CHAPITRE 3

INTÉGRATION

PARTIE 3.1 : FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

DÉFINITION 3.1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ est une **subdivision** de $[a; b]$ si on a les inégalités strictes $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$. σ est dite une **subdivision régulière** si : $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = a + k \left(\frac{b-a}{n} \right)$.

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est une **fonction continue par morceaux** s'il existe une subdivision σ de $[a; b]$ telle que : $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, f$ est continue sur $]a_k; a_{k+1}[$ et f admet une limite finie à droite en a_k et à gauche en a_{k+1} de sorte qu'il existe, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, une fonction continue $g_k : [a_k; a_{k+1}] \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in]a_k; a_{k+1}[, g_k(x) = f(x)$. On dit alors que σ est une **subdivision adaptée** à f .

Soit I un intervalle réel et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux sur I si elle l'est sur chaque segment inclus dans I . On note $C_m^0(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

REMARQUE 3.1 : • Si f continue par morceaux sur $[a; b]$, $|f|$ l'est aussi. Si g est aussi continue par morceaux sur $[a; b]$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f^+ = (|f| + f)/2, f^- = (|f| - f)/2, |f|, \sup(f, g), \text{Inf}(f, g)$ le sont aussi.

- Toute fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur un segment est bornée ce qui nous permet de définir $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a; b]} |f(t)|$; mais elle n'atteint pas forcément ses bornes.
- Une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque peut posséder une infinité de points de discontinuité et peut ne pas être bornée.

DÉFINITION 3.2 :

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux, avec les notations de la définition précédente, on définit l'**intégrale de f entre a et b** , notée $\int_a^b f$, la quantité $\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[a_k; a_{k+1}]} g_k$.

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in C_m^0(\widetilde{[a; b]}, \mathbb{R})$, on définit $\int_a^b f = - \int_b^a f$ si $a > b$ et $\int_a^a f = 0$ si $a = b$.

REMARQUE 3.2 : • La valeur de cette intégrale ne dépend pas de la subdivision adaptée à f .

- Cette définition (encore une aire dans le cas réel) généralise l'intégrale de sup. ($\sigma = (a, b)$ adaptée).
- Si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux, on a encore $\int_a^b f = \int_a^b \text{Re}(f) + i \int_a^b \text{Im}(f)$.

THÉORÈME 3.1 :

Soit $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue, alors la fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par : $\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f$ est de classe C^1 et c'est la primitive de f s'annulant en a : $F' = f$ et $F(a) = 0$.

Soit $f : \widetilde{[a; b]} \rightarrow \mathbb{K}$ continue et F une des primitives de f sur $\widetilde{[a; b]}$: $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

REMARQUE 3.3 : • Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe C^1 , alors si $(a, x) \in I^2, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.

- Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $u, v : J \rightarrow I$ dérivables, alors l'application $G : J \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable si elle est définie par : $\forall x \in J, G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ et on a : $\forall x \in J, G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

THÉORÈME 3.2 :

Si $f \in C_m^0(\widetilde{[a; b]}, \mathbb{C})$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(t)dt$.

THÉORÈME ÉNORME 3.3 :

Soit $u, v : [\widetilde{a}; b] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 , alors : $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Si $f : [\widetilde{a}; b] \rightarrow \mathbb{K}$ est de classe C^{n+1} : $f(b) = f(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi : [\widetilde{a}; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue (avec $\varphi([\widetilde{a}; b]) \subset I$), alors par changement de variable ($t = \varphi(u)$) : $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$.

THÉORÈME ÉNORME 3.4 :

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ($\alpha < \beta$), $(f, g) \in C_m^0([\alpha; \beta], \mathbb{C})^2$, $(a, b, c) \in [\alpha, \beta]^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

- $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ (linéarité). • $\int_a^b f = -\int_b^a f$ et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (CHASLES).
- $\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right| \leq |b-a| \|f\|_\infty$ et $\left| \int_a^b fg \right| \leq \|f\|_\infty \left| \int_a^b |g| \right|$ (inégalité de la moyenne).
- $\left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\left| \int_a^b |f|^2 \right|} \sqrt{\left| \int_a^b |g|^2 \right|}$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

Si f réelle et $a < b$, $f \geq 0 \implies \int_a^b f \geq 0$ (positivité) et $f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$ (croissance).

