TD 01 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2023-2024 **jeudi 07 septembre 2023**

1.1 Traitons quelque cas en posant $u_n = a^{\lfloor \ln n \rfloor}$:

Si $|a| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = |a^{\lfloor \ln n \rfloor}| = 1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 : $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ diverge grossièrement.

Si $|a| > 1$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor \ln(n) \rfloor = +\infty$, la suite $\left(a^{\lfloor \ln n \rfloor}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|a^{\lfloor \ln n \rfloor}\right| = +\infty$ et la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ est encore grossière.

Si $a = 0$, comme $\forall n \geqslant 3,\ \lfloor \ln n \rfloor \geqslant 1$, on a $a^{\lfloor \ln n \rfloor} = 0$, ce qui montre la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$.

Si $a \in]0;1[$, $\ln(n) - 1 < \lfloor \ln(n) \rfloor \leqslant \ln(n)$ par définition de la partie entière, $a^{\ln(n)} \leqslant a^{\lfloor \ln n \rfloor} < a^{\ln(n)-1}$ car $0 < a < 1$. Or $a^{\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln(a)} = e^{\ln(a)\ln(n)} = n^{\ln(a)} = \dfrac{1}{n^{-\ln(a)}}$. Ainsi, $\dfrac{1}{n^{-\ln(a)}} \leqslant u_n < \dfrac{1}{an^{-\ln(a)}}$.

Si $-\ln(a) > 1 \iff a < 1/e$, alors l'inégalité $0 < u_n < \dfrac{1}{an^{-\ln(a)}}$ montre par comparaison à une série de Riemann que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ converge.

Si $-\ln(a) \leqslant 1 \iff a \geqslant 1/e$, l'inégalité $\dfrac{1}{n^{-\ln(a)}} \leqslant u_n$ montre par comparaison que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ diverge.

Si $a \in]-1/e;0[$, $|a^{\lfloor \ln n \rfloor}| = |a|^{\lfloor \ln n \rfloor}$ donc, par un des cas précédents, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ converge absolument.

Si $a \in]-1;-1/e[$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a^{\lfloor \ln k \rfloor}$. L'idée est de faire des paquets de termes pour lesquels $\lfloor \ln(k) \rfloor$ est constant. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors $p = \lfloor \ln(k) \rfloor \iff p \leqslant \ln(k) < p+1 \iff e^p \leqslant k < e^{p+1}$. Ainsi, si on pose $I_p = [\![u_p;v_p]\!]$ avec $u_p = \lfloor e^p \rfloor + 1$ et $v_p = \left\lfloor e^{p+1} \right\rfloor - 1$, on a la valeur constante $\forall k \in I_p,\ \lfloor \ln(k) \rfloor = p$. Ainsi, $\sum\limits_{k\in I_p} a^p = S_{v_p} - S_{u_p-1} = a^p(v_p - u_p + 1)$. Mais, $e^p < u_p \leqslant e^p + 1$ et $e^{p+1} - 2 < v_p \leqslant e^{p+1} - 1$ donc $e^{p+1} - 2 - e^p < v_p - u_p + 1 < e^{p+1} - e^p$ ce qui assure par encadrement que $v_p - u_p + 1 \underset{+\infty}{\sim} e^p(e-1)$ car $e^{p+1} - 2 - e^p \underset{+\infty}{\sim} e^{p+1} - e^p = e^p(e-1)$. Ainsi, $S_{v_p} - S_{u_p-1} \underset{+\infty}{\sim} (ae)^p(e-1)$ qui ne tend pas vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Or si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeait vers S, les deux suites extraites $(S_{u_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{v_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ tendrait vers S donc on aurait $\lim\limits_{p\to+\infty}(S_{v_p} - S_{u_p-1}) = 0$. Par l'absurde, $(S_n)_{n\geqslant 1}$ diverge. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ diverge.

Au final : $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ converge si et seulement si $-e^{-1} < a < e^{-1}$.

1.2 **a.** Si $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}} = 0$. Comme $a_n = \left(a_n^{1-\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} = e^{\frac{n}{n-1}\ln\left(a_n^{1-\frac{1}{n}}\right)}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(a_n^{1-\frac{1}{n}}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$.

