CHAPITRE 2
ALGÈBRE BILINÉAIRE

PARTIE 2.1 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

DÉFINITION 2.1 :
Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$*, on dit que* φ *est un* **produit scalaire** *sur* E *si* φ *est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur* E*, c'est-à-dire si :*

- $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(u,v,w)\in E^3,\ \begin{cases}\varphi(\alpha u+\beta v,w)= & \alpha\varphi(u,w)+\beta\varphi(v,w)\\ \varphi(u,\alpha v+\beta w)= & \alpha\varphi(u,v)+\beta\varphi(u,w)\end{cases}$ *(bilinéarité).*
- $\forall(u,v)\in E^2,\ \varphi(u,v)=\varphi(v,u)$ *(symétrie).*
- $\forall u\in E, \varphi(u,u)=q(u)\geqslant 0$ *(positivité).*
- $\forall u\in E, \varphi(u,u)=q(u)\geqslant 0$ et $\varphi(u,u)=q(u)=0\Longrightarrow u=0_E$ *(aspect défini).*

Un **espace préhilbertien réel** *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

<u>*REMARQUE 2.1*</u> *: On note souvent* $(u|v)=\varphi(u,v)$*, ou* $u.v$ *(en géométrie) ou* $\langle u,v\rangle$ *le produit scalaire.*

THÉORÈME 2.1 :
Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $(\,.\,|\,.\,)$. Alors l'application $x\in E\mapsto ||x||=\sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E appelée norme euclidienne associée à $(\,.\,|\,.\,)$:

(i) $\forall x\in E,\ ||x||\geqslant 0$ **(positivité),**

(ii) $\forall x\in E,\ ||x||=0\Longleftrightarrow x=0_E$ **(séparation),**

(iii) $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{R}\times E,\ ||\lambda x||=|\lambda|\,||x||$ **(homogénéité),**

(iv) $\forall(x,y)\in E^2,\ ||x+y||\leqslant||x||+||y||$ **(inégalité triangulaire ou de MINKOWSKI).**

De plus : $||x+y||=||x||+||y||\Longleftrightarrow\big(\exists\lambda\in\mathbb{R}^+,\ x=\lambda y$ **ou** $y=\lambda x\big)$ (x **et** y **sont positivement liés).**

THÉORÈME 2.2 :
Soit E un espace préhilbertien réel et $(u,v)\in E^2$:

- $|(u|v)|\leqslant||u||\times||v||$ **(CAUCHY-SCHWARZ) et** $|(u|v)|=||u||\times||v||\Longleftrightarrow(u,v)$ **est liée.**
- $(u|v)=\dfrac{1}{2}\big(||u+v||^2-||u||^2-||v||^2\big)=\dfrac{1}{2}\big(||u||^2+||v||^2-||u-v||^2\big)$ **(identités de polarisation).**
- $(u|v)=\dfrac{1}{4}\big(||u+v||^2-||u-v||^2\big)$ **(identité de polarisation).**
- $||u+v||^2+||u-v||^2=2\big(||u||^2+||v||^2\big)$ **(identité du parallélogramme).**

<u>*REMARQUE 2.2*</u> *: L'inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ *nous permet de définir l'angle non orienté* $\theta\in[0;\pi]$ *entre deux vecteurs non nuls* u *et* v *de* E *par :* $\theta=\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{(u|v)}{||u||\,||v||}\right)$.

DÉFINITION 2.2 :
Soit $\big(E,(\,.\,|\,.\,)\big)$ *un espace préhilbertien réel et* $(u,v)\in E^2$*, on dit que :*

- u *est* **unitaire** *(ou normé) si* $||u||=1$.
- u *et* v *sont* **orthogonaux** *si* $(u|v)=0$ *; on le note* $u\perp v$.

REMARQUE 2.3 : Si $x\neq 0_E$ *alors le vecteur* $\dfrac{x}{||x||}$ *est toujours unitaire.*

DÉFINITION 2.3 :
Soit $\big(E,(\,.\,|\,.\,)\big)$ *un espace préhilbertien réel et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs de* E*, on dit que* $(x_i)_{i\in I}$ *est :*

- **orthogonale** *si* $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j\Longrightarrow (x_i|x_j)=0$.
- **orthonormale** *(ou* **orthonormée***) si* $\forall (i,j)\in I^2,\ (x_i|x_j)=\delta_{i,j}$.