PARTIE 3.2 : INTÉGRALES CONVERGENTES**DÉFINITION 3.3 :**

- Soit $a \in \mathbb{R}$, $a < b$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f \in C_m^0(]a; b[, \mathbb{K})$, si $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie en b^- , on dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge (divergente sinon) et on définit $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$ (idem sur $]a; b[$).
- Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f \in C_m^0(]a; b[, \mathbb{K})$, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge (divergente sinon) s'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. Dans ce cas, on définit $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

REMARQUE 3.4 :

- Si $f \in C_m^0(]a; b[, \mathbb{K})$, $a' \in]a; b[$: $\int_a^b f$ converge $\iff \int_{a'}^b f$ converge. Dans ce cas $\int_a^b f = \int_a^{a'} f + \int_{a'}^b f$.
- Si $I =]a; b[$, nature et valeur de $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ sont indépendantes de $c \in]a; b[$.
- La convergence de $\int_I f$ équivaut à l'existence de limites finies d'une (donc de toute) "primitive" F de f aux bornes de $I =]a; b[$ (par exemple). Dans ce cas $\int_I f = [F(x)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\int_I f$ CV $\iff \left(\int_I \operatorname{Re}(f) \text{ et } \int_I \operatorname{Im}(f) \text{ CV} \right)$. Dans ce cas : $\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$.

DÉFINITION 3.4 :

Deux intégrales sont dites de même nature si elles sont simultanément convergentes (resp. diverg.).

PROPOSITION 3.5 :

Si f est continue par morceaux sur $[\widetilde{a}; b[$ et si $\int_a^b f(t)dt$ converge : $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^b f(t)dt = 0$.

THÉORÈME 3.6 :

Si $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$: • $\int_1^{+\infty} f_\alpha$ converge $\iff \alpha > 1$ • $\int_0^1 f_\alpha$ converge $\iff \alpha < 1$.
 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g_\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $\forall x \geq 0, g_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$: $\int_0^{+\infty} g_\lambda$ converge $\iff \lambda > 0$.

PROPOSITION 3.7 :

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues par morceaux et $a = \text{Inf}(I)$ ou $-\infty$ et $b = \text{Sup}(I)$ ou $+\infty$:

- Si $\int_a^b f$ CV et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\int_a^b (\lambda f)$ CV et on a la relation $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.
- Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ CV, $\int_a^b f + g$ CV, $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$ • Si $\int_a^b f$ CV et $\int_a^b g$ DV, $\int_a^b f + g$ DV.
- Si $\int_a^b f$ CV et $c \in I$: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (relation de CHASLES).

THÉORÈME ÉNORME 3.8 :

Soit $f \in C^0(]a; b[, \mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ une bijection strictement croissante de classe C^1 :

- Les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt$ sont de même nature.
- Dans le cas de la convergence : $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt$ (changement de variable).

REMARQUE 3.5 : Si φ est une bijection strictement décroissante : les intégrales ont toujours la même nature et $\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt$ ce qui s'écrit aussi $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)|\varphi'(t)|dt$ car $\varphi' \leq 0$.

THÉORÈME ÉNORME 3.9 :

Soit $f, g :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 , si fg admet des limites finies en a et b :

- Les deux intégrales $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ et $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ sont de même nature.
- Si convergence, $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx = \lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) - \int_a^b fg'$.

PARTIE 3.3 : FONCTIONS INTÉGRABLES

DÉFINITION 3.5 :

Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{K})$, $a = \text{Inf}(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \text{Sup}(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge. f est alors dite intégrable sur I .

THÉORÈME 3.10 :

Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{K})$, $a = \text{Inf}(I) \in \overline{\mathbb{R}}$, $b = \text{Sup}(I) \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\int_a^b f$ ACV, alors $\int_a^b f$ CV et $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

REMARQUE 3.6 : • Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$, l'intégrabilité de f équivaut à la convergence de $\int_a^b f$.

- C'est aussi le cas par exemple si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et si f reste positive au voisinage de $+\infty$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f intég. sur $I \iff (\text{Re}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \text{ intég sur } I)$. Dans ce cas : $\int_I f = \int_I \text{Re}(f) + i \int_I \text{Im}(f)$.