Ainsi $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant 1$ et $a_n \leqslant a_n^{1-\frac{1}{n}}$ car $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1$ donc $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\ln(a_n) \geqslant \ln(a_n)$ car $\ln(a_n) \leqslant 0$ et que la fonction $\exp$ est croissante. On conclut à la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ par comparaison.

b. D'abord, les conditions définissant l'appartenance à I et J sont la négation l'une de l'autre donc $I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J = \mathbb{N}^*$. Les ensembles I et J constituent donc une partition de $\mathbb{N}^*$. Traitons les deux cas :

Si $n \in I$, on a $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \lambda a_n$ par définition.

Si $n \in J$, on a $a_n^{1-\frac{1}{n}} > \lambda a_n \iff a_n^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{\lambda} \iff a_n^{1-\frac{1}{n}} < \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^{n-1}$ car $a_n > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{Max}\left(\lambda a_n, \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}\right) \leqslant \lambda a_n + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda a_n$ converge par hypothèse et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}$ converge car $0 < \frac{1}{\lambda} < 1$ donc, par somme et comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge aussi. En sommant l'inégalité obtenue pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \lambda\Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\Big) + \frac{\lambda}{\lambda-1}$.

c. Les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ sont donc de même nature d'après les questions **a.** et **b.**. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge et on note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n > 0$. Soit $\varphi :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\lambda) = \lambda S + \frac{\lambda}{\lambda-1}$. φ est dérivable sur $]1; +\infty[$, $\lim\limits_{\lambda \to 1^+} \varphi(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$. Or $\varphi'(\lambda) = S - \frac{1}{(\lambda-1)^2}$. En étudiant les variations de φ, on se rend compte que φ est minimale en $\lambda_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{S}}$ et comme $S' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \varphi(\lambda_0)$, on a $S' \leqslant (\sqrt{S}+1)^2$, ce qui se traduit par l'inégalité attendue, à savoir $\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}} \leqslant 1 + \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n}$.

1.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ car elle y est dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $P_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} > 0$. Comme $P_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$, P_n induit une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $[-1; +\infty[$ d'après le théorème du même nom donc il existe bien un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $P_n(x_n) = 0$ et on a même $x_n > 0$ car $P_n(0) \neq 0$. Comme $P_1(x) = x - 1$ et $P_2 = x^2 - x - 1$, on a $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ car le discriminant de P_2 vaut $\Delta = 5$ et que $x_2 > 0$.

On constate que $\forall x \geqslant 0$, $P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1}$. Ainsi $P_n(x_{n+1}) \leqslant P_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = P_n(x_n)$. Comme P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $x_{n+1} \leqslant x_n$ et la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \in [0; 1[$ d'après le théorème de la limite monotone. Si $n \geqslant 2$, $P_n(1) > 0 = P_n(x_n)$ donc $x_n \in]0; 1[$ par stricte croissance de P_n. On a alors $P_n(x_n) = x_n\left(\frac{1-x_n^n}{1-x_n}\right) - 1 = \frac{2x_n - 1 - x_n^{n+1}}{1-x_n}$ car $x_n \neq 1$ donc $2x_n - 1 - x_n^{n+1} = 0$ (1).

Or $\forall n \geqslant 2$, $x_n \leqslant x_2$ donc $0 \leqslant_n^{n+1} < x_2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 < x_2 < 1$ et on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{n+1} = 0$. En passant à la limite (elles existent) dans (1), on a $2\ell - 1 = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

1.4 Cherchons d'abord un développement asymptotique de u_n.

Première méthode : $\sin(u_n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2}$ car $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in]-1; 1[$. Ainsi, $\sin(u_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2n^\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1 - \frac{4(-1)^n}{3n^\alpha} - \frac{4}{3n^{2\alpha}}}$. Or $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ donc $\sin(u_n) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2n^\alpha} + \frac{(-1)^n\sqrt{3}}{6n^\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{6n^{2\alpha}} + \frac{\sqrt{3}}{18n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n 2\sqrt{3}}{3n^\alpha} + \frac{2\sqrt{3}}{9n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

Comme $u_n = \mathrm{Arcsin}(\sin(u_n))$ et que $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{0}{=} x + o(x^2)$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n 2\sqrt{3}}{3n^\alpha} + \frac{2\sqrt{3}}{9n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

Deuxième méthode : soit $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2} + x\right) - \frac{\pi}{6}$ dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ avec $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1/2+x)^2}}$.

