c. Si $x \in]0;1[$, on a clairement $1-x \in]0;1[$. De plus, en effectuant dans $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ le changement de variable $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ est de classe C^1, bijective et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{u^{-x}(1+u^{-1})}\Big(-\frac{du}{u^2}\Big) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-x}(1+u)} = f(1-x)$. Ainsi la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. De plus, $f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \Big[2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})\Big]_0^{+\infty} = \pi$.

d. Méthode 1 : quand x tend vers 0, c'est au voisinage de $t = +\infty$ qu'il va y avoir un problème et que l'intégrale va être grande. Or $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc on approche $f(x)$ par $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{1}{x}$. Évaluons la différence entre ces quantités, $f(x) - \frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)}$.
Or $0 \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{1}{1-x}$ et $0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2+x}} = \frac{1}{1+x} \leqslant 1$. Ainsi, $\int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} \underset{0}{=} O(1)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)} \underset{0}{=} O(1)$. Par somme : $f(x) - \frac{1}{x} \underset{0}{=} O(1) \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{x}\Big)$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

Méthode 2 : on pouvait aussi poser $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est de classe C^1 et une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a la relation $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})}du$. Soit $a :]0;1[\times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $a(x,u) = \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})}$ de sorte que $xf(x) = \int_0^{+\infty} a(x,u)du$.

- (H_1) si $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x \to 0^+} a(x,u) = d(u)$ avec $d(u) = 0$ si $u < 0$, $d(u) = \frac{1}{2}$ si $u = 1$ et $d(u) = \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$.
- (H_2) si $x \in]0;1[$, les fonctions $g_x : t \mapsto g(x,t)$ et d sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_3) si $(x,u) \in]0;1[\times \mathbb{R}_+^*$, on a $|a(x,u)| \leqslant \varphi(u)$ avec $\varphi(u) = 1$ si $u < 1$, $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(u) = \frac{1}{u^2}$ et φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, comme $\lim\limits_{x \to 0^+} xf(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} a(x,u)du$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} xf(x) = \int_0^{+\infty} d(u)du = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \Big[-\frac{1}{u}\Big]_0^{+\infty} = 1$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

119 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ avec un prolongement par continuité $f_x(0) = x$ en 0 car $\mathrm{Arctan}(xt) \underset{0}{\sim} xt$ si $x \neq 0$. De plus, $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^3}\Big)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN ($3 > 1$). Ainsi, g est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

b. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

- (H_1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.
- (H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu).
- (H_3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| = \Big|\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\Big| \leqslant \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ avec φ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x \neq \pm 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} = \frac{x^2(1+t^2)-(1+x^2t^2)}{(x^2-1)(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ en réduisant au même dénominateur, $\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} = \frac{x^2-1}{(x^2-1)(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$.

d. Si on prend $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$, d'après **c.**, $g'(x) = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} \Big) dt$ donc $g'(x) = \frac{x}{x^2-1} \Big[\text{Arctan}(xt) \Big]_0^{+\infty} + \frac{1}{(1-x^2)} \Big[\text{Arctan}(t) \Big]_0^{+\infty}$ et, comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \text{Arctan}(xt) = \frac{\pi}{2}$, cela donne $g'(x) = \frac{x\pi}{2(x^2-1)} + \frac{\pi}{2(1-x^2)} = \frac{(x-1)\pi}{2(x^2-1)} = \frac{\pi}{2(1+x)}$. Comme la fonction g' est continue en 1 d'après **b.**, on a $g'(1) = \lim\limits_{x \to 1} g'(x) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2(1+1)}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$. Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \frac{\pi \ln(1+x)}{2} + \lambda$. Or $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \frac{\pi \ln(1+x)}{2}$.

e. Par imparité de F, on a $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ g(x) = -g(-x) = -\frac{\pi \ln(1-x)}{2}$ d'après **d.**.

120 **a.** La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\text{sh}\,(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\text{sh}\,(x) \underset{0}{\sim} x$ et on a $\text{sh}\,(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x} e^{-x} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$ par croissances comparées ce qui montre que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Ainsi, I existe.

b. Si $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{\text{sh}\,(x)} = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{2xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} = 2xe^{-x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (e^{-2x})^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}$ car $0 < e^{-2x} < 1$ (série géométrique). Soit, pour $n \geqslant 0$, $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = 2xe^{-(2n+1)x}$.

(H_1) $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$ (on en vient).

(H_2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car prolongeable par continuité en 0 par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $n \in \mathbb{N}$, par intégration par parties, en posant $u : x \mapsto 2x$ et $v : x \mapsto -\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)v(x) = u(0)v(0) = 0$, comme f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \Big[-2\frac{e^{-(2n+1)x}}{(2n+1)^2} \Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{(2n+1)^2}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)^2}$ converge par RIEMANN.

Par théorème d'intégration terme à terme, on a f intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et on a la valeur de I car $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

c. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Or $S_{2n+1} = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{S_n}{4} + T_n$. Ainsi, $T_n = S_{2n+1} - \frac{S_n}{4}$ admet une limite finie en $+\infty$ (on le savait déjà) qui vaut $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$. Avec la question précédente, $I = \frac{\pi^2}{4} \sim 2,47$.

121

122 **a.** Clairement, la fonction f_x est continue sur $]0;1[$ et elle est de signe constant sur $]0;1[$: f_x est positive si $x < 0$ et f_x est négative si $x > 0$. De plus, si $x \neq 0$, comme $t^x - 1 = e^{x\ln(t)} - 1$ et que $\lim\limits_{t \to 1^-} \ln(t) = 0$, on a $t^x - 1 \underset{1^-}{\sim} x\ln(t)$ donc $f_x(t) \underset{1^-}{\sim} x$ donc f_x se prolonge par continuité en 1 en posant $f_x(1) = x$. Ainsi, la fonction f_x est toujours intégrable sur le segment $\Big[\frac{1}{2}; 1\Big]$.

- Si $x = 0$, alors $f_0 = 0$ donc f_0 est intégrable sur $]0;1]$.

• Si $x > 0$, $f_x(t) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{\ln(t)}$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(t)} = 0$ donc f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = 0$. f_x est donc intégrable car elle se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$.

• Si $x < 0$, $f_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}\ln(t)}$ donc $f_x(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^{-x}}\Big)$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} \ln(t) = -\infty$ et, d'après RIEMANN, f_x est intégrable sur $]0;1]$ car $-x < 1$.

Ainsi, f_x est intégrable sur $]0;1]$ pour tout réel $x \in D$.

b. Soit $g : D\times]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{t^x - 1}{\ln(t)}$. Alors :

(H_1) $\forall t \in]0;1[$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur D.

(H_2) $\forall x \in D$, la fonction $f_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = t^x$ est continue sur $]0;1[$.

(H_3) Soit $a \in D$, $\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times]0;1[$, $\Big|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\Big| = t^x \leqslant t^a = \varphi_a(t)$ et φ_a intégrable sur $]0;1[$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est C^1 sur D et $\forall x > -1$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x dt = \dfrac{1}{x+1}$.

c. Comme D est un intervalle et que $f(0) = 0$, en intégrant, on a donc $\forall x > -1$, $f(x) = \ln(1+x)$.

123 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{x^2+t^2} dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{x^2} \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ par croissances comparées et $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^{3/2}}\Big)$ donc f_x est intégrable sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Ainsi, $F(x)$ existe pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction F est bien définie.

Soit $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{\ln(t)}{x^2+t^2}$.

(H_1) $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{2x\ln(t)}{(x^2+t^2)^2}$.

(H_2) $\forall x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après ce qui précède et la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall (x,t) \in [a;b]\times\mathbb{R}_+^*$, $\Big|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\Big| = \dfrac{2x|\ln(t)|}{(x^2+t^2)^2} \leqslant \dfrac{2b|\ln(t)|}{(a^2+t^2)^2} = \varphi_{a,b}(t)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{2b|\ln(t)|}{a^4} \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2b|\ln(t)|}{t^4} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Dans $F(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(u)}{1+u^2} du$, on effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{t} = \psi(t)$ avec ψ qui est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ pour avoir $F(1) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \dfrac{\ln(1/t)}{1+(1/t)^2}\Big(-\dfrac{dt}{t^2}\Big)$ donc $F(1) = -F(1)$ et $F(1) = 0$.

Méthode 1 : par la formule de LEIBNIZ et **a.**, on obtient $\forall x > 0$, $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{2x\ln(t)}{(x^2+t^2)^2} dt$ qu'on écrit $F'(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} \times \dfrac{-2t}{(x^2+t^2)^2} dt$ et on pose $u : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{x^2+t^2} - \dfrac{1}{x^2}$ (pour que la fonction v s'annule en 0) de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$. Comme $u(t)v(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^3}$ et $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{-t\ln(t)}{x^2}$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées ce qui montre, par intégration par parties, que $F'(x) = x[u(t)v(t)]_0^{+\infty} - x\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ qu'on écrit $F'(x) = -x\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\ln(t)}{t^2} \times \dfrac{-t^2}{x^2(x^2+t^2)} dt = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\ln(t)}{x(x^2+t^2)} dt = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{x^2+t^2} - \dfrac{F(x)}{x}$ (les deux intégrales convergent). De plus, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} = \left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$ donc $\forall x > 0,\ F'(x) + \frac{F(x)}{x} = \frac{\pi}{2x^2}$. On résout cette équation différentielle classiquement par variation de la constante pour avoir l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi \ln(x)}{2x} + \frac{\lambda}{x}$. Or $F(1) = 0$ donc $\lambda = 0$ et on a $\forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi \ln(x)}{2x}$.

<u>Méthode 2</u> : pour $x > 0$, on effectue le changement de variable $t = ux = \varphi(u)$ avec φ qui est bien une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a donc $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2+x^2u^2} x du$ d'où la relation $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x(1+u^2)} du$ (les deux intégrales convergent comme en **a.**) de sorte que $F(x) = \frac{F(1)}{x} + \frac{\ln(x)}{x}[\operatorname{Arctan}(u)]_0^{+\infty} = \frac{F(1)}{x} + \frac{\pi \ln(x)}{2x}$. Ceci prouve aussi que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ sans théorème de dérivation mais ce n'est pas l'esprit de l'exercice. Comme $F(1) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi \ln(x)}{2x}$.

ORAUX 2023 THÈME 7
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

124 **a.** ($\Longrightarrow$) Supposons que AB est symétrique, alors $AB = (AB)^T = B^T A^T$. Or A et B sont symétriques donc $A^T = A$ et $B^T = B$ ce qui donne $AB = BA$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $AB = BA$, alors $(AB)^T = B^T A^T = BA$ car A et B sont symétriques. Mais comme $AB = BA$, on a $(AB)^T = AB$ donc AB est symétrique.

Par double implication, on a bien AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

b. • Bien sûr, si $n = 1$ toutes les matrices étant symétriques, on ne peut pas trouver de matrices A et B symétriques dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ telles que AB ne soit pas symétrique.

• Si $n = 2$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique, A_2 et B_2 le sont.

• Si $n > 2$, il suffit de poser $A_n = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et on a encore A_n et B_n symétriques alors que $A_nB_n = \begin{pmatrix} A_2B_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

c. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ composée par des vecteurs propres communs à A et B. En posant P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$ et en notant a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B, on a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(a)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(b)$. Par formule de changement de base, $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = P^{-1}AP$ et $D' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = P^{-1}BP$ sont diagonales. Comme D et D' commutent, $AB = (PDP^{-1})(PD'P^{-1}) = PDD'P^{-1} = PD'DP^{-1} = (PD'P^{-1})(PDP^{-1}) = BA$. D'après **a.**, AB est symétrique.

125 **a.** ($\Longleftarrow$) Il est clair que si $M = 0$, on a bien $\big(\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^TMY = 0\big)$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $\big(\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^TMY = 0\big)$. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, prenons $X = E_i$ et $Y = E_j$ (vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathbb{R}^n$), alors $0 = E_i^TME_j = m_{i,j}$ (case (i,j) de la matrice M). Ainsi, $M = 0$.

Par double implication, on a l'équivalence $\big(\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^TMY = 0\big) \Longleftrightarrow (M = 0)$.

b. Pour $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, décomposons $X = X_1 + X_2$ et $Y_1 + Y_2$ avec $(X_1, Y_1) \in (\mathrm{Ker}(P))^2$ et $(X_2, Y_2) \in (\mathrm{Im}\,(P))^2$. On a $X^T(P^T - P)Y = X^TP^TY - X^TPY = (PX)^TY - X^T(PY) = (PX|Y) - (X|PY) = (X_2|Y_1 + Y_2) - (X_1 + X_2|Y_2)$ car $PX = X_2$, $PY = Y_2$ par définition de cette projection orthogonale P qui vérifie $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$ et $\mathrm{Ker}(P) = (\mathrm{Im}\,(A))^{\perp}$. Comme $X_1 \perp Y_2$ et $X_2 \perp Y_1$, il ne reste que $X^T(P^T - P)Y = (X_2|Y_2) - (X_2|Y_2) = 0$. D'après la question précédente, $P^T - P = 0$ donc P est symétrique.

c. Comme $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$ par définition et que $\mathrm{Ker}(I_n - P) = \mathrm{Im}\,(P)$ car P est la matrice d'une projection, on a $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}(I_n - P)$ donc $(I_n - P)A = 0$ ce qui se traduit par $PA = A$.

d. L'application $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{Tr}\,(M^TN)$ est le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le cours. On applique l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ au couple (P, A) et $|(P|A)| = |\mathrm{Tr}\,(P^TA)| \leqslant ||P||\,.\,||A||$ ou, en élevant au carré, $\mathrm{Tr}\,(P^TA)^2 \leqslant ||P||^2||A||^2$. Or P^T et $PA = A$ donc $P^TA = A$ et $||A||^2 = \mathrm{Tr}\,(A^TA)$. De plus, P

étant la matrice dans la base canonique d'une projection p, dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$ où r est la dimension de $\mathrm{Im}\,(p)$, donc le rang de p. D et P représente le même endomorphisme p dans deux bases différentes, donc D et P sont semblables. Comme la trace est un invariant de similitude, $\mathrm{Tr}\,(P^TP) = \mathrm{Tr}\,(P^2) = \mathrm{Tr}\,(P) = \mathrm{Tr}\,(D) = r = \mathrm{rang}\,(p) = \mathrm{rang}\,(A)$ car $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$. Ainsi, $\mathrm{Tr}\,(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \times \mathrm{Tr}\,({}^tAA)$.

e. Il y a égalité dans l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.