PROPOSITION 2.3 :
Soit E un espace préhilbertien réel.

- **Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.**
- **Si $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille orthogonale :** $\Big|\Big|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k\Big|\Big|^2=\sum_{k=1}^{n}||x_k||^2$ **(PYTHAGORE).**

REMARQUE 2.4 : • Pour $(x,y)\in E^2, ||x+y||^2=||x||^2+||y||^2\Longleftrightarrow x\perp y$. *Par contre :*
- *Si* $n>2$ *et si* $(x_1,\cdots,x_n)$ *vérifie la relation de* PYTHAGORE*, elle n'est pas forcément orthogonale.*

DÉFINITION 2.4 :
Soit $\big(E,(\,.\,|\,.\,)\big)$ *un espace préhilbertien réel,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. On dit que* F *et* G *sont des* **sous-espaces orthogonaux** *si* $\forall (x,y)\in F\times G, (x|y)=0$ *; on le note* $F\perp G$.

PROPOSITION 2.4 :
Soit E un espace préhilbertien réel et $F_1,\cdots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E supposés deux à deux orthogonaux. Alors la somme des F_k est directe : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}F_k=\bigoplus_{k=1}^{n}F_k$.

DÉFINITION 2.5 :
Soit $\big(E,(\,.\,|\,.\,)\big)$ *un espace préhilbertien réel et* F *un sous-espace vectoriel de* E *(et même si* F *n'est qu'une partie* E*). On définit* **l'orthogonal** *de* F*, noté* $F^\perp$ *par :* $F^\perp=\big\{x\in E\mid \forall y\in F,\ (x|y)=0\big\}$.

REMARQUE 2.5 : Avec cette définition, on a toujours $\{0_E\}^\perp=E$ *et* $E^\perp=\{0_E\}$.

PROPOSITION 2.5 :
Soit $\big(E,(\,.\,|\,.\,)\big)$ un espace préhilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E :

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
- $F\subset G\Longrightarrow G^\perp\subset F^\perp$
- $F\perp G\Longleftrightarrow F\subset G^\perp\Longleftrightarrow G\subset F^\perp$
- $F\cap F^\perp=\{0_E\}$ et $F\subset \big(F^\perp\big)^\perp$
- $F^\perp+G^\perp\subset (F\cap G)^\perp$
- $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$

REMARQUE 2.6 : On peut avoir $\big(F^\perp\big)^\perp\neq F$ *et/ou* $F^\perp+G^\perp\neq (F\cap G)^\perp$.

PARTIE 2.2 : ESPACES EUCLIDIENS

DÉFINITION 2.6 :
- *Un* **espace euclidien** E *est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*
- *Dans un tel espace* E*, une famille* $\mathcal{B}$ *de vecteurs de* E *est dite une* **base orthonormale** *(ou* **orthonormée***) de* E *si* $\mathcal{B}$ *est base de* E *et une famille orthonormale de* E*.*

THÉORÈME ÉNORME 2.6 :
Soit E un espace préhilbertien réel et $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre de E, alors il existe une famille $(e_1, \cdots, e_n)$ de vecteurs de E qui vérifie les conditions suivantes :
- $\forall p \in [\![1;n]\!],\ \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.
- $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_n)$ **est une famille orthonormale de E.**
- $\forall k \in [\![1;n]\!],\ (x_k|e_k) > 0$ **(ceci amène aussi l'unicité).**

C'est le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.