Ainsi, $f'(x) \underset{0}{=} \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{4x}{3} - \dfrac{4x^2}{3}}} \underset{0}{=} \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(1 + \dfrac{2x}{3}\right) + o(x)$. En primitivant, $f(x) \underset{0}{=} f(0) + \dfrac{2x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2x^2}{3\sqrt{3}} + o(x^2)$.

Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{2x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2x^2}{3\sqrt{3}} + o(x^2)$. Par conséquent : $u_n = \dfrac{2(-1)^n}{\sqrt{3}n^\alpha} + \dfrac{2}{3\sqrt{3}n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

<u>Troisième méthode</u> : soit $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2} + x\right)$, alors f est de classe C^∞ sur $\left]-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right[$ donc admet un DL en 0 à tout ordre. On a $f(0) = \dfrac{\pi}{6}$ et, par calculs, $f'(0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $f''(0) = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. Ainsi, par Taylor-Young, $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2x}{3\sqrt{3}} + o(x^2)$. Ainsi, comme $\alpha > 0$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{2(-1)^n}{\sqrt{3}n^\alpha} + \dfrac{2}{3\sqrt{3}n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

• Dans tous les cas, on peut écrire $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \dfrac{2(-1)^n}{\sqrt{3}n^\alpha}$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3\sqrt{3}n^{2\alpha}} > 0$. Or $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\alpha > 0$ donc la suite $\left(\dfrac{2(-1)^n}{\sqrt{3}n^\alpha}\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et $\sum\limits_{n \geqslant 0} w_n$ converge si et seulement si $2\alpha > 1 \iff \alpha > \dfrac{1}{2}$ par comparaison de séries à termes positifs aux séries de Riemann. Par somme, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

1.5 Posons $u_n = \dfrac{1}{n^a} \sin\left(\dfrac{n\pi}{5}\right)$ pour $n \geqslant 1$. Puisque $a > 0$ et que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^a}$, par encadrement, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

<u>Si $a > 1$,</u> comme $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^a}$ converge par Riemann, $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge absolument par comparaison.

<u>Si $a > 1$,</u> montrons que $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge de deux manières :

<u>Méthode 1</u> : comme la suite $\left(\sin\left(\dfrac{n\pi}{5}\right)\right)_{n \geqslant 1}$ est 10-périodique car $\sin$ est 2π-périodique, on voit une alternance de termes positifs et négatifs dans cette série, ce qui nous conduit à effectuer une sommation par paquets de 5 termes consécutifs. Soit $v_n = u_{5n-4} + u_{5n-3} + u_{5n-2} + u_{5n-1} + u_{5n}$ pour tout $n \geqslant 1$. On constate que v_n est positif si n est impair et que v_n est négatif si n est pair, ainsi la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ est alternée. Si on définit les deux sommes partielles associées $S_p = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k$ et $T_p = \sum\limits_{k=1}^{p} v_k$ pour $p \geqslant 1$, on a la relation $\sum\limits_{k=1}^{p} v_k = \sum\limits_{k=1}^{p}\left(\sum\limits_{i=5k-4}^{5k} u_i\right) = T_p = S_{5p} = \sum\limits_{n=1}^{5p} u_n$. Avec les propriétés de signe de v_n, comme $\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin(\theta)$, on a la relation $v_n = (-1)^{n-1} w_n$ en définissant le réel $w_n = |v_n| \geqslant 0$ par $w_n = \dfrac{1}{(5n-4)^a} \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \dfrac{1}{(5n-3)^a} \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \dfrac{1}{(5n-2)^a} \sin\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) + \dfrac{1}{(5n-1)^a} \sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Or $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est clairement décroissante et tend vers 0 donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. Notons T la limite de la suite des sommes partielles $(T_n)_{n \geqslant 1}$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{5n} = T$. De plus, on a $S_{5n+1} = S_{5n} + u_{5n+1} \underset{+\infty}{=} T_n + o(1) \underset{+\infty}{=} T + o(1)$, puis $S_{5n+2} = S_{5n+1} + u_{5n+2} \underset{+\infty}{=} T + o(1)$, $S_{5n+3} = S_{5n+2} + u_{5n+3} \underset{+\infty}{=} T + o(1)$ et $S_{5n+4} = S_{5n+3} + u_{5n+4} \underset{+\infty}{=} T + o(1)$, d'où l'on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{5n} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{5n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{5n+2} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{5n+3} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{5n+4} = T$.