Analyse : supposons (A, P) liée, alors $P = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ A = \lambda P$. Or $P = 0$ si et seulement si $A = 0$ car $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(A)$. Dans les deux cas, $A = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et P une projection orthogonale.

Synthèse : si $A = \lambda Q$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et Q une projection orthogonale, traitons deux cas. Si $\lambda = 0$, alors $A = 0$ donc $P = 0$ et (A, P) liée. Si $\lambda \neq 0$, on a $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(Q)$ donc P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(Q)$, comme Q. Ainsi, $P = Q$ et $A = \lambda P$ donc (A, P) liée.

Par double implication, il y a égalité dans $\mathrm{Tr}\,(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \times \mathrm{Tr}\,(A^TA)$ si et seulement si A est le multiple d'une projection orthogonale, c'est-à-dire la composée d'une projection orthogonale et d'une homothétie.

126 **a.** L'application $< ., . >: E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (P, Q) \in E^2,\ < P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est bien définie car la fonction $f : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour $(P, Q) \in E^2$ et que, par croissances comparées, on a $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Cette application est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale), symétrique (par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$) et positive (par positivité de l'intégrale) car $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ pour $P \in E$. De plus, si $P \in E$ tel que $< P, P >= 0$, la fonction $g : t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, ainsi $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 0$ implique $g = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ ce qui prouve que tous les réels positifs t sont racines de P car $e^{-t} > 0$. Comme P admet une infinité de racines, $P = 0$. Ainsi, $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

b. Pour $(i, j) \in [\![0; n]\!]^2$, on a $(B_i|B_j) = \frac{1}{i!j!}(X^i|X^j) = \frac{1}{i!j!}\int_0^{+\infty} t^{i+j}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(i+j+1)}{i!j!}$ et on sait alors que $(B_i|B_j) = \frac{(i+j)!}{i!j!} = \binom{i+j}{i} \neq 0$ si $i \neq j$ donc $\mathcal{B} = (B_0, \cdots, B_n)$ n'est pas une base orthonormale de E.

c. Par la formule de LEIBNIZ, pour un entier $k \in [\![0; n]\!]$, on a $L_k(t) = \frac{(-1)^k}{k!}e^t\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(e^{-t})^{(k-i)}(t^k)^{(i)}$ avec les abus de notations habituels. Comme $(e^{-t})^{(k-i)} = (-1)^{k-i}e^{-t}$ et $(t^k)^{(i)} = \frac{k!}{(k-i)!}t^{k-i}$, on a la relation $L_k = \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\frac{k!}{(k-i)!}X^{k-i} = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i!((k-i)!)^2}X^{k-i}$. Par conséquent, L_k est bien un polynôme de degré k et de coefficient dominant $\frac{1}{k!}$ (pour $i = 0$) tel que $L_k(0) = (-1)^k$ (pour $i = k$). Ainsi, $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_n)$ est une famille de vecteurs de E de degrés échelonnés de 0 à n donc une base de E.

d. Pour $k \in [\![0; n]\!]$, $p \in [\![0; k-1]\!]$, si on pose $u(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)$ et $v(t) = t^p$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées ($u(t)v(t)$ est de la forme $V(t)e^{-t}$ avec V polynomiale). Par intégration par parties dans le produit scalaire $(L_k|X^p) = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{+\infty}\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}t^k)t^p dt$, on a donc la relation $(L_k|X^p) = \frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^p\right]_0^{+\infty} - \frac{(-1)^k p}{k!}\int_0^{+\infty}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^{p-1}dt$. Or la partie "crochet" est nulle par croissances comparées donc $(L_k|X^p) = -\frac{(-1)^k p}{k!}\int_0^{+\infty}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^{p-1}dt$.

Après $p-1$ intégrations par parties du même style, $(L_k|X^p) = \dfrac{(-1)^k}{k!}(-1)^p p! \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}(e^{-t}t^k)dt$ d'où $(L_k|X^p) = \dfrac{(-1)^k}{k!}(-1)^p p! \Big[\dfrac{d^{k-p-1}}{dt^{k-p-1}}(e^{-t}t^k)\Big]_0^{+\infty} = 0$ car $\dfrac{d^{k-p-1}}{dt^{k-p-1}}(e^{-t}t^k)$ est de la forme $t^{p+1}W(t)e^{-t}$ avec W polynomiale. Ainsi $(L_k|X^p) = 0$. Si $0 \leqslant i < k \leqslant n$, $L_i = \sum\limits_{p=0}^{i} \alpha_p X^p$ donc, par bilinéarité du produit scalaire, $(L_k|X^i) = \sum\limits_{p=0}^{i} \alpha_p (L_k|X^p) = 0$ d'après ce qui précède donc la famille est déjà orthogonale.

De même, $(L_k|X^k) = \dfrac{(-1)^k}{k!}(-1)^k k! \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{d^{k-k}}{dt^{k-k}}(e^{-t}t^k)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k dt = k!$. On a vu ci-dessus que $L_k = \dfrac{X^k}{k!} + \sum\limits_{p=0}^{k-1} \alpha_p X^p$ d'où $(L_k|L_k) = \dfrac{(L_k|X^k)}{k!} + \sum\limits_{p=0}^{i} \alpha_p (L_k|X^p) = \dfrac{k!}{k!} = 1$: $\mathcal{L}$ est une base orthonormale de E.

e. L'application $\varphi : P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire non nulle car $\varphi(1) = 1$ donc $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, ainsi $\dim(F) = n+1-1 = n$. Comme $P \in F \iff X|P \iff (\exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P = XQ)$, la famille $(X, X^2, \cdots, X^n)$ est une base de F. Mais $L_k(0) = (-1)^k$ d'après **c.** donc $L_k - (-1)^k \in F$ et la famille de degrés échelonnés $(L_1 + 1, \cdots, L_n - (-1)^n)$ est une base de F. Comme F est un hyperplan, $F^\perp$ est une droite. Si $F^\perp$ est engendrée par $U = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k L_k$, comme $L_0 = 1$ et que $\mathcal{L}$ est une base orthonormale de E, $(U|L_p - (-1)^p) = a_p ||L_p||^2 - (-1)^p a_0 ||1||^2 = a_p - (-1)^p a_0 = 0$ si $p \geqslant 1$: $F^\perp = \mathrm{Vect}(U)$ avec $U = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k L_k$.

f. $d = \underset{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Inf}} \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2 e^{-t} dt = d(1,F)^2 = \dfrac{(1|U)^2}{||U||^2}$ d'après une formule du cours. Or $(1|U) = (1|1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k L_k) = 1$ et $||U||^2 = n+1$ car $(L_0, L_1, \cdots, L_n)$ est une base orthonormale de E. Ainsi, on peut conclure que $d = \underset{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Inf}} \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2 e^{-t} dt = \dfrac{1}{n+1}$.

127

128

129

130

131

132

133 **a.** Par l'absurde, supposons qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que la famille (AX, X) est libre. On peut poser $X_1 = X$, $X_2 = AX$ et compléter la famille libre (X_1, X_2) en une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons P la matrice de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}$. Comme $AX_1 = X_2$, par formule de changement de base, $A = PBP^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$. Ainsi, B est semblable à A et son coefficient $b_{2,1}$ vaut $1 \neq 0$. On a donc montré par l'absurde que si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1}=0$, alors pour tout vecteur colonne $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la famille (AX,X) est liée.

Soit $\mathcal{B}_0=(E_1,\cdots,E_n)$ la base canonique, pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, (AE_k,E_k) est liée donc il existe $\lambda_k\in\mathbb{R}$ tel que $AE_k=\lambda_kE_k$. Or AE_k est la k-ième colonne de A ce qui montre que $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. Pour $k\in[\![2;n]\!]$, de même, il existe un réel μ_k tel que $A(E_1+E_k)=\mu_k(E_1+E_k)$. Or $A(E_1+E_k)=\lambda_1E_1+\lambda_kE_k$ donc, par liberté de (E_1,E_k), on a $\mu_k=\lambda_1=\lambda_k$ et on en déduit que $A=\lambda_1I_n$. Réciproquement, toute matrice de la forme λI_n n'est semblable qu'à elle même ayant un coefficient nul en case $(2,1)$.

Les matrices telles que toute matrice $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1}=0$ sont exactement les matrices scalaires, de la forme λI_n.

b. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que toute matrice $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A est telle que $b_{1,1}=0$. Supposons l'existence d'un vecteur $X_1\neq0$ tel que (AX_1,X_1) est libre. Posons $X_2=AX_1-X_1$, alors la famille (X_1,X_2) est libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{B}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons P la matrice de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}$. Comme $AX_1=X_1+X_2$, par formule de changement de base, $A=PBP^{-1}$ avec $B=\begin{pmatrix}1&*&\cdots&\cdots&*\\1&\vdots&&&\vdots\\0&\vdots&&&\vdots\\\vdots&\vdots&&&\vdots\\0&*&\cdots&\cdots&*\end{pmatrix}$ ce qui contredit l'hypothèse. Par l'absurde, on a donc $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, (AX,X) est liée (même pour $X=0$). Comme ci-dessus, on en déduit que $A=\lambda I_n$. Mais comme $a_{1,1}=0$ car A est semblable à elle-même, on a $\lambda=a_{1,1}=0$ donc $A=0$.

Les matrices telles que toute matrice $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1}=0$ sont exactement les matrices scalaires, de la forme λI_n.

134 La matrice A^TA est symétrique réelle donc, par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P\in O(n)$ et une matrice diagonale $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ sont les valeurs propres) telles que $A^TA=PDP^T$. Comme A^TA est inversible car A l'est, les valeurs propres λ_j sont non nulles (et même strictement positives). Pour $j\in[\![1;n]\!]$, notons X_j la j-ième colonne de P. On sait que les colonnes de P constituent une base orthonormale de E donc $(X_1,\cdots,X_n)$ est une base orthonormale de E. Par formule de changement de base, on a $AX_j=\lambda_jX_j$ et $||AX_j||^2=(AX_j|AX_j)=X_j^TA^TAX_j=X_j^T\lambda_jX_j=\lambda_j||X_j||^2=\lambda_j$ pour $j\in[\![1;n]\!]$ donc $||AX_j||\neq0$ d'où $AX_j\neq0$ et on a comme attendu $\lambda_j=||AX_j||^2>0$.

De plus, si $(j,j')\in[\![1;n]\!]^2$ avec $j\neq j'$, on a $(AX_j|AX_{j'})=X_j^TA^TAX_{j'}=X_j\lambda_{j'}X_j=\lambda_{j'}(X_j|X_{j'})=0$ car $X_j\perp X_{j'}$. La famille $(AX_1,\cdots,AX_n)$ est donc constituée de vecteurs non nuls et orthogonaux, on sait d'après le cours que c'est une base orthogonale de E.

135

136 **a.** Si $A^2=A^T$, alors $A^4=(A^2)^2=(A^T)^2=(A^2)^T=(A^T)^T=A$ donc $X^4-X=X(X^3-1)$ est annulateur de A. Comme A est inversible, $A^4=A$ se simplifie en $A^3=I_2$ donc $P=X^3-1$ est aussi annulateur de A.

b. Mais comme les racines de X^3-1 sont les trois racines cubiques de l'unité, $P=(X-1)(X-j)(X-j^2)$. Les valeurs propres de A étant forcément racines de tout polynôme annulateur de A, $\mathrm{Sp}(A)\subset\{1,j,j^2\}$. De plus, comme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

c. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, on sait d'après le cours que $\det(A) = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$. On sait aussi que les ordres de multiplicité de j et j^2 dans χ_A sont les mêmes car χ_A est un polynôme réel et $j^2 = \bar{j}$. Ainsi, $\det(A) = 1^{m_1(A)}(j \times j^2)^{m_j(A)} = 1$ car $j^3 = 1$.

d. e. Comme $A^3 = I_2$ et $A^2 = A^T$, on a $AA^T = I_2$ donc $A \in O(2)$. Comme $\det(A^3) = \det(A)^3 = \det(I_2) = 1$, on a $\det(A) = 1$ et A est l'une des matrices R_θ du cours. Or $(R_\theta)^3 = R_{3\theta} = I_2$ implique alors $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ donc $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$. Traitons les trois cas :

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $A = I_2$.
- Si $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, on a $A = R_{2\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.
- Si $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$, on a $A = R_{-2\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, ces trois matrices sont bien inversibles et vérifient $AA^T = I_2$ avec $A^3 = I_2$ donc $A^2 = A^T$.

