

# CHAPITRE 0

## CLASSE PRÉPARATOIRE PSI

### PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

#### TABLE DES MATIÈRES

- 1 : objectifs de formation .....	page 2
- 2 : description et prise en compte des compétences .....	page 3
- 3 : unité de la formation scientifique .....	page 4
- 4 : architecture et contenu du programme.....	page 5
- 5 : organisation du texte .....	page 6

# PRÉAMBULE

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration ; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

## PARTIE 0.1 : OBJECTIFS DE FORMATION

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique: analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

## **PARTIE 0.2 : DESCRIPTION ET PRISE EN COMPTE DES COMPÉTENCES**

### **Chercher**

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

### **Modéliser**

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

### **Représenter**

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

### **Raisonner, argumenter**

La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

### **Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique**

Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.

Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

### **Communiquer à l'écrit et à l'oral**

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

## **PARTIE 0.3 : UNITÉ DE LA FORMATION SCIENTIFIQUE**

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la théorie des équations différentielles utilise des concepts et des résultats développés en algèbre linéaire ; le calcul différentiel et l'optimisation exploitent en outre les endomorphismes autoadjoints ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et les familles sommables, et illustrent certains résultats d'analyse.

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

## **PARTIE 0.4 : ARCHITECTURE ET CONTENU DU PROGRAMME**

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme d'algèbre comprend deux sections. La première prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année et combine les points de vue géométrique (éléments propres), algébrique (polynômes d'endomorphisme) et matriciel pour aboutir à une solide étude de la réduction : diagonalisation, trigonalisation. La deuxième, après quelques généralités sur les espaces préhilbertiens et le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, étudie, dans le cadre euclidien, les isométries vectorielles et les endomorphismes autoadjoints (théorème spectral), et introduit les endomorphismes autoadjoints positifs en vue de l'optimisation.

La topologie est étudiée dans le cadre général des espaces vectoriels normés. Son étude permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, et de mettre en évidence quelques aspects de la dimension finie : équivalence des normes, théorème des bornes atteintes pour les fonctions continues sur les fermés bornés, continuité des applications linéaires et polynomiales.

Après quelques compléments sur les séries numériques, la section sur les suites et séries de fonctions étudie divers modes de convergence et établit des résultats de régularité pour les limites de suites ou les sommes de séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires et pour les probabilités au travers des fonctions génératrices.

La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable.

Les théorèmes sur l'intégration des suites et séries de fonctions (convergence dominée, intégration terme à terme) et sur les intégrales à paramètre concluent cette section.

La section sur les variables aléatoires discrètes propose une introduction à minima de la dénombrabilité et des familles sommables en appui des notions générales de la théorie des probabilités, afin d'étendre l'étude menée en première année des variables aléatoires finies, ce qui permet d'élargir le champ des situations se prêtant à une modélisation probabiliste.

La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de BERNOULLI, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants.

Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

L'étude des équations différentielles est limitée au cas des équations linéaires d'ordre 2, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de CAUCHY permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'analyse. Le programme permet aussi, en liaison avec la réduction, de traiter des exemples d'équations ou de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

On donne quelques éléments sur la dérivabilité des fonctions vectorielles, les courbes paramétrées en fournissant une interprétation.

La section sur les fonctions de plusieurs variables est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et à la géométrie. Elle s'achève par une étude au second ordre des extremums qui s'appuie sur les matrices symétriques.

## **PARTIE 0.5 : ORGANISATION DU TEXTE**

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

Le programme est décliné en plusieurs sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.

En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant "hors programme". Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution "démonstration non exigible", le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.