Ainsi, la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge ce qui signifie que $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge. On a même $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = T$.

<u>Méthode 2</u> : la 10-périodicité de $\left(\sin\left(\dfrac{n\pi}{5}\right)\right)_{n \geqslant 1}$ nous conduit à sommer par paquets de 10 termes. Soit $z_n = u_{10n-9} + u_{10n-8} + u_{10n-7} + u_{10n-6} + u_{10n-5} + u_{10n-4} + u_{10n-3} + u_{10n-2} + u_{10n-1} + u_{10n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Alors, si on définit les deux sommes partielles associées $S_p = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k$ et $T_p = \sum\limits_{k=1}^{p} z_k$

pour $p \geqslant 1$, on a $T_p = S_{10p}$ comme précédemment.

On a donc $z_n = \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{(10n-k)^a} \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ ($\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) = 0$ si $k=0$ ou $k=5$ mais on le laisse) et, en écrivant par exemple $\frac{1}{(10n-9)^a} = \frac{1}{(10n)^a}\left(1-\frac{9}{10n}\right)^{-a} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(10n)^a} + \frac{9a}{(10n)^{a+1}} + o\left(\frac{1}{n^{a+1}}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(10n)^a} + O\left(\frac{1}{n^{a+1}}\right)$, on obtient $z_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{(10n)^a} \sum_{k=0}^{9} \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) + O\left(\frac{1}{n^{a+1}}\right)$. Or $\sum_{k=0}^{9} \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ est la partie imaginaire de la somme des 10 racines dixièmes de l'unité et on sait que cette somme est nulle. Ainsi, $z_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{a+1}}\right)$ ce qui garantit par comparaison aux séries de RIEMANN la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} z_n$. Ainsi, si on note T la limite de la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_{10n} = T$. De plus, $S_{10n+1} = S_{10n} + u_{10n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_{10n+1} = T$. De même, on montre que $\forall k \in [\![0;9]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} S_{10n+k} = T$ ce qui implique la convergence de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ vers T et, à nouveau, on en conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge. On a même $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = T$.

1.6 **a.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - 1$. Il est clair que f est croissante. On montre par une petite étude de fonction, ou par convexité de la fonction $\exp$, que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant x$ et que $f(x) = x \iff x = 0$. Pour toute valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et croissante car elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$. Il y a alors deux cas :

- Si $u_0 \leqslant 0$. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 0$, alors $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - 1 \leqslant 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0 donc elle converge vers $\ell \leqslant 0$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, par continuité de f, on a $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = 0$ d'après ce qui précède. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $u_0 > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore croissante. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ, alors forcément $\ell \geqslant u_0 > 0$. À nouveau, on aurait $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = 0$: impossible. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x + 1 > x$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \ln(e^{v_n} - v_n)$. De plus, si $v_n > 0$, $e^{v_n} - v_n > 1$ donc $v_{n+1} > \ln(1) = 0$. La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est donc strictement positive. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \ln(e^{v_n} - v_n) < \ln(e^{v_n}) = v_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi strictement décroissante. Comme elle est décroissante et minorée par 0, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geqslant 0$. En passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = \ln(e^{v_n} - v_n)$, on obtient $\ell = \ln(e^\ell - \ell)$ d'où $e^\ell = e^\ell - \ell$ donc $\ell = 0$. Enfin, $v_n = e^{v_n} - e^{v_{n+1}}$, or $(e^{v_n})_{n\geqslant 0}$ converge vers 1 donc, par dualité suite/série, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge. Or, par télescopage, $\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (e^{v_k} - e^{v_{k+1}}) = e^{v_0} - e^{v_{n+1}}$, en passant à la limite, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = e - 1$.