137

138

139 **a.** Soit $X \in \mathbb{R}^n$, en se rappelant que si $U = (u) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $MU = uM$, on a l'équivalence $X \in \mathrm{Ker}(M) \iff (AB^T + BA^T)X = 0 \iff AB^TX + BA^TX = 0 \iff (B|X)A + (A|X)B = 0 \iff (A|X) = (B|X) = 0$ car $A^TX = (A|X)$, $B^TX = (B|X)$ car on a pris implicitement le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ et que (A, B) est libre. Ainsi, $\mathrm{Ker}(M) = (\mathrm{Vect}(A))^\perp \cap (\mathrm{Vect}(B))^\perp = \mathrm{Vect}(A, B)^\perp$.

b. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = n - \dim(\mathrm{Vect}(A, B)) = n - 2$ car (A, B) est libre. Par la formule du rang, on a donc $\mathrm{rang}\,(M) = n - \dim(\mathrm{Ker}(M)) = 2$. Soit $Y \in \mathrm{Im}\,(M)$, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $Y = MX$ donc $Y = (B|X)A + (A|X)B \in \mathrm{Vect}(A, B)$ donc $\mathrm{Im}\,(M) \subset \mathrm{Vect}(A, B)$. Par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}\,(M) = \mathrm{Vect}(A, B)$.

c. Comme $M^T = (AB^T + BA^T)^T = BA^T + AB^T = M$ donc M est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Mieux, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M = PDP^T$.

d. Comme $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(A, B)^\perp \oplus \mathrm{Vect}(A, B)$, en prenant $(V_1, \cdots, V_{n-2})$ une base de $\mathrm{Ker}(M)$, la famille $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_{n-2}, A, B)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, comme $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}\,(M)$ sont stables par M, on a $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 0_{n-2,n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & N \end{pmatrix} = M'$ (par blocs) qui représente la matrice de l'endomorphisme m canoniquement associé à M dans la base $\mathcal{B}$. Comme on a $MA = (AB^T + BA^T)A = (A|B)A + ||A||^2B$ et $MB = (AB^T + BA^T)B = ||B||^2A + (A|B)B$, on connaît $N = \begin{pmatrix} (A|B) & ||A||^2 \\ ||B||^2 & (A|B) \end{pmatrix}$ qui représente la matrice dans (A, B) de l'application induite par m dans $\mathrm{Im}\,(M)$. Ainsi, $\chi_M = \chi_{M'} = X^{n-2}\chi_N = X^{n-2}(X^2 - 2(A|B)X + (A|B)^2 - ||A||^2\,||B||^2) = X^{n-2}\big((X - (A|B))^2 - (||A||\,||B||)^2\big)$. Par identité remarquable, on trouve donc $\chi_M = X^{n-2}(X - (A|B) + ||A||\,||B||)(X - (A|B) - ||A||\,||B||)$ ce qui montre que $\mathrm{Sp}(M) = \{0, (A|B) + ||A||\,||B||, (A|B) - ||A||\,||B||\}$. Ces deux dernières valeurs propres vérifient $(A|B) + ||A||\,||B|| > 0$ et $(A|B) - ||A||\,||B|| < 0$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.

ORAUX 2023 THÈME 8
PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

140

141 **a.** Par construction, $Y_k = \dfrac{X_k+1}{2}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ car $Y_k = 0 \iff X_k = -1$ et $Y_k = 1 \iff X_k = 1$. Ainsi, d'après le cours, par indépendance de $X_1, \cdots, X_n$ donc de $Y_1, \cdots, Y_n$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$. Or $X_k = 2Y_k - 1$ donc $S_n = 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right) - n = 2T_n - n$. Ainsi, comme $T_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, il vient $S_n(\Omega) = \{-n, -(n-2), \cdots, (n-2), n\}$ et, pour la loi de S_n, si $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(S_n = 2k-n) = \mathbb{P}(T_n = k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k} = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$. Par les propriétés classiques de l'espérance et la variance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 0$ et $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n$ car $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes.

b. $(T = 2) = (X_1 = 1, X_2 = -1) \sqcup (X_1 = -1, X_2 = 1)$ donc, par incompatibilité de ces deux évènements et indépendance de X_1 et X_2, $\mathbb{P}(T = 2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$. De même, il vient $\mathbb{P}(T = 4) = \dfrac{1}{8}$ car $(T = 4) = (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = -1, X_4 = -1) \sqcup (X_1 = -1, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = 1)$.

Au bout de $2n+1$ étapes dans cette marche aléatoire, on a forcément $S_{2n+1} = \sum\limits_{k=1}^{2n+1} X_k$ impair car tous les X_k sont impairs, ainsi $(S_{2n+1} = 0) = \emptyset$ donc $(T = 2n+1) = \emptyset$ et $\mathbb{P}(T = 2n+1) = 0$.

c. Soit $x \in]-1;1[$, on a $|p_n x^n| \leqslant |x|^n$ car $p_n \in [0;1]$ donc, comme la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$, par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n x^n$ converge aussi.

d. Pour $n \geqslant 1$, on peut écrire la partition $(S_{2n} = 0) = \bigcup\limits_{k=1}^{n}((S_{2n} = 0) \cap (T = 2k))$ de l'évènement $(S_{2n} = 0)$ en distinguant selon la première fois (notée T) où l'on va avoir $(S_{2k} = 0)$ (on a vu que c'était impossible d'avoir $S_{2k+1} = 0$). Comme ces évènements sont incompatibles, on en déduit la relation suivante : $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_{2n} = 0, T = 2k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{(T=2k)}(S_{2n} = 0)\,\mathbb{P}(T = 2k)$. Clairement, pour tout entier $k \in [\![1;n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}_{(T=2k)}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(S_{2(n-k)} = 0)$ (on repart de 0 après $2k$ "mouvements" et on veut être à 0 au bout de $2n$ étapes). Par contre, comme $(T = 2n) \subset (S_{2n} = 0)$, on a $\mathbb{P}_{(T=2n)}(S_{2n} = 0) = 1$. Ainsi $p_n = q_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}$ car on a posé $p_0 = 1$.

e. La série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} q_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1. Ainsi, si $x \in]-1;1[$, d'après **c.**, on peut effectuer le produit de Cauchy $G_T(x)p(x^2) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n x^{2n}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n x^{2n}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}\right)x^{2n}$ car $\mathbb{P}(T = 2n+1) = 0$ d'après **b.**. Or $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n-k}q_k$ si $n \in \mathbb{N}^*$ car $q_0 = 0$ mais $\sum\limits_{k=0}^{0} p_{n-k}q_k = p_0 q_0 = 0$ alors que $p_0 = 1$. Ainsi, $G_T(x)p(x^2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n x^{2n} = p(x^2) - 1$. Mais $p(x^2) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n x^{2n} \geqslant 1$ car $p_n \geqslant 0$ donc $p(x^2) > 0$ et on a donc $G_T(x) = \dfrac{p(x^2) - 1}{p(x^2)}$.

f. D'après **a.**, comme $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$, il vient $\forall x \in]-1;1[,\ p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n$. Or, on sait ou on retrouve facilement que $\forall y \in]-1;1[,\ \frac{1}{\sqrt{1+y}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}y^n$. On en déduit donc que

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ donc } p(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } G_T(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$ Or on sait aussi que, pour $y \in]-1;1[$, on a le développement en série entière $\sqrt{1+y} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)}y^n$.

Ainsi, pour $x \in]-1;1[,\ G_T = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}x^{2n}$. On identifie car les rayons sont strictement positifs et $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2^{2n}(2n-1)}\binom{2n}{n}$.

D'après le cours, T admet une espérance finie si et seulement si G_T est dérivable en 1. Or $G_T(x) = 1-\sqrt{1-x^2}$ donc G_T n'est pas dérivable en 1 car la fonction racine ne l'est pas en 0. Par conséquent, l'espérance de T est infinie. Pourtant, $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1 - G_T(1)$. Or la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est uniforme sur $[0;1]$ si on note $u_n : x \mapsto \mathbb{P}(T = 2n)x^{2n}$ car $||u_n||_{\infty,[0;1]} = \mathbb{P}(T = 2n)$ et que $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(T = n)$ converge (vers $\mathbb{P}(T < +\infty)$). Ainsi, G_T est continue sur $[0;1]$ car toutes les u_n le sont. Par conséquent, $G_T(1) = \lim_{x\to 1^-} G_T(x) = 1$ et on a donc $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.

T est presque sûrement finie mais admet une espérance infinie. Bizarre.

142 **a.** Si X est une VAD de type 2, comme $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$, on a $|G_X(-1)| = 1$ car :

- soit $r = 1$ et $\mathbb{P}(X = 2k) = 0$ d'où $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k+1) = 1$ donc $G_X(-1) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k+1) = -1$.
- soit $r = 0$ et $\mathbb{P}(X = 2k+1) = 0$ d'où $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = 1$ donc $G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = 1$.

Réciproquement, si $G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k+1) = \mathbb{P}(X \text{ pair}) - \mathbb{P}(X \text{ impair}) = \pm 1$, comme $\mathbb{P}(X \text{ pair}) \in [0;1]$ et $\mathbb{P}(X \text{ impair}) \in [0;1]$:

- soit $G_X(-1) = 1$ donc $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = 1$ et $\mathbb{P}(X \text{ impair}) = 0$ et on a bien $(\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = 2k+1) = 0) : r = 0$.
- soit $G_X(-1) = -1$ donc $\mathbb{P}(X \text{ impair}) = 1$ et $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = 0$ et on a bien $(\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = 2k) = 0) : r = 1$.

Et on a établi que X est de type 2. On a bien l'équivalence annoncée par double implication.

b. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \mathbb{U}_m$. En distinguant selon le reste r de la division euclidienne de n par m, comme $\omega^n = \omega^{qm+r} = \omega^r$, $G_X(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\omega^n = \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = mq + r)\right)\omega^r = \sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])\omega^r$.

- Supposons X d'ordre m. Soit $r \in [\![0; m-1]\!]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ k \not\equiv r\ [m],\ \mathbb{P}(X = k) = 0$. Alors, en sommant, on a $\mathbb{P}(X \equiv r'\ [m]) = 0$ si $r' \in [\![0; m-1]\!]$ et $r' \neq r$. Par conséquent, $G_X(\omega) = \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])\omega^r = \omega^r$ car $\mathbb{P}(X \equiv r\ [m]) = 1$ et on a bien $|G_X(\omega)| = 1$.
- Réciproquement, si $|G_X(\omega)| = 1$, comme $G_X(\omega) = \sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])\omega^r$ on a par inégalité triangulaire $1 = |G_X(\omega)| \leqslant \sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])|\omega^r| = \sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m]) = 1$ donc on a égalité dans l'inégalité triangulaire.

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire montre que $\mathbb{P}(X \equiv 0\ [m])\omega^0, \cdots, \mathbb{P}(X \equiv m-1\ [m])\omega^{m-1}$ sont positivement liés. Mais les m racines m-ièmes $\omega^0, \cdots, \omega^{m-1}$ de l'unité sont non colinéaires, ceci n'est possible que s'il existe $r \in [\![0; m-1]\!]$ tel que $\mathbb{P}(X \equiv r\ [m]) = 1$ et $\mathbb{P}(X \equiv r'\ [m]) = 0$ si $r' \neq r$. X est donc de type m.
Par double implication : X est de type m si et seulement si $\left|G_X\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)\right| = 1$.

c. Si r et r' dans $[\![1; m-1]\!]$ vérifient cette condition, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a soit $k \not\equiv r\ [m]$, soit $k \neq r'\ [m]$ ce qui prouve que $\mathbb{P}(X = k) = 0$. Mais on a alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 0$ contredisant que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ce qui implique $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Ainsi, si r existe, r est bien unique.

d. ($\Longleftarrow$) Si X et Y sont de type m, alors $\left|G_X(\omega)\right| = 1$ et $\left|G_Y(\omega)\right| = 1$ d'après la question **b.**. Ainsi, comme X et Y sont indépendantes, $G_W = G_X G_Y$ donc $\left|G_W(\omega)\right| = \left|G_X(\omega)\right|\left|G_X(\omega)\right| = 1 \times 1 = 1$ et W est de type m.
($\Longrightarrow$) D'après la question **b.**, il vient $\left|G_W(\omega)\right| = 1$ donc $\left|G_X(\omega)\right|\left|G_X(\omega)\right| = 1$. Or on a vu à la question **b.** que $\left|G_X(\omega)\right| \leqslant 1$ et, de même, $\left|G_Y(\omega)\right| \leqslant 1$. Or $\left|G_X(\omega)\right|\left|G_X(\omega)\right| = 1$ donc ces inégalités sont des égalités et $\left|G_X(\omega)\right| = 1$ et $\left|G_Y(\omega)\right| = 1$. Toujours d'après **b.** : X et Y sont donc de type m.
On conclut par double implication que W de type $m \Longleftrightarrow X$ et Y de type m.

e. Avec ces conditions, si $n \not\equiv r(X) + r(Y)\ [m]$, comme $(W = n) = \bigsqcup\limits_{k=0}^{n} (X = k, Y = n-k)$, par indépendance de X et Y, on a $\mathbb{P}(W = n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n-k)$. Pour $k \in [\![0; n]\!]$, on a deux cas :

- si $k \not\equiv r(X)\ [m]$, on a $\mathbb{P}(X = k) = 0$ par définition de $r(X)$ donc $\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n-k) = 0$.
- si $k \equiv r(X)\ [m]$, alors $n - k \equiv n - r(X) \not\equiv r(Y)\ [m]$ par hypothèse donc $\mathbb{P}(Y = n-k) = 0$ par définition de $r(Y)$ donc on a encore $\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n-k) = 0$.

Dans tous les cas, $\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n-k) = 0$ donc $\mathbb{P}(W = n) = 0$ si $n \not\equiv r(X) + r(Y)\ [m]$. C'est la définition de $r(W)$ qui vérifie donc $r(W) \equiv r(X) + r(Y)\ [m]$.

143

144

145

146

147

148 Notons pour toute la suite T_k la variable aléatoire qui est le résultat du tirage d'indice k s'il a lieu. Par construction, $X_n(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$ donc X_n est bornée et admet donc une espérance finie. On suppose bien sûr aussi que chaque boule de l'urne a autant de chance d'être tirée à chaque étape.

a. Bien sûr, si $n = 1$, on vide l'urne en un seul tirage de manière certaine donc $X_1 \equiv 1$ et $\mathbb{E}(X_1) = 1$.
Si $n = 2$, $(X_2 = 1) = (T_1 = 1)$ et $(X_2 = 2) = (T_1 = 2, T_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(T_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(T_1 = 2)\,\mathbb{P}(T_2 = 1 \mid T_1 = 2) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$. Ainsi, par définition, $\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$.

b. Pour $n \geqslant 2$ et $i = 1$, on a $(X_n = 1) = (T_1 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.