REMARQUE 2.7 : On orthonormalise directement $(x_1, \cdots, x_n)$ *en* $(f_1, \cdots, f_n)$ *avec les formules :*
- $e_1 = \dfrac{x_1}{||x_1||}$ *(et on a bien* $(e_1|x_1) = ||x_1|| > 0$*).*
- $\forall p \in [\![2;n]\!],\ e_p = \dfrac{g_p}{||g_p||}$ *en notant* $g_p = x_p - \sum\limits_{k=1}^{p-1}(e_k|x_p)e_k$ *(avec* $(e_p|x_p) = ||g_p|| > 0$ *car* $g_p \neq 0_E$*).*

PROPOSITION 2.7 :
Soit E un espace euclidien.
- **E possède au moins une base orthonormale.**
- **Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.**

REMARQUE 2.8 : Si $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{1\leqslant k\leqslant p}} F_k$ *et si* $\mathcal{B}_k$ *est une base orthonormale de* F_k *(pour tout indice* $k \in [\![1;p]\!]$*) alors* $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ *est une base orthonormale de* E *dite adaptée à cette décomposition.*

THÉORÈME 2.8 :
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, $(x,y) \in E^2$ qui se décomposent $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k e_k$ dans la base $\mathcal{B}$:
- $\forall k \in [\![1;n]\!],\ x_k = (e_k|x)$, ($x = \sum\limits_{k=1}^{n}(e_k|x)e_k$ **: coordonnées en fonction des produits scalaires).**
- $(x|y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ **(produit scalaire en fonction des coordonnées).**
- $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$ **(norme en fonction des coordonnées).**

PROPOSITION 2.9 :
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E, on associe à des vecteurs x et y de E les vecteurs colonnes X et Y de leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Alors on a $(x|y) = {}^tXY = X^TY$ (en identifiant réel et matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$).

REMARQUE FONDAMENTALE 2.9 : Soit E *euclidien,* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *une base orthonormée de* E *:*

- *Si* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$*, alors on a* $A = \Big((e_i|f(e_j))\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
- *Si* $\mathcal{B}'$ *est une autre base orthonormée et* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *:* ${}^tP = P^{-1}$.

THÉORÈME 2.10 :
Soit E un espace préhilbertien réel (pas forcément de dimension finie) et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $F^\perp$ et F sont supplémentaires dans E. Et $(F^\perp)^\perp = F$.
En particulier, si E est de dimension finie alors $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

DÉFINITION 2.7 :
Soit E *un espace préhilbertien réel et* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie, alors le sous-espace* $F^\perp$ *est appelé* **le supplémentaire orthogonal** *de* F.
La **projection orthogonale** *sur* F *est la projection* p_F *sur* F *parallèlement à* $F^\perp$.

PROPOSITION 2.11 :
Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Nous avons maintenant les égalités : $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ et $F^\perp + G^\perp = (F\cap G)^\perp$.

PROPOSITION 2.12 :
Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace de E de dimension finie, $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de F. Pour $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est $p_F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(e_k|x)e_k$.

REMARQUE 2.10 : Si $a \neq 0_E$, $D = \mathrm{Vect}(a)$, $H = D^\perp$ *:* $p_D(x) = \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a$, $p_H(x) = x - p_D(x) = x - \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a$.

DÉFINITION 2.8 :
Soit E *un espace préhilbertien réel,* F *un sous-espace de* E*, la* **distance de $x \in E$ à F** *est* $d(x, F) = \mathrm{Inf}_{y\in F}||x-y||$.

THÉORÈME ÉNORME 2.13 :
Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $x \in E$.
Alors la distance $d(x, F) = ||x - p_F(x)|| = \mathrm{Min}_{y\in F}||x - y||$ est atteinte seulement en $y = p_F(x)$.

REMARQUE HP 2.11 : Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ *un espace préhilbertien réel,* $(e_1, \cdots, e_p)$ *une famille orthonormée de vecteurs de* E, $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$*, alors* $\forall x \in E$, $\sum\limits_{k=1}^{p}(e_k|x)^2 = ||p_F(x)||^2 \leqslant ||x||^2$ *(inégalité de* BESSEL*).*

THÉORÈME ÉNORME 2.14 :
Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ un espace euclidien et φ une forme linéaire (element de E^*) alors il existe un unique vecteur a de E tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = (a|x)$ (théorème de représentation).

PROPOSITION 2.15 :
Soit E un espace euclidien, $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$ un hyperplan de E (donc $a \neq 0_E$), la droite associée $D = H^\perp = \mathrm{Vect}(a)$ et $x \in E$: $d(x, H) = \dfrac{|(x|a)|}{||a||}$ et $d(x, D)^2 = \left|\left|x - \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a\right|\right|^2 = ||x||^2 - \dfrac{(x|a)^2}{||a||^2}$.