PROPOSITION 3.11 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et intégrable sur I . Alors : $\int_I |f| = 0 \iff f = 0$.

THÉORÈME ÉNORME 3.12 :

Théorème de comparaison : soit $(f, g) \in C_m^0(I, \mathbb{K})^2$.

- Si $|f| \leq |g|$: (i) g intég. sur $I \implies f$ intég. sur I (ii) f non intég. sur $I \implies g$ non intég. sur I .
- Si $I =]a; b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (et $a \in I$ donc $a \in \mathbb{R}$)
 - (iii) Si $f = O_b(g)$ (ou $f = o_b(g)$) alors : (g intégrable sur I) $\implies$ (f intégrable sur I).
 - (iv) Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors : (f intégrable sur I) $\iff$ (g est intégrable sur I).

REMARQUE 3.7 : Relation entre intégrabilité et limite : f continue par morceaux sur I

- Si $I =]a; b[$ est un intervalle borné et si f est bornée sur I (en particulier si f admet une limite finie en b) alors f est intégrable sur I . Mais on peut avoir f intégrable sur I sans que f ne soit bornée sur I .
- Si $I =]a; +\infty[$ n'est pas bornée, il n'y a aucun lien entre l'intégrabilité de f sur I et le fait que f tende vers 0 en $+\infty$.
- Une implication : si f est intégrable sur $I =]a; +\infty[$ et si f admet une limite ℓ en $+\infty$ alors $\ell = 0$.

PROPOSITION 3.13 :

Soit $a \in \mathbb{R}$, $f \in C_m^0([a; +\infty[, \mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on a les résultats suivants :

- si $\exists k \neq 0$, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{t^\alpha}$: (f intégrable sur $]a; +\infty[$) $\iff$ ($\alpha > 1$).
- si $\alpha > 1$, $f(t) = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ (en part. si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$) : f intégrable sur $]a; +\infty[$.
- si $\alpha \leq 1$, $\exists k > 0$, $|f(t)| \geq \frac{k}{t^\alpha}$ "en" $+\infty$ (en part. si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$) : f non intég. sur $]a; +\infty[$.

Soit $a > 0$, $f \in C_m^0(]0; a], \mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

- si $\exists k \neq 0$, $f(t) \underset{0+}{\sim} \frac{k}{t^\alpha}$: (f intégrable sur $]0; a]$) $\iff$ ($\alpha < 1$).
- si $\alpha < 1$ et $f(t) = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ (en part. si $\lim_{t \rightarrow 0+} t^\alpha f(t) = 0$) : f intégrable sur $]0; a]$.
- si $\alpha \geq 1$, $\exists k > 0$, $|f(t)| \geq \frac{k}{t^\alpha}$ "en" 0 (en part. si $\lim_{t \rightarrow 0+} t^\alpha f(t) = +\infty$) : f non intég. sur $]0; a]$.

DÉFINITION 3.6 :

On note $L^1(I, \mathbb{K})$ (resp. $L^2(I, \mathbb{K})$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables (de carré intégrable) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

PROPOSITION 3.14 :

• $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace de $C_m^0(I, \mathbb{K})$ où $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire ; c'est-à-dire que si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(f, g) \in L^1(I, \mathbb{K})^2$ alors $\alpha f + \beta g \in L^1(I, \mathbb{K})$ et $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.

• Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{K})$ et $c \in I$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur $I \cap]-\infty; c]$ et sur $I \cap [c; +\infty[$. Dans ce cas, on a $\int_I f = \int_{I \cap]-\infty; c]} f + \int_{I \cap [c; +\infty[} f$ (CHASLES).

REMARQUE 3.8 : • Soit $f : I =]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante telle que $u_0 \in I$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b$. Alors : f est intégrable sur $I \iff \sum_{n \geq 0} \int_{u_n}^{u_{n+1}} |f|$ converge.

• Si $(f, g) \in L^2(I, \mathbb{K})^2$ alors $f \times g \in L^1(I, \mathbb{K})$. • $L^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C_m^0(I, \mathbb{K})$.

• Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $(f, g) \in L^2(I, \mathbb{K}) \implies \left| \int_I fg \right| \leq \sqrt{\int_I |f|^2} \sqrt{\int_I |g|^2}$.

• Comparaison série-intégrale. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. La série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.