Pour $n \geqslant 2$ et $i \in [\![2;n]\!]$, on a $(X_n = i) = \bigsqcup_{j=2}^{n} (T_1 = j, X_n = i)$. Cette réunion étant disjointe, on a donc $\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(T_1 = i)\,\mathbb{P}(X_n = i \mid T_1 = j)$. Or, quand on a tiré la boule j au premier tirage, on enlève les boules numérotées $j, j+1, \cdots, n$ et on se retrouve au point de départ du problème définissant X_{j-1}, une urne contenant les boules numérotées de 1 à $j-1$, avec les mêmes règles, sauf qu'on a déjà effectué un tirage. Ainsi, $\mathbb{P}(X_n = i \mid T_1 = j) = \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1)$. Par conséquent, si $n \geqslant 2$ et $i \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = i-1)$ en posant $k = j-1$.

Alors, $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} i \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = i-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=2}^{n} i\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$ en inversant la somme double. Mais $\mathbb{P}(X_k = i-1) = 0$ dès que $i > k$ donc $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=2}^{k+1} i\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=2}^{k+1} (i-1+1)\,\mathbb{P}(X_k = i-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \big(1 + \mathbb{E}(X_k)\big)$ car $\mathbb{E}(X_k) = \sum_{i=2}^{k+1} (i-1)\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{i=2}^{k+1} \mathbb{P}(X_k = i-1)$. On a donc bien la relation attendue, $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$ si $n \geqslant 2$.

c. <u>Méthode 1</u> : d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_3) = 1 + \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{3}{2}\Big) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. De même, on obtient $\mathbb{E}(X_4) = 1 + \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$. Il semble, surtout avec l'aide de la question supplémentaire, que $\mathbb{E}(X_n) = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà réalisé l'initialisation. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\forall k \in [\![1;n-1]\!]$, $E(X_k) = H_k$, d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}$ donc $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{j} = 1 + \Big(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}\Big) - \frac{n-1}{n} = H_n$. Par principe de récurrence forte, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = H_n$ donc $\mathbb{E}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

<u>Méthode 2</u> : d'après **b.**, pour $n \geqslant 2$, $n\,\mathbb{E}(X_n) = n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$ et $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$ donc $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + n\,\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_n) = (n+1)\,\mathbb{E}(X_n) + 1$ d'où $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n+1}$. Par télescopage, on a donc $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)\big) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n$.

<u>Question supplémentaire</u> : comme $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$, on a la majoration $\forall k \in [\![1;n]\!], \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant f(k) = \frac{1}{k}$ et $\forall k \in [\![2;n]\!]$, $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{k}$. En sommant la première inégalité pour $k \in [\![1;n]\!]$ et par Chasles, on obtient $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Si on fait de même pour la seconde pour $k \in [\![2;n]\!]$, on a $\int_1^{n} \frac{dt}{t} \geqslant H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$. Ainsi, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$. Comme $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) + 1$, par encadrement, on a donc $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

149 **a.** Par définition de X_1X_2, on a $X_1X_2(\Omega) \subset \{-1, 1\}$ et $(X_1X_2 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = 1) \sqcup (X_1 = -1, X_2 = -1)$ donc, par incompatibilité de ces deux évènements et indépendance de X_1, X_2, $\mathbb{P}(X_1X_2 = 1) = p^2 + (1-p)^2$. De même, $(X_1X_2 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = -1) \sqcup (X_1 = -1, X_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1) = 2p(1-p)$.

Si X_1X_2 et X_1 sont indépendantes, on a la relation $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1X_2 = -1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)$. Or $(X_1X_2 = -1, X_1 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = -1)$ donc on a $p(1-p) = 2p(1-p)p$ qui équivaut à $p(1-p)(1-2p) = 0$ donc $p = \frac{1}{2}$ car $p \in]0;1[$. Réciproquement, si $p = \frac{1}{2}$, on a $\mathbb{P}(X_1X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1X_2 = -1) = \frac{1}{4}$. De plus, comme $\forall(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1,1\}^2$, $(X_1 = \varepsilon_1, X_1X_2 = \varepsilon_2) = (X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2)$ car $\frac{1}{\varepsilon_1} = \varepsilon_1$ puisque $\varepsilon_1 \in \{-1,1\}$, on a $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, X_1X_2 = \varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1)\,\mathbb{P}(X_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2) = \frac{1}{4}$ donc $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, X_1X_2 = \varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1)\,\mathbb{P}(X_1X_2 = \varepsilon_2)$, les variables X_1 et X_1X_2 sont indépendantes. Par symétrie entre X_1 et X_2, X_2 et $X_2X_1 = X_1X_2$ le sont aussi.

En conclusion, X_1 et X_1X_2 (resp. X_2 et X_1X_2) sont indépendantes si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

b. Écrivons la loi du couple (X_1, X_2). Pour $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1,1\}^2$, $\big((X_1, X_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\big) = (X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2)$ donc, par indépendance de X_1 et X_2, $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\big) = P(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1)\,\mathbb{P}(X_2 = \varepsilon_2)$ donc $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (1,1)\big) = p^2$, $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (1,-1)\big) = p(1-p)$, $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (-1,1)\big) = p(1-p)$ et $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (-1,-1)\big) = (1-p)^2$.

X_1X_2 et (X_1, X_2) ne sont indépendantes pour aucune valeur de p car $(X_1X_2 = -1, (X_1, X_2) = (1,1)) = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1, (X_1, X_2) = (1,1)) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1)\,\mathbb{P}((X_1, X_2) = (1,1)) = 2p^3(1-p) \neq 0$.

150 **a.** Par construction, $Z_m(\Omega)[\![1;n]\!]$. Soit $k \in [\![1;n]\!]$, on a deux cas :

- si $k \leqslant m$, $(Z_m = k) = \bigsqcup_{i=0}^{m}(X = k, Y = i)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(Z_m = k) = \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}(X = k, Y = i)$ et, puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$ et suivent la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(Z_m = k) = \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = i) = \frac{m}{n^2}$.
- si $k > m$, on a $(Z_m = k) = (Y = k) \cup \Big(\bigsqcup_{i=0}^{m}(X = k, Y = i)\Big)$ (réunion disjointe à nouveau) donc $\mathbb{P}(Z_m = k) = \mathbb{P}(Y = k) + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}(X = k, Y = i)$ et, puisque X et Y sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(Z_m = k) = \mathbb{P}(Y = k) + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{n} + \frac{m}{n^2}$.

b. $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.

Pour $m \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{E}(Z_m) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(Z_m = k) = \sum_{k=1}^{m} k\frac{m}{n^2} + \sum_{k=m+1}^{n} k\Big(\frac{1}{n} + \frac{m}{n^2}\Big)$ d'après **a.**. On en déduit que $\mathbb{E}(Z_m) = \frac{m}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} k = \frac{m}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} k = \frac{mn(n+1)}{2n^2} + \frac{n(n+1)}{2n} - \frac{m(m+1)}{2n}$ donc on l'expression compacte $\mathbb{E}(Z_m) = \frac{(m+n)(n+1) - m(m+1)}{2n}$.

c. Posons $f : x \mapsto (x+n)(n+1) - x(x+1)$ polynomiale sur $\mathbb{R}$ donc dérivable et $f'(x) = n+1-2x-1 = n-2x$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[1; n/2]$ et strictement décroissante sur $[n/2; n]$ donc maximale en $\frac{n}{2}$. Traitons donc deux cas :

- Si n est pair, $n = 2p$ et f est maximale en p donc $\mathbb{E}(Z_m)$ est maximale pour $m_0 = p$ uniquement et $\mathbb{E}(Z_{m_0}) = \mathbb{E}(Z_p) = \frac{5p-2}{4}$ (après calculs).
- Si n est impair, $n = 2p+1$ donc la valeur maximale de $\mathbb{E}(Z_m)$ est soit $\mathbb{E}(Z_p)$, soit $\mathbb{E}(Z_{p+1})$. Or, après calculs toujours, on vérifie que $\mathbb{E}(Z_p) = \mathbb{E}(Z_{p+1}) = \frac{5p^2+7p+2}{2(2p+1)}$ donc $\mathbb{E}(Z_m)$ est maximale

pour les deux valeurs $m_0 = p$ ou $m_0 = p+1$ et $\mathbb{E}(Z_{m_0}) = \dfrac{5p^2+7p+2}{2(2p+1)}$.

151 **a.** Quand on choisit l'urne U_i, la probabilité de tirer une boule blanche est de $\dfrac{i}{p}$, et comme les tirages se font avec remise, ils sont indépendants. Ainsi, la loi de N_p sachant A_i est la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{i}{p}\Big)$. Par conséquent, $\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k) = \dbinom{n}{k}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k}$ pour $i \in [\![0;p]\!]$ et $k \in [\![0;n]\!]$.

b. La variable aléatoire N_p est bornée car $0 \leqslant N_p \leqslant n$ donc elle admet une espérance finie et on a par définition $\mathbb{E}(N_p) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(N_p = k)$. Comme $\{A_0, \cdots, A_p\}$ est un système complet d'évènements, on a $\mathbb{P}(N_p = k) = \sum\limits_{i=0}^{p} \mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)\,\mathbb{P}(A_i)$ par la formule des probabilités totales. Si on suppose que toutes les urnes ont la même chance d'être choisie, $\mathbb{P}(N_p = k) = \sum\limits_{i=0}^{p} \dfrac{\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)}{p+1}$. En reportant, on a donc la relation $\mathbb{E}(N_p) = \dfrac{1}{p+1}\sum\limits_{k=0}^{n} k \sum\limits_{i=0}^{p}\dbinom{n}{k}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k}$. En inversant cette somme double, on obtient $\mathbb{E}(N_p) = \dfrac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\sum\limits_{k=1}^{n} k\dbinom{n}{k}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k}$ qui devient, car $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ et en posant le changement d'indice $j = k-1$, $\mathbb{E}(N_p) = \dfrac{n}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\dfrac{i}{p}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dbinom{n-1}{j}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^j\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-1-j}$. Or, avec le binôme de Newton, on a $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dbinom{n-1}{j}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^j\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-1-j} = \Big(1-\dfrac{i}{p}+\dfrac{i}{p}\Big)^{n-1} = 1$ donc on obtient finalement $\mathbb{E}(N_p) = \dfrac{n}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\dfrac{i}{p} = \dfrac{np(p+1)}{2(p+1)p} = \dfrac{n}{2}$. Rien que de très prévisible car il y a autant de chance en général de tirer des boules blanches ou noires et on tire n en tout.

c. Pour $k \in [\![1;n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}(N_p = k) = \dfrac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\dbinom{n}{k}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k}$ d'après la question précédente donc $\mathbb{P}(N_p = k) = \dbinom{n}{k}\dfrac{p}{p+1}\Big[\dfrac{0^k 1^{n-k}}{p} + \dfrac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k}\Big]$. Comme $f_k : x \mapsto x^k(1-x)^{n-k}$ est continue sur le segment $[0;1]$, et que $\dfrac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k} = \dfrac{1-0}{p}\sum\limits_{i=1}^{p} f\Big(\dfrac{i}{p}\Big)$ est une somme de Riemann associée à cette fonction, par théorème, $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\Big(\dfrac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\dfrac{i}{p}\Big)^{n-k} = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)dx$. Il est clair que $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{p}{p+1} = 1$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{0^k 1^{n-k}}{p} = 0$ donc, par somme et produit, $\lim\limits_{p\to+\infty}\mathbb{P}(N_p = k) = \dbinom{n}{k}\displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$.

152 On suppose l'équiprobabilité d'être dans chacun des étages. On pose l'évènement H_I = "l'homme est dans l'immeuble". D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(H_I) = p$. On pose aussi H_e : " l'homme est à l'étage e'' pour tout $e \in [\![1;7]\!]$. On vient de supposer que $\forall e \in [\![1;7]\!]$, $\mathbb{P}(E_e) = \mathbb{P}(E_1)$. Or, comme $H_I = \bigsqcup\limits_{e=1}^{7} H_e$ (réunion disjointe), on a $\mathbb{P}(H_I) = \sum\limits_{e=1}^{7}\mathbb{P}(H_e)$ donc $\forall e \in [\![1;7]\!]$, $\mathbb{P}(H_e) = \dfrac{p}{7}$. On définit l'évènement A = "l'homme n'est pas dans les six premiers étages". Alors, avec ces notations, $A = \overline{H_I} \sqcup H_7$ donc $\mathbb{P}(A) = (1-\mathbb{P}(H_I)) + \mathbb{P}(H_7) = 1-p+\dfrac{p}{7}$ d'où $\mathbb{P}(A) = 1-\dfrac{6p}{7}$. On demande de calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(H_7)$: probabilité qu'il soit dans l'immeuble sachant qu'il n'est pas dans les six premiers étages. Ainsi, $\mathbb{P}_A(H_7) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap H_7)}{\mathbb{P}(A)}$. Or

$A \cap H_7 = H_7$ donc $\mathbb{P}_A(H_7) = \dfrac{p/7}{1-(6p)/7} = \dfrac{p}{7-6p}$. On constate que si p tend vers 1, $\mathbb{P}_A(H_7)$ tend aussi vers 1 : l'homme est presque sûrement au septième étage ; et que si p tend vers 0, $\mathbb{P}_A(H_7)$ tend vers 0 : l'homme est presque sûrement hors de l'immeuble. C'est rassurant !

153

154 **a.** Par définition, $B = \bigcap_{i=0}^{+\infty} \overline{A_i} \subset \bigcap_{i=0}^{n} \overline{A_i}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ donc, par croissante de la probabilité $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=0}^{n} \overline{A_i}\Big)$. Comme $A_0, \cdots, A_n$ sont indépendants, $\overline{A_0}, \cdots, \overline{A_n}$ le sont aussi et on a donc $\mathbb{P}(B) \leqslant \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i}) = \prod_{i=0}^{n} (1-\mathbb{P}(A_i))$. Or $\forall x < 1,\ \ln(1-x) \leqslant -x$ ce qui donne $\forall x \in [0;1],\ 1-x \leqslant e^{-x}$ (même vrai si $x=1$). Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(B) \leqslant \prod_{i=0}^{n} e^{-\mathbb{P}(A_i)} = \exp\Big(-\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A_i)\Big)$. Que la série $\sum_{i \geqslant 0} \mathbb{P}(A_i)$ converge ou pas, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a $\mathbb{P}(B) \leqslant \exp\Big(-\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\Big)$.

b. Si $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, on a donc $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = +\infty$ (les sommes partielles tendent vers $+\infty$ car c'est une série divergente à termes positifs) donc $\mathbb{P}(B) = 0$.

c. $\mathbb{N} = \{0\} \sqcup \mathbb{N}^*$ donc $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(1.\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(\{0\}) + 1$ par hypothèse donc $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n nombres premiers $p_1, \cdots, p_n$ distincts. On a vu (enfin surtout les ex-MPSI) que pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on avait l'équivalence $(\forall i \in [\![1;n]\!],\ p_i|k) \Longleftrightarrow (\prod_{i=1}^{n} p_i \Big| k)$. Ainsi, $\bigcap_{i=1}^{n} A_{p_i} = A_{p_1 \cdots p_n}$ donc, par hypothèse, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_{p_i}\Big) = \mathbb{P}(A_{p_1 \cdots p_n}) = \dfrac{1}{p_1 \cdots p_n} = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{p_i} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_{p_i})$. Cette relation étant vraie pour tout choix des nombres premiers distincts $p_1, \cdots, p_n$, $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une suite d'évènements indépendants.

e. Posons $B = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}}$, d'après les questions **a.** et **d.**, on a $\mathbb{P}(B) \leqslant \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{p_n})\Big)$. Or $\omega \in B$ s'il n'est le multiple d'aucun nombre premier donc $B = \{0, 1\}$ et on conclut avec **c.** que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{1\})$. Or la série de Bertrand $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n \ln(n)}$ diverge par comparaison série intégrale car une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln(x)}$ qui est continue et décroissante sur $[e; +\infty[$ est $F : x \mapsto \ln(\ln(x))$ qui admet une limite infinie en $+\infty$. Ainsi, avec l'énoncé, $\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(A_{p_n})$ diverge donc, avec **b.**, on a $\mathbb{P}(\{1\}) = 0$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, si on note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent m, si on pose $B_m = \bigcap_{p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_m} \overline{A_p}$, comme avant, puisque $\mathcal{P}_m$ est fini, on trouve encore $\mathbb{P}(B_m) = 0$. Or $m \in B_m$ car m n'est pas un multiple des nombres premiers qui ne divisent par m par définition. Comme $\{m\} \subset B_m$, on a donc $\mathbb{P}(\{m\}) = 0$.

On a donc $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{m\}) = 0$ ce qui est impossible car $\mathbb{N} = \bigsqcup_{m=0}^{+\infty} \{m\}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$. Il n'existe donc aucune probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0;1]$ construite sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, un entier a une probabilité $\dfrac{1}{k}$ d'être une multiple de k.

155 **a.** Par construction, on a $X(\Omega) = [\![2; +\infty]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1; +\infty]\!]$ en convenant que $Y = +\infty$ si on n'obtient jamais pile et $X = +\infty$ si on n'obtient jamais la séquence "pile-face". On a aussi $X \geqslant Y + 1$. En notant l'évènement P_k = " on tombe sur pile au lancer k", on peut écrire, pour des entiers $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 1$ tels que $x > y$, $(X = x, Y = y) = \Big(\bigcap_{i=1}^{y-1} \overline{P_i}\Big) \cap \Big(\bigcap_{i=y}^{x-1} P_i\Big) \cap \overline{P_x}$. On suppose que $(P_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite d'évènements indépendants ce qui montre d'après le cours que $\overline{P_1}, \cdots \overline{P_{y-1}}, P_y, \cdots, P_{x-1}, \overline{P_x}$ le sont aussi ce qui donne $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \prod_{i=1}^{y-1} \mathbb{P}(\overline{P_i}) \times \prod_{i=y}^{x-1} \mathbb{P}(P_i) \times \mathbb{P}(\overline{P_x}) = \frac{1}{2^x}$ car la pièce est équilibrée par hypothèse.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $(Y = +\infty) \subset \bigcap_{y=1}^{n} \overline{P_y}$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(Y = +\infty) \leqslant \frac{1}{2^n}$. Par encadrement, on en déduit bien sûr que $\mathbb{P}(Y = +\infty)$.

b. Soit $x \geqslant 2$, on a $(X = x) = \bigsqcup_{y=1}^{x-1} (X = x, Y = y)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ par σ-additivité. Ainsi, $\mathbb{P}(X = x) = \frac{x-1}{2^x}$. On sait que $\forall t \in]-1;1[$, $\sum_{x=2} t^{x-1} = \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t} - 1$. On dérive à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\forall t \in]-1;1[$, $\sum_{x=2} (x-1)t^{x-2} = \frac{1}{(1-t)^2}$ donc $\forall t \in]-1;1[$, $\sum_{x=2}^{+\infty} (x-1)t^x = \frac{t^2}{(1-t)^2}$. En prenant $t = \frac{1}{2}$, on a $\sum_{x=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x) = 1$ donc, comme $\Omega = (X = +\infty) \sqcup \Big(\bigsqcup_{x=2}^{+\infty} (X = x)\Big)$, il vient $\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{x=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x) = 0$ comme attendu.

c. $\mathbb{E}(X) = \sum_{x=2}^{+\infty} x\, \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x=2}^{+\infty} \frac{x(x-1)}{2^x}$. Or on dérive une autre fois $\forall t \in]-1;1[$, $\sum_{x=2}^{+\infty} (x-1)t^x = \frac{t^2}{(1-t)^2}$ pour avoir $\forall t \in]-1;1[$, $\sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)t^{x-1} = \frac{2t}{(1-t)^3}$ d'où $\forall t \in]-1;1[$, $\sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)t^x = \frac{2t^2}{(1-t)^3}$. Avec $t = \frac{1}{2}$ à nouveau, on a $\mathbb{E}(X) = 4$.

156

157

158 **a.** Si $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0;n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k+1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \alpha \binom{n+1}{k+1}$ si $\alpha = \frac{k+1}{n+1}$.

b. Comme $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$, on a $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ d'après **a.** donc, en posant $m = k+1$, $\frac{a}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \frac{a}{n+1}\Big(\Big(\sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m}\Big) - 1\Big) = \frac{a}{n+1}(2^{n+1} - 1) = 1$ ce qui donne $a = \frac{n+1}{2^{n+1}-1}$.

c. Comme X est bornée, X admet des moments à n'importe quel ordre. Par définition de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^{n+1}-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{k(n+1)}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{2^{n+1}-1} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n+1}{k+1}$. En écrivant $k = (k+1) - 1$, on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2^{n+1}-1} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n+1}{k+1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$ et $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}-1} - \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}-1} = \frac{(n-1)2^n + 1}{2^{n+1}-1}$.

De plus, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2 = \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$ par linéarité de l'espérance. Or, par la formule de transfert, $\mathbb{E}(X(X+1)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)ka}{k+1}\binom{n}{k} = a \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = a \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = an2^{n-1}$. Ainsi, $\mathbb{V}(X) = \frac{n(n+1)2^{n-1}}{2^{n+1}-1} - \frac{(n-1)2^n + 1}{2^{n+1}-1} - \frac{((n-1)2^n+1)^2}{(2^{n+1}-1)^2} = \frac{(n+1)2^{2n} - (n+1)(n+2)2^{n-1}}{(2^{n+1}-1)^2}$.

159 **a.** On a $Y(\Omega) \subset (\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}) \setminus \{1\}$ par construction. Pour $k \geqslant 2$, en notant N_i le numéro du jeton obtenu au tirage i, on a $(Y = k) = \bigcup\limits_{\substack{1 \leqslant a, b \leqslant 3 \\ a \neq b}} (N_1 = a, \cdots, N_{k-1} = a, N_k = b)$ (on tire d'abord tout le temps le numéro a et enfin, au tirage k, on obtient le numéro b). Ces évènements étant incompatibles, comme il y a 6 couples (a, b) possibles, que les N_i sont indépendantes par hypothèse et suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1;3]\!]$, $\mathbb{P}(Y = k) = 6\Big(\prod\limits_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(N_i = a)\Big)\mathbb{P}(N_k = b) = \frac{6}{3^k}$. $(Y \neq +\infty) = \bigcup\limits_{k=2}^{+\infty}(Y = k)$ (réunion incompatible) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(Y \neq +\infty) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{6}{3^k} = \frac{6}{9}\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-2}} = \frac{6}{9} \times \frac{1}{1-(1/3)} = 1$. Comme attendu, on en conclut que $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir deux numéros différents).

b. D'après la question précédente, $(Y-1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y - 1 = k) = \frac{6}{3^{k+1}} = \frac{2}{3} \times \Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-1}$ donc $Y - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. Ainsi, d'après le cours et par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y-1) + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ et $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(Y-1) = \frac{1-(2/3)}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$.

c. Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $\mathbb{P}(Y = m, Z = n) = 0$ si $n \leqslant m$ ou si $m = 1$ par construction. Si $n > m \geqslant 2$, on a $(Y = m, Z = n) = (Y = m, Z - Y = n - m)$ et $Z - Y$ représente le temps d'attente du troisième numéro une fois obtenus les deux premiers. $Z - Y$ et Y sont donc indépendants et $Z - Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ donc $\mathbb{P}(Y = m, Z = n) = \mathbb{P}(Y = m)\,\mathbb{P}(Z - Y = n - m) = \frac{6}{3^m} \times \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-m-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{n-m}}{3^{n-1}}$.

d. Par construction, $Z(\Omega) \subset (\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}) \setminus \{1, 2\}$. Pour $n \geqslant 3$, $(Z = n) = \bigcup\limits_{m=2}^{n-1}(Y = m, Z = n)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(Z = n) = \sum\limits_{m=2}^{n-1} \frac{2^{n-m}}{3^{n-1}} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\sum\limits_{m=2}^{n-1} \frac{1}{2^{m-2}} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} \times \frac{1-(1/2)^{n-2}}{1-(1/2)} = \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$.

À nouveau, $(Z \neq +\infty) = \bigcup\limits_{n=3}^{+\infty}(Z = n)$ donc $\mathbb{P}(Z \neq +\infty) = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} = \frac{4}{9}\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{2^{n-3}}{3^{n-3}} - \frac{2}{9}\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-3}}$ donc $\mathbb{P}(Z \neq 0) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{1-(2/3)} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{1-(1/3)} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$. Comme attendu, on a $\mathbb{P}(Z = +\infty) = 0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir les trois numéros). $\sum\limits_{n \geqslant 3} n\,\mathbb{P}(Z = n)$ converge car, par croissances comparées, $n\,\mathbb{P}(Z = n) = n\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$. Ainsi, $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Z = n) = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$. Or, pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} nx^{n-1} = \Big(\sum\limits_{n=3}^{+\infty} x^n\Big)' = \Big(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2} - 1 - 2x$ en dérivant terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence. En écrivant $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1} - 2\sum\limits_{n=3}^{+\infty} n\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1}$, on a donc $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{(1-(2/3))^2} - 1 - 2(2/3) - 2\Big(\frac{1}{(1-(1/3))^2} - 1 - 2(1/3)\Big) = \frac{11}{2}$.

On pouvait dire, par indépendance de Y et $Z - Y$, que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z - Y) = \frac{5}{2} + 3$ puisque $Z - Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

160 **a.** $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $(Z = k) = \bigsqcup\limits_{i=0}^{k}(X = i,\ Y = k - i)$ donc Z est une variable aléatoire car X et Y le sont. Comme ces évènements sont incompatibles, on a

$\mathbb{P}(Z=k)=\sum\limits_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=k-i)=\sum\limits_{i=0}^{k}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\dfrac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}=\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k}\dbinom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i}=\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k.$
Ceci prouve que $Z=X+Y$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda+\mu$.

b. Si $Z=n$, on a forcément $X\in[\![0;n]\!]$. Soit $k\in[\![0;n]\!]$, calculons $\mathbb{P}(X=k|Z=n)=\dfrac{\mathbb{P}(X=k,Z=n)}{\mathbb{P}(Z=n)}$. Or $(X=k,Z=n)=(X=k,Y=n-k)$ donc, par indépendance de X et Y, en posant $p=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\in]0;1[$, on a $\mathbb{P}(X=k|Z=n)=\dfrac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(Z=n)}=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k e^{-\mu}\mu^{n-k}n!}{k!(n-k)!e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Ainsi, la loi de X sachant $(Z=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(n,\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)$.

161 Considérons la variable aléatoire I donnant le numéro de la boule tirée dans l'urne. Pour $i\in[\![1;n-1]\!]$, on note $J_i=k$ si $I=i$ et k est le numéro du jeton tiré dans la boîte B_i et $J_i=0$ sinon. On note aussi $K_i=k$ si $I=i$ et k est le numéro du jeton tiré dans la boîte B_{i+1} et $K_i=0$ sinon. J_i et K_i sont des variables aléatoires. On voit aussi a et b comme des variables aléatoires.

a. Si $n=2$, $(a=b)=(K_1=1)$ car on tire la boule 1 dans l'urne et on tire le jeton 1 dans la boîte B_1 donc $p_2=\mathbb{P}(a=b)=\mathbb{P}(K_1=1)=\dfrac{1}{2}$ car les tirages dans l'urne et dans les boîtes sont indépendants.

b. Comme $(a=b)=\bigsqcup\limits_{k=1}^{n-1}\Big(\bigsqcup\limits_{i=k}^{n-1}(I=i,J_i=k,K_i=k)$, par incompatibilité des ces évènements, on a $p_n=\mathbb{P}(a=b)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=k}^{n-1}\mathbb{P}(I=i,J_i=k,K_i=k)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=k}^{n-1}\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{i}\times\dfrac{1}{i+1}$ car, par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(I=i,J_i=k,K_i=k)=\mathbb{P}(I=i)\,\mathbb{P}(J_i=k|I=i)\,\mathbb{P}(K_i=k|I=i,J_i=k)$. Ainsi, par télescopage, $p_n=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=k}^{n-1}\Big(\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i+1}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\Big(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{n}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\Big)-\dfrac{1}{n}$. On peut transformer $p_n=\dfrac{1}{n-1}\Big(\Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\Big)-\dfrac{n-1}{n}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\Big(\Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\Big)-1+\dfrac{1}{n}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}\Big)=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k+1}$.
On pouvait dire aussi que $(a=b)=\bigsqcup\limits_{i=1}^{n-1}(I=i,J_i=K_i)$ donc, par incompatibilité de ces évènements, $\mathbb{P}(a=b)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(I=i)\,\mathbb{P}(J_i=K_i|I=i)=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{i+1}$ car seul un jeton parmi les $i+1$ jetons de la boîte B_{i+1} permet d'avoir $a=b$.

c. Pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, la fonction $\ln$ est de classe C^1 sur $[k;k+1]$ donc, par l'égalité des accroissements finis, il existe un réel $c_k\in]k;k+1[$ tel que $\ln(k+1)-\ln(k)=\ln'(c_k)(k+1-k)=\dfrac{1}{c_k}$. Ainsi, comme $k<c_k<k+1$, on a l'encadrement $\dfrac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln(k)<\dfrac{1}{k}$.

d. On somme les inégalités de la question précédente, pour $k\in[\![1;n-1]\!]$ à gauche et pour $k\in[\![2;n]\!]$ à droite, d'où $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k+1}<\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1)-\ln(k))=\ln(n)$ et $\sum\limits_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))=\ln(n+1)-\ln(2)<\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k+1}$.
On obtient donc $\dfrac{\ln(n+1)-\ln(2)}{n-1}<p_n<\dfrac{\ln(n)}{n-1}$. Ainsi, comme $\dfrac{\ln(n+1)-\ln(2)}{n-1}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(n)}{n-1}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(n)}{n}$, par encadrement, on a $p_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(n)}{n}$.

162

163 **a.** X est le nombre de succès dans une répétition de n expériences (obtenir la face 1 au k-ième lancer) de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. D'après le cours, X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. De même, $Y \sim \mathcal{B}(n,q)$. Bien sûr, puisqu'il n'y a que des faces 1, 2 ou 3, en notant Z le nombre de 3 obtenus, on a $Z = n - X - Y$ et $Z \sim \mathcal{B}(n,r)$.

b. Notons, pour un lancer m, L_m le résultat du m-ième lancer. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i+j \leqslant n$, on a $(X=i,Y=j) = \displaystyle\bigsqcup_{\substack{1\leqslant a_1<\cdots<a_i\leqslant n\\ 1\leqslant b_1<\cdots<b_j\leqslant n\\ I=\{a_1,\cdots,a_i\}\cap\{b_1,\cdots,b_j\}=\emptyset}} \Big(\bigcap_{k=1}^{i}(L_{a_k}=1)\Big)\cap\Big(\bigcap_{k=1}^{j}(L_{b_k}=2)\Big)\cap\Big(\bigcap_{k\in[\![1;n]\!]\setminus I}(L_k=3)\Big)$. Par indépendance des L_k, chaque évènement $\Big(\bigcap_{k=1}^{i}(L_{a_k}=1)\Big)\cap\Big(\bigcap_{k=1}^{j}(L_{b_k}=2)\Big)\cap\Big(\bigcap_{k\in[\![1;n]\!]\setminus I}(L_k=3)\Big)$ a pour probabilité $p^iq^jr^{n-i-j}$. Or il y a $\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}$ évènements de ce type, c'est-à-dire de manière de choisir i entiers dans $[\![1;n]\!]$ (les lancers qui vont donner 1) puis j entiers dans les $n-i$ restants (ceux qui vont donner 2), les autres donnant forcément 3.

On trouve donc, si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i+j \leqslant n$, $\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^iq^jr^{n-i-j}$.

c. Comme $(X=n,Y=n)=\emptyset$ car on ne peut pas avoir n fois 1 et n fois 2 en n lancers, $\mathbb{P}(X=n,Y=n)=0$ alors que $\mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=n) = p^nq^n \neq 0$ d'après **a.**. Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

d. Comme $N(\Omega)=\mathbb{N}$, on a aussi $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Pour $i\in\mathbb{N}$, $(X=i) = \displaystyle\bigsqcup_{n=i}^{+\infty}(X=i,N=n)$ car on a forcément $X \leqslant N$. Ces évènements étant incompatibles, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X=i) = \displaystyle\sum_{n=i}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,N=n)$ donc $\mathbb{P}(X=i) = \displaystyle\sum_{n=i}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i|N=n)\,\mathbb{P}(N=n)$. Or, la loi de X sachant $(N=n)$ est la loi binomiale de la question **a.** car on compte le nombre de 1 dans une répétition indépendante de lancers de même loi. Ainsi, $\mathbb{P}(X=i) = \displaystyle\sum_{n=i}^{+\infty}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}p^i\lambda^i}{i!}\sum_{n=i}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-i}(1-p)^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{e^{-\lambda}p^i\lambda^i}{i!}\times e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^i}{i!}$.

Par conséquent, X suit dans ce cas la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. Par symétrie, $Y\sim\mathcal{P}(q\lambda)$.

e. Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $(X=i,Y=j) = \displaystyle\bigsqcup_{n=i+j}^{+\infty}(X=i,Y=j,N=n)$ car on a $X+Y\leqslant N$. À nouveau, par incompatibilité de ces évènements et σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \displaystyle\sum_{n=i+j}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j,N=n)$ donc $\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \displaystyle\sum_{n=i+j}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j|N=n)\,\mathbb{P}(N=n)$. En se servant de la question **b.**, on a donc $\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \displaystyle\sum_{n=i+j}^{+\infty}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^iq^jr^{n-i-j}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}p^iq^j\lambda^{i+j}}{i!j!}\sum_{n=i+j}^{+\infty}\frac{r^{n-i-j}\lambda^{n-i-j}}{(n-i-j)!}$ qui se simplifie en $\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \dfrac{e^{-\lambda}p^iq^j\lambda^{i+j}e^{r\lambda}}{i!j!} = \dfrac{e^{-\lambda(p+q)}p^iq^j\lambda^{i+j}}{i!j!} = \dfrac{e^{-p\lambda}p^i\lambda^i}{i!}\times\dfrac{e^{-q\lambda)}q^j\lambda^j}{j!}$ car $r=1-p-q$. On a donc $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j)$ d'après **d.** donc X et Y sont indépendantes.

ORAUX 2023 THÈME 9 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

164

165 **a.** En posant les matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $N = M^T AM = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, la matrice N est bien symétrique car $(M^T AM)^T = M^T A^T M = N$ puisque $A^T = A$ par hypothèse. Comme N est symétrique, elle peut être décrite par ses coefficients au dessus de la diagonale donc on peut poser $\Phi(M) = (n_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$. En ce sens, Φ peut être considérée de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Par définition du produit matriciel, les coordonnées $n_{i,j}$ dépendent polynomialement (de degré 2) des coordonnées $m_{i,j}$. Ainsi, comme toutes les composantes $n_{i,j}$ sont de classe C^1, Φ est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

b. La différentielle d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ en un point $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, si elle existe, est l'unique application linéaire $d_a f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ telle que $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$.

c. • Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi(I_n+H) - \Phi(I_n) = (I_n+H)^T A(I_n+H) - I_n^T AI_n = A + H^T A + AH + H^T AH - A$ par linéarité de la transposée et en développant le produit. Ainsi, $\Phi(I_n+H) - \Phi(I_n) = H^T A + AH + H^T AH$. L'application $u : M \mapsto H^T A + AH$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$, elle peut donc être vue comme une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ comme ci-dessus.

• Prenons le produit scalaire canonique $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \text{Tr}\,(A^T B) \in \mathbb{R}$ et la norme euclidienne associée $||A||_2 = \sqrt{\text{Tr}\,(A^T A)}$, en notant respectivement $L_i(M)$ et $C_j(M)$ la ligne i et la colonne j de la matrice M, $||AB||_2^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \Big(\sum\limits_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\Big)^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (L_i(A)|C_j(B))^2$. Avec Cauchy-Schwarz, on a l'inégalité $(L_i(A)|C_j(B))^2 \leqslant ||L_i(A)||^2||C_j(B)||^2 = \Big(\sum\limits_{k=1}^n a_{i,k}^2\Big) \times \Big(\sum\limits_{\ell=1}^n b_{\ell,j}^2\Big)$. Ainsi, on a la majoration $||AB||_2^2 \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n} a_{i,k}^2 b_{\ell,j}^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n} a_{i,k}^2 b_{\ell,j}^2 \times \sum\limits_{1\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n} a_{i,k}^2 b_{\ell,j}^2 = ||A||_2^2\,||B||_2^2$. Par conséquent, $||AB||_2 \leqslant ||A||_2\,||B||_2$ (c'est une norme d'algèbre). Ainsi, $||H^T AH||_2 \leqslant ||H^T||\,||AH||_2 \leqslant ||A||_2\,||H||_2^2$ car $||H^T||_2 = ||H||_2$ et on a bien $\Phi(I_n+H) - \Phi(I_n) - u(H) = H^T AH \underset{0}{=} o(||H||_2)$. D'après la définition de la différentielle, on a donc $d_{I_n}\Phi = u$ donc $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d_{I_n}\Phi(H) = H^T A + AH$.

• Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d_{I_n}\Phi(H) = 0 \iff H^T A + AH = 0 \iff H^T A^T = (AH)^T = -AH \iff AH \in A_n(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques) car A est symétrique. Ainsi, $\text{Ker}(d_{I_n}\Phi) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AH \in A_n(\mathbb{R})\}$.

• Comme A est symétrique, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $d_{I_n}\Phi(H) = H^T A + AH = (AH)^T + AH$ est symétrique. Réciproquement, si M est symétrique, comme A est inversible, on peut poser la matrice $H = \dfrac{1}{2}A^{-1}M$ et on a $d_{I_n}\Phi(H) = (AH)^T + AH = \dfrac{M^T}{2} + \dfrac{M}{2} = M$ donc $\text{Im}\,(d_{I_n}\Phi) = S_n(\mathbb{R})$.

d. L'application $f : M \to AM$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car A est inversible (avec $f^{-1} : M \to A^{-1}M$). Comme $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, leurs images réciproques par f le sont aussi. D'après la question précédente, on a $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AH \in A_n(\mathbb{R})\} = f^{-1}(A_n(\mathbb{R}))$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AM \in S_n(\mathbb{R})\} = f^{-1}(S_n(\mathbb{R}))$. Ainsi, $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM \in S_n(\mathbb{R})\}$ et $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

e. La fonction $\det$ est polynomiale donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. On sait d'après le cours qu'alors $\det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ donc il existe par définition une boule ouverte $U = B(I_n, r)$ centrée en I_n et de rayon $r > 0$ telle que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.

166 **a.** Comme $f(a) = 0$, si on avait aussi $f'(a) = 0$, la fonction f et la fonction nulle seraient toutes les deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ avec les mêmes conditions de CAUCHY en a : c'est absurde d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ qui s'applique ici puisque les fonctions p et q sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f'(a) \neq 0$. Puisque f' est continue car f est au moins deux fois dérivable donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que solution de (E), il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta\,;a+\eta],\ f'(x) \neq 0$. Soit $x \in [a-\eta\,;a+\eta] \setminus \{a\}$, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \widetilde{]a;x[} \subset [a-\eta\,;a+\eta]$ tel que $f(x) - f(a) = (x-a)f'(c) = (x-a)f(c) \neq 0$ d'après ce qui précède. On a bien établi que $\forall x \in [a-\eta\,;a+\eta] \setminus \{a\},\ f(x) \neq 0$.

b. Comme f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, par opérations, W est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $t \in \mathbb{R}$, $W'(t) = f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) - f'(t)g'(t) - f''(t)g(t) = f(t)(-p(t)g'(t) - q(t)g(t)) - (-p(t)f'(t) - q't)f(t))g(t)$ donc $W'(t) = -p(t)(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)) = -p(t)W(t)$. Ainsi, W est solution sur $\mathbb{R}$ de $(F)\ :\ y' + py = 0$.

c. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, notons $P : t \mapsto \int_{t_0}^{t} p(u)du$ la primitive de p qui s'annule en t_0, on sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (F) sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-P(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En évaluant en t_0, on a bien sûr $\lambda = W(t_0)$ car $P(t_0) = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = W(t_0)e^{-P(t)}$.

d. Supposons qu'il existe un réel t_1 tel que $W(t_1) = \begin{vmatrix} f(t_1) & g(t_1) \\ f'(t_1) & g'(t_1) \end{vmatrix} = 0$. Alors les colonnes de cette matrice sont liées ce qui montre l'existence de $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda \begin{pmatrix} f(t_1) \\ f'(t_1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g'(t_1) \end{pmatrix} = 0$. Posons $h = \lambda f + \mu g$, comme l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel puisque (E) est linéaire et homogène, la fonction h est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(t_1) = h'(t_1) = 0$. L'unicité de la solution à un problème de CAUCHY montre que $h = 0$. Ainsi, comme $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ et $\lambda f + \mu g = 0$, la famille (f, g) est liée contrairement à l'hypothèse de l'énoncé. Par l'absurde, on en déduit que W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

e. Comme f est continue sur $]a;b[$ et qu'elle ne s'y annule pas, elle y garde un signe constant, supposons par exemple que f est strictement positive sur $]a;b[$. Ainsi, $f'(a) = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$ car $f(x) - f(a) = f(x) > 0$ et $x - a > 0$ si $x \in]a;b[$. De même, $f'(b) \leqslant 0$. Si on avait $f'(a) = 0$, comme en **a.**, f serait la fonction nulle ce qui n'est pas le cas. Plus précisément, on a donc $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

Comme W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par continuité, W garde aussi un signe constant. Ainsi, $W(a) = -f'(a)g(a)$ et $W(b) = -f'(b)g(b)$ sont de même signe, ce qui impose à $g(a)$ et $g(b)$ d'être de signes différents. Par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque g est continue, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g(c) = 0$.

Supposons que g s'annule au moins deux fois sur $]a;b[$, en c et en e et supposons par exemple que $e > c$. Posons $d = \mathrm{Inf}(A)$ avec $A = \{x \in]c;e] \mid g(x) = 0\}$; d existe car A est non vide puisque $e \in A$ et A est minorée par c. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = d$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ g(a_n) = 0$, par continuité de g, on a donc $g(d) = 0$ par passage à la limite. Ainsi, $d = \mathrm{Inf}(A) = \mathrm{Min}(A)$. Par construction, $g(c) = g(d) = 0$ et g ne peut pas s'annuler sur $]c; d[$. Par symétrie des rôles joués par f et g, on a prouvé précédemment que f s'annulait alors sur $]c; d[$, ce qui contredit l'hypothèse faite initialement sur f.

Par l'absurde, on a donc montré que g s'annulait une fois et une seule sur $]a; b[$.

167

168 **a.** Pour $f \in E$, par CHASLES, $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt - e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt$. Comme $g : t \mapsto e^{-t}f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $G : x \mapsto \int_0^x e^{-t}f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de g qui s'annule en 0. En notant $I = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$, on a $F(x) = I\,e^x - e^x G(x)$ donc F est de classe C^1 par opérations.

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = I\,e^x - e^x G(x) - e^x G'(x) = F(x) - e^x g(x) = F(x) - e^x e^{-x} f(x) = F(x) - f(x)$ et on a bien la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = F'(x) + f(x)$.

b. Soit par exemple $f : t \mapsto |t|$, alors $f \in E$ car $g : t \mapsto |t|e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur tout intervalle $[x; +\infty[$. D'après la question **a.**, on ne peut pas avoir $f = \varphi(h)$ pour $h \in E$ car f n'est pas de classe C^1 et $\varphi(h)$ l'est. Par conséquent, φ n'est pas surjective : $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

c. Analyse : soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 0$, on a $\varphi(f) = 0.f = 0$ donc, avec la question **a.**, $f = F' - F = 0$ ce qui est impossible pour un vecteur propre. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de φ ce qui montre que φ est injective.
- Si $\lambda \neq 0$, alors $\varphi(f) = \lambda f$ donc, avec la question **a.**, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda f(x) = \lambda f'(x) + f(x)$ donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $E_\lambda\ :\ y' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} y$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\, e^{\frac{(\lambda-1)x}{\lambda}}$ (car $f \neq 0$). Mais comme $f \in E$, $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ converge pour tout x, or $e^{-t}f(t) = \alpha e^{\frac{-t}{\lambda}}$ ce qui impose $\lambda > 0$.

Synthèse : soit $\lambda > 0$, la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{(\lambda-1)x}{\lambda}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $e^{-t}f(t) = e^{\frac{-t}{\lambda}}$ donc $t \mapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable sur $[x; +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $\lambda > 0$ donc $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ converge. Ainsi, $f \in E \setminus \{0\}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(f)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{\frac{-t}{\lambda}} dt = e^x \left[-\lambda e^{\frac{-t}{\lambda}} \right]_x^{+\infty} = e^x \lambda e^{\frac{-x}{\lambda}} = \lambda f(x)$ donc f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ.

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathbb{R}_+^*$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ avec $f_\lambda : t \mapsto e^{\frac{(\lambda-1)t}{\lambda}}$.

d. Pour $x \in \mathbb{R}$, la nature de $\int_x^{+\infty} e^{-t}f'(t)dt$ est la même que celle de $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ par intégration par parties car les fonctions $u = f$ et $v : t \mapsto e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ car f est bornée sur $\mathbb{R}$. Mais comme $f \in E$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ converge donc $\int_x^{+\infty} e^{-t}f'(t)dt$ converge aussi et, comme f' est continue, ceci assure que $f' \in E$. De plus, par l'intégration par parties précédente, en notant $F = \varphi(f)$ comme avant, $\varphi(f')(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f'(t)dt = e^x \Big(\left[e^{-t}f(t)\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} (-e^{-t})f(t)dt \Big)$ d'où $\varphi(f')(x) = -e^x e^{-x} f(x) + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt = -f(x) + F(x) = F'(x)$ d'après **a.**. On a donc bien $\big(\varphi(f)\big)' = \varphi(f')$.

e. Par intersection de sous-espaces vectoriels, F est un sous-espace vectoriel de E car l'ensemble des fonctions bornées en est un et celui des fonctions de classe C^1 aussi. Soit $f \in F$, on sait d'après la question **a.** que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme $f \in F$, f est bornée sur $\mathbb{R}$ et on peut définir $||f||_{\infty,\mathbb{R}} \in \mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}$, par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|\varphi(f)(x)| = |F(x)| \leqslant e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)|dt$ donc on a la majoration $|F(x)| \leqslant e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}||f||_{\infty,\mathbb{R}}dt = ||f||_{\infty,\mathbb{R}}e^x[-e^{-t}]_x^{+\infty} = ||f||_{\infty,\mathbb{R}}e^xe^{-x} = ||f||_{\infty,\mathbb{R}}$. Ainsi, $\varphi(f) \in F$ ce qui justifie que F est stable par φ. Comme les vecteurs propres de φ_F sont a fortiori des vecteurs propres de φ, et que la fonction f_λ n'est bornée sur $\mathbb{R}$ que si $\lambda = 1$ car f_1 est la fonction constante égale à 1, on en déduit que $Sp(\varphi_F) = \{1\}$. On peut dire aussi que φ_F est 1-lipschitzienne (pour $||\,.\,||_{\infty,\mathbb{R}}$) donc continue.

<u>Question de cours</u> : si les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nx^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_nx^n$ sont respectivement de rayons R et R', alors la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$ avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$ est de rayon $R'' \geqslant \text{Min}(R,R')$ et on a la relation $\forall x \in]-\text{Min}(R,R');\text{Min}(R,R')[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\Big)x^n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\Big) \times \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_nx^n\Big)$.

169 **a.** Le carré $C = [0;1]^2$ est composé de trois morceaux : $C_1 = \{(x,y) \in C \mid x < y\}$, $C_2 = \{(x,y) \in C \mid x > y\}$ et $C_3 = \{(x,y) \in C \mid x = y\}$. C_3 est la diagonale du carré C et constitue la frontière commune entre les adhérences des triangles C_1 et C_2. Comme K est polynomiale sur C_1 et C_2, elle y est continue. Par contre, la définition de K en les points de C_3, $K(x,x) = x(1-x)$, ne permet pas de conclure directement à la continuité de K car il y a des expressions différentes de $K(x,y)$ dans C_1 et C_2.

Soit $(x_0,x_0) \in C_3$ et $(x,y) \in C$. On va majorer $|K(x,y) - K(x_0,y_0)|$ selon (x,y).

- si $(x,y) \in C_3$, on a $y = x$ et $|K(x,y)-K(x_0,y_0)| = |x(1-x)-x_0(1-x_0)| = |x-x_0|.|1-(x+x_0)| \leqslant |x-x_0|$ car $x + x_0 \in [0;2]$ donc $|K(x,y) - K(x_0,y_0)| \leqslant |x - x_0| \leqslant ||(x,y) - (x_0,x_0)||_\infty$.
- si $(x,y) \in C_1$, on a $y > x$ et $|K(x,y)-K(x_0,y_0)| = |x(1-y)-x_0(1-x_0)| = |x-x_0-(x-x_0)y+x_0(x_0-y)|$ donc $|K(x,y) - K(x_0,y_0)| \leqslant |x - x_0| + y|x - x_0| + x_0|y - x_0| \leqslant 3||(x,y) - (x_0,x_0)||_\infty$.
- si $(x,y) \in C_2$, on a $y < x$ et $|K(x,y)-K(x_0,y_0)| = |y(1-x)-x_0(1-x_0)| = |y-x_0-(y-x_0)x+x_0(x_0-x)|$ donc $|K(x,y) - K(x_0,y_0)| \leqslant |y - x_0| + x|x - x_0| + x_0|x - x_0| \leqslant 3||(x,y) - (x_0,x_0)||_\infty$.

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0,\ \forall (x,y) \in C,\ ||(x,y) - (x_0,x_0)||_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow |K(x,y) - K(x_0,x_0)| \leqslant \varepsilon$ et la fonction f est continue en (x_0,x_0) donc en tout point de C_3. D'après ce qui précède, K est continue sur le carré $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

b. La surface S est définie localement autour du point $M_0 = (x_0,y_0,z_0 = K(x_0,y_0))$, comme $(x_0,y_0) \in C_1$, par la relation $S\ :\ z - x(1-y) = z - K(x,y) = f(x,y,z) = 0$. Comme f est de classe C^1 car polynomiale et que, en ce point M_0 de S on a $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0,z_0) = (-1+y_0,x_0,1) \neq (0,0,0)$, le point M_0 est régulier dans S et une équation du plan tangent P en M_0 à S est donnée par $P\ :\ (y_0-1)(x-x_0)+x_0(y-y_0)+(z-z_0) = 0$ qu'on peut simplifier, puisque $z_0 = x_0(1-y_0) = x_0 - x_0y_0$, en $P\ :\ (y_0-1)x + x_0y + z = x_0y_0$. Un vecteur non nul normal à P est d'après le cours le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0,z_0) = (-1+y_0,x_0,1)$.

170 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto t^ne^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\big(e^{-t^2/2}\big) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN et I_n existe.

b. Dans $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}(te^{-t^2})dt$, on effectue une intégration par parties en posant $u : t \mapsto t^{n+1}$ et

$v : t \mapsto -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, $I_{n+2} = 0 + \dfrac{n+1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt = \dfrac{n+1}{2}I_n$.

c. Par parité de $t \mapsto e^{-t^2}$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ donc $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Classiquement, on obtient $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2}I_{2p-2} = \dfrac{2p-1}{2}\times\dfrac{2p-3}{2}I_{2p-4} = \cdots = \dfrac{(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1}{2^p}I_0$ qu'on transforme en $I_{2p} = \dfrac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots.2.1}{(2p)(2p-2)\cdots.2\times 2^p}I_0 = \dfrac{(2p)!}{2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi}$.

Comme $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = \left[-\dfrac{e^{-t^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2}$, de même, $I_{2p+1} = \dfrac{(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{2^p}I_1 = \dfrac{p!}{2}$.

d. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par linéarité de l'intégrale, comme tout converge et que l'intégrale des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ est nulle, on a $\sqrt{\pi}F(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t^4 - 2(x+y)t^3 + 2xyt^2 + (x+y)^2t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2)e^{-t^2}dt$ puis $\sqrt{\pi}F(x,y) = 2I_4 + 2(2xy+(x+y)^2)I_2 + 2x^2y^2I_0 = \dfrac{3}{4}\sqrt{\pi} + (2xy+(x+y)^2)\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} + x^2y^2\sqrt{\pi}$ et enfin $F(x,y) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{2xy+(x+y)^2}{2} + x^2y^2$. Comme F est polynomiale, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car toutes ses dérivées partielles à tout ordre sont encore polynomiales.

e. Comme $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + 2y + x$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2yx^2 + 2x + y$, (x,y) est un point critique pour F si et seulement si $2xy^2 + 2y + x = 2yx^2 + 2x + y = 0$. Ceci équivaut, en faisant la somme et la différence de ces deux relations, à $(2xy+3)(x+y) = (2xy+1)(x-y) = 0$.

- $2xy+3 = 2xy+1 = 0$ est impossible.
- $x+y = x-y = 0$ revient à $x = y = 0$.
- $2xy+3 = x-y = 0$ conduit à $2x^2+3 = 0$ ce qui est impossible car $x \in \mathbb{R}$.
- $2xy+1 = x+y = 0$ conduit à $2x^2 = 1$ et $y = -x$ donc $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On a exactement trois points critiques pour F : $M_1 = (0,0)$, $M_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $M_3 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Les dérivées partielles secondes de F sont $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2+1$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2+1$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) = 4xy+2$.

<u>Au voisinage de $M_1 = (0,0)$</u> : la hessienne de F en $(0,0)$ vaut $H = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique vaut $\chi_H = X^2 - 2X - 3$ qui admet deux racines de signes opposés car $\det(H) = -3$. Ainsi, $(0,0)$ est un point selle pour F. On pouvait le voir en considérant $F(x,0) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{x^2}{2} \geqslant \dfrac{3}{4} = F(0,0)$ et $F(x,-x) = \dfrac{3}{4} - x^2 + x^4$ donc $F(x,-x) - F(0,0) \underset{0}{\sim} -x^2 < 0$ donc est localement négatif au voisinage de 0 ce qui montre que $F(x,-x) \leqslant F(0,0)$ si x est assez petit.

<u>Au voisinage de M_2</u> : la hessienne de F en M_2 vaut $H' = H_f(M_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ qui est clairement définie positive donc F admet en M_2 un minimum local.

<u>Au voisinage de M_3</u> : la hessienne de F en M_3 vaut $H' = H_f(M_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ et on a encore un minimum local pour F en M_3. On pouvait le voir en constatant que $F(-x,-y) = F(x,y)$ donc la surface d'équation $z = F(x,y)$ est invariante par la rotation d'angle π autour de la droite d'équation $x = y = 0$ (axe vertical). Comme M_3 est l'image de M_2 par cette rotation, ce qui se passe au voisinage de M_2 se passe aussi au voisinage de M_3. On a d'ailleurs $F(M_2) = F(M_3) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Mieux, comme $F(x,y)-F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=F(x,y)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2xy+(x+y)^2}{2}+x^2y^2=\frac{(2xy+1)^2}{4}+\frac{(x+y)^2}{2}\geqslant 0$ donc $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ F(x,y)\geqslant F(M_2)=F(M_3)$ donc F admet en M_2 et M_3 un minimum absolu.

171 **a.** Le couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ est fixé. Les solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y''-9y=0$ sont les fonctions $y:x\mapsto Ae^{3x}+Be^{-3x}$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ d'après le cours. Il est clair que les fonctions $f_1:x\mapsto -\frac{ax+b}{9}$ et $f_2:x\mapsto\frac{ax-b}{9}$ sont respectivement solutions particulières de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe d'après ce qui précède quatre scalaires réels A_1,A_2,B_1,B_2 tels que $\forall x>0,\ y(x)=A_1e^{3x}+B_1e^{-3x}-\frac{ax+b}{9}$ et $\forall x<0,\ y(x)=A_2e^{3x}+B_2e^{-3x}+\frac{ax-b}{9}$.

Par continuité de y en 0, $y(0)=\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=A_1+B_1-\frac{b}{9}=\lim\limits_{x\to0^-}y(x)=A_2+B_2-\frac{b}{9}$: $A_1+B_1=A_2+B_2$ (1).
Par continuité de y' en 0, on a $y'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}y'(x)=3A_1-3B_1-\frac{a}{9}=\lim\limits_{x\to0^-}y'(x)=3A_2-3B_2+\frac{a}{9}$ donc $A_1-B_1=A_2-B_2+\frac{2a}{27}$ (2). En additionnant et en soustrayant (1) et (2) : $A_2=A_1-\frac{a}{27}$ et $B_2=B_1+\frac{a}{27}$.
Réciproquement, soit $(A_1,B_1)\in\mathbb{R}^2$ et la fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $y(0)=A_1+B_1-\frac{b}{9}$, par $\forall x>0,\ y(x)=A_1e^{3x}+B_1e^{-3x}-\frac{ax+b}{9}$ et $\forall x<0,\ y(x)=\left(A_1+\frac{a}{27}\right)e^{3x}+\left(B_1-\frac{a}{27}\right)e^{-3x}+\frac{ax-b}{9}$.
Ce qui précède prouve que y est une solution de classe C^∞ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et R_-^*. De plus, comme il vient $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=\lim\limits_{x\to0^-}y(x)=y(0)=A_1+B_1-\frac{b}{9}$: y est continue en 0. $\lim\limits_{x\to0^+}y'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}y'(x)=3A_1-3B_1-\frac{a}{9}$ donc y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0)=3A_1-3B_1-\frac{a}{9}$. Enfin, $\forall x>0,\ y''(x)=9A_1e^{3x}+9B_1e^{-3x}$ et $\forall x<0,\ y''(x)=9\left(A_1-\frac{a}{27}\right)e^{3x}+9\left(B_1+\frac{a}{27}\right)e^{-3x}$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}y''(x)=\lim\limits_{x\to0^-}y''(x)=9A_1+9B_1$ et y est donc deux fois dérivable en 0 (théorème de prolongement C^1 appliqué à y') avec $y''(0)=9A_1+9B_1$. Ainsi $y''(0)+y(0)=9A_1+9B_1-9\left(A_1+B_1-\frac{b}{9}\right)=b=a|0|+b$. Finalement, y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $(A_1,B_1)\in\mathbb{R}^2$, $y(0)=A_1+B_1-\frac{b}{9}$, $\forall x>0,\ y(x)=A_1e^{3x}+B_1e^{-3x}-\frac{ax+b}{9}$ et $\forall x<0,\ y(x)=\left(A_1+\frac{a}{27}\right)e^{3x}+\left(B_1-\frac{a}{27}\right)e^{-3x}+\frac{ax-b}{9}$.

b. Si une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ a l'expression ci-dessus, pour que y admette une asymptote en $+\infty$, il est clair qu'il est nécessaire et suffisant qu'on ait $A_1=0$ et pour que y admette une asymptote en $-\infty$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait $B_1-\frac{a}{27}=0$. Ainsi, la fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $y(0)=\frac{a}{27}-\frac{b}{9}$, $\forall x>0,\ y(x)=\frac{a}{27}e^{-3x}-\frac{ax+b}{9}$ et $\forall x<0,\ y(x)=\frac{a}{27}e^{3x}+\frac{ax-b}{9}$ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ dont le graphe possède des asymptotes en $\pm\infty$, respectivement les droites d'équations $y=-\frac{ax+b}{9}$ et $y=\frac{ax-b}{9}$.

172 **a.** $\forall t\in I,\ w(t)=\begin{vmatrix}\varphi(t)&\psi(t)\\\varphi'(t)&\psi'(t)\end{vmatrix}=\varphi(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi(t)$. Comme φ et ψ sont deux fois dérivables sur I par hypothèse, w est dérivable sur I et on a $\forall t\in I,\ w'(t)=\varphi'(t)\psi'(t)-\varphi''(t)\psi(t)+\varphi(t)\psi''(t)-\varphi'(t)\psi'(t)$ donc $w'(t)=-\big(a(t)\varphi'(t)+b(t)\varphi(t)\big)\psi(t)+\varphi(t)\big(a(t)\psi'(t)+b(t)\psi(t)\big)=a(t)w(t)$. Ainsi, la fonction w est solution sur I de l'équation $(F)\ :\ y'=ay$.
b. Si φ ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{\psi}{\varphi}$ est bien définie et dérivable sur I et on a $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'=\frac{\psi'\varphi-\psi\varphi'}{\varphi^2}=\frac{w}{\varphi^2}$.
c. Supposons qu'il existe une fonction y développable en série entière qui soit solution de l'équation (E), alors $\exists R>0,\ \forall t\in]-R;R[,\ y(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$. Alors, par théorème, $\forall t\in]-R;R[,\ y'(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}t^n$

et $\forall t \in]-R;R[,\ y''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}t^{n-1}$ donc $ty''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}t^n$.

Ainsi, $\forall t \in]-R;R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\big(2(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_n\big)t^n = 0$ et par unicité des coefficients (comme $R > 0$), on parvient à la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(2n+1)a_{n+1} = a_n$.

Réciproquement, si $a_0 \in \mathbb{R}^*$ et si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie cette propriété, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ est infini par D'Alembert car $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, et les calculs précédents montrent que $\forall t \in \mathbb{R},\ 2ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$ donc y ainsi définie est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Pour $n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \times \frac{a_{n-2}}{(n-1)(2n-3)} = \cdots = \frac{a_0}{n(2n-1)(n-1)(2n-3)\cdots 1.1}$. En rajoutant au dénominateur les termes pairs qui manquent $a_n = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2.a_0}{n!(2n)!} = \frac{2^n}{(2n)!}a_0$.

Ainsi, les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) et développables en série entière sont proportionnelles à la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n t^n}{(2n)!}$. Il existe donc une unique fonction φ solution de (E), développable en série entière et vérifiant $\varphi(0) = 1$, il s'agit de $\varphi : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n t^n}{(2n)!}$.

On distingue selon le signe de t :

- si $t \geqslant 0$, on a $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2t})^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}\,(\sqrt{2t})$.
- si $t \leqslant 0$, on a $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n(\sqrt{-t})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-2t})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-2t})$.

On vient de voir que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) et qui sont développables en série entière constitue une droite $\mathrm{Vect}(\varphi)$.

d. Comme (E) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sous forme normalisée sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, on sait que l'ensemble de ses solutions sur chacun de ces deux intervalles est un plan. On se sert du wronskien pour trouver une autre solution non proportionnelle à φ.

<u>Sur $\mathbb{R}_+^*$</u> : soit $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, comme φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait d'après la question **b.** que $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{w}{\varphi^2}$. Ici, $w' = -\frac{w}{2t}$ donc $w : t \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{t}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{\lambda}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t})^2}$. On reconnaît, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, $\frac{\psi}{\varphi} = \sqrt{2}\lambda\,\mathrm{th}\,(\sqrt{2t}) + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. Comme on veut ψ non proportionnelle à φ, on peut prendre $\mu = 0$ et $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour avoir $\psi(t) = \mathrm{th}\,(\sqrt{2t})\varphi(t) = \mathrm{sh}\,(\sqrt{2t})$. Par théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $t \mapsto a\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t}) + b\mathrm{sh}\,(\sqrt{2t})$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, soit $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $z(u) = y\left(\frac{u^2}{2}\right)$ d'où $y(t) = z(\sqrt{2t})$. Par composition, z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $z'(u) = uy'\left(\frac{u^2}{2}\right)$ et $z''(u) = y'\left(\frac{u^2}{2}\right) + u^2 y\left(\frac{u^2}{2}\right)$. Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ équivaut à $\forall t > 0,\ 2ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$ ou, en changeant de variable, à $\forall u > 0,\ u^2 y''\left(\frac{u^2}{2}\right) + y'\left(\frac{u^2}{2}\right) - y\left(\frac{u^2}{2}\right) = z''(u) - z(u) = 0$. Or $z'' = z$ si et seulement si z est combinaison linéaire de ch et sh et on retrouve bien les solutions ci-dessus.

<u>Sur $\mathbb{R}_-^*$</u> : $y : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, soit $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $z(u) = y\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ ce qui revient à $y(t) = z(\sqrt{-2t})$. Par composition, z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $z'(u) = -uy'\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ et $z''(u) = -y'\left(\frac{u^2}{2}\right) + u^2 y\left(\frac{u^2}{2}\right)$. Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ équivaut à $\forall t < 0,\ 2ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$

ou, en changeant de variable, à $\forall u > 0,\ -u^2y''\Big(-\frac{u^2}{2}\Big) + y'\Big(-\frac{u^2}{2}\Big) - y\Big(-\frac{u^2}{2}\Big) = -z''(u) - z(u) = 0$. Or $z'' + z = 0$ si et seulement si z est combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$ et les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les $t \mapsto a\cos(\sqrt{-2t}) + b\sin(\sqrt{-2t})$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

e. Analyse : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de (E). D'après la question précédente, il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall t > 0,\ y(t) = a\text{ch}\,(\sqrt{2t}) + b\text{sh}\,(\sqrt{2t})$ et $\forall t < 0,\ y(t) = c\cos(\sqrt{-2t}) + d\sin(\sqrt{-2t})$. La continuité de y en 0 prouve que $a = c$ avec $y(0) = a = c$. La dérivabilité de y en 0 impose $b = d = 0$ car, par exemple, si $t > 0$, $\frac{y(t)-y(0)}{t} = \frac{a(\text{ch}\,(\sqrt{2t}) + b\text{sh}\,(\sqrt{2t})}{t} \underset{0}{\sim} \frac{`b\sqrt{2}}{\sqrt{t}}$ qui tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers 0^+. Ainsi, $y = a\varphi$.

Synthèse : si on pose $y = a\varphi$, on a vu en question **c.** que y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions proportionnelles à φ.

173 **a.** Clairement, $y : x \mapsto x^2$ est une solution polynomial de (E_0). Si on ne la voit pas, en notant n le degré d'une solution polynomiale $y : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ de (E_0) avec $a_n \neq 0$, en identifiant les termes en x^n dans (E_0), on a $n(n-1)a_n - 2a_n = 0$ donc, comme $a_n \neq 0$, il vient $n(n-1) - 2 = n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1) = 0$ donc $n = 2$ car $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, s'il existe une solution polynomiale de (E_0), elle est forcément de degré 2. Ensuite, en notant $y(x) = ax^2 + bx + c$ et en reportant dans (E_0), il reste $\forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 - 2(ax^2+bx+c) = -2bx - c = 0$ donc $b = c = 0$ et on a bien $y(x) = ax^2$.

b. C'est la méthode de Lagrange. Si on se donne une fonction v de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, en posant $z(x) = \frac{v(x)}{x^2}$, la fonction z est aussi de classe C^2 et $v(x) = x^2z(x)$ donc $v'(x) = 2xz(x) + x^2z'(x)$ puis $v''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2z''(x)$. Ainsi, v est solution de (E_0) sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $\forall x \in I,\ 2x^2z(x) + 4x^3z'(x) + x^4z''(x) - 2x^2z(x) = 0$ ou encore $(F)\ :\ xz''(x) + 4z'(x) = 0$. Classiquement, z' vérifie $(G)\ : xw' + 4w = 0$ sur I si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ z'(x) = \frac{\lambda}{x^4}$ et les solutions de (F) sont donc les fonctions $z : x \mapsto \frac{\alpha}{x^3} + \beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on trouve donc $z(x) = \frac{1}{x^3}$ donc $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ et elle est bien indépendante de u.

c. Comme l'équation (E_0) est linéaire, homogène et normalisée , d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'espace vectoriel de ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ est de dimension 2, il est donc engendrée par u et v d'après les deux questions précédentes. Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont donc les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

On constate comme en **a.** que $y_p : x \mapsto \frac{x^3}{4}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Par structure affine des solutions, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

d. Analyse : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, ainsi y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Les restrictions de y à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les solutions vues en **c.** donc il existe $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x < 0,\ y(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \beta_1x^2 + \frac{x^3}{4}$ et $\forall x > 0,\ y(x) = \frac{\alpha_2}{x} + \beta_2x^2 + \frac{x^3}{4}$. En prenant $x = 0$ dans (E), on a $y(0) = 0$. La continuité de y en 0 implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Alors on a $y'(0) = 0$ (par taux d'accroissements par exemple) et $\forall x < 0,\ y'(x) = 2\beta_1x + \frac{3x^2}{4}$ et $\forall x > 0,\ y'(x) = 2\beta_2x + \frac{3x^2}{4}$.

Synthèse : Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \beta x^2 + \dfrac{x^3}{4}$, alors y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$ car $y''(x) = 2\beta + \dfrac{3}{2}x$ donc $x^2 y''(x) - y(x) = 2\beta x^2 + \dfrac{3}{2}x^3 - 2\beta x^2 - \dfrac{x^3}{2} = x^3$.

Conclusion : les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y : x \mapsto \beta x^2 + \dfrac{x^3}{4}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. C'est un sous-espace affine de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, écrit $S = y_p + \mathrm{Vect}(y_0)$ avec $y_p : x \mapsto \dfrac{x^3}{4}$ et $y_0 : x \mapsto x^2$. S est une droite affine.