1.7 La fonction Arccos est décroissante sur $[-1;1]$ et $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$ donc $\text{Arccos}\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \text{Arccos}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ainsi $u_n \leqslant 0$. De plus, comme $\lim_{t\to 0^+} \text{Arccos}(t) = \frac{\pi}{2}$, il vient $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Par conséquent, $\sin(u_n) \underset{+\infty}{=} u_n$ or $\sin(u_n) = \sin(a_n - b_n)$ en notant $a_n = \text{Arccos}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b_n = \text{Arccos}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On obtient donc $\sin(u_n) = \sin(a_n)\cos(b_n) - \sin(b_n)\cos(a_n)$. On sait que $\forall x \in [-1;1],\ \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ donc $\sin(u_n) = \frac{1}{n^2}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}$. Or $\sqrt{1-x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ donc $\sin(u_n) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$. On peut ne garder comme information que $u_n \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et même $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

On pouvait aussi se servir de la relation $\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)$ pour avoir $\text{Arccos}(x) \underset{0}{=} \frac{\pi}{2} - x + O(x^2)$

et obtenir plus simplement $u_n \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n} < 0$. Comme la série harmonique diverge, par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

Or $(-1)^n u_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ qu'on peut écrire $(-1)^n u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + v_n$ avec $v_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. De plus, $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge absolument par comparaison car $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Par somme $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$ converge.

1.8 **a.** Pour $n \geqslant 1$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante car $\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = (1+x)e^x > 0$. De plus, par croissances comparées, $f_n(0) = -n < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-n;+\infty[$ donc $\exists! u_n > 0,\ f_n(u_n) = 0$ car $0 \in [-n;+\infty[$ et $f_n(0) \neq 0$.

b. Soit $n \geqslant 3$, on a $f_n(1) = e - n < 0$ car $e \sim 2,72$ et $f_n(\ln(n)) = n\ln(n) - n = n(\ln(n) - 1) > 0$ car $n > e$ donc $f_n(1) < f_n(u_n) < f_n(\ln(n))$ et on conclut par stricte croissance de f_n que $1 < u_n < \ln(n)$.

Comme $u_n e^{u_n} = n$, on obtient $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$ donc $0 \leqslant \ln(n) - u_n = \ln(u_n) \leqslant \ln(\ln(n))$. Or, par croissances comparées, $\ln(\ln(n)) \underset{+\infty}{=} o(\ln(n))$ donc, par encadrement, $\ln(n) - u_n \underset{+\infty}{=} o(\ln(n))$ ce qui est la définition de l'équivalence $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

c. Comme $u_n - \ln n = -\ln(u_n)$, on peut espérer montrer que $u_n - \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(\ln(n))$. On étudie donc $u_n - \ln(n) + \ln(\ln(n)) = \ln\left(\frac{\ln(n)}{u_n}\right)$ qui tend vers 0 car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{u_n} = 1$ par la question précédente. Ainsi, $u_n - \ln(n) + \ln(\ln(n)) \underset{+\infty}{=} o(1) \underset{+\infty}{=} o(\ln(\ln(n)))$ ce qui, encore une fois, se traduit par $u_n - \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(\ln(n))$.

1.9 **a.** D'abord, la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge par le critère spécial des séries alternées puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Ceci justifie l'existence du reste R_n pour tout entier $n \geqslant -1$.

On sait d'après ce même théorème que R_n est du signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ donc $|R_n| = (-1)^{n+1}R_n$. Ainsi, on a $|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^{n+1}R_n - (-1)^{n+2}R_{n+1} = (-1)^{n+1}(R_n + R_{n+1})$. Or, en posant $k = j+1$, il vient $R_{n+1} = \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{j=n+1}^{+\infty} (-1)^{j+1} u_{j+1}$. Ainsi, en regroupant les deux séries, on obtient la relation $|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \big((-1)^k u_k + (-1)^{k+1} u_{k+1}\big)$ d'où $|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ en notant $v_k = u_k - u_{k+1}$. Or, par hypothèse, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive, et tend vers 0 (par somme). Par conséquent, par le critère spécial des séries alternées, comme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ est le reste d'ordre n de la série $\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k v_k$, le signe de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ est celui de $(-1)^{n+1} v_{n+1}$ donc celui de $(-1)^{n+1}$. On en déduit que le signe de $|R_n| - |R_{n+1}|$ est celui de $(-1)^{n+1}(-1)^{n+1} = 1$ ce qui permet de conclure que $|R_n| - |R_{n+1}| \geqslant 0$, c'est-à-dire que $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Comme avant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|R_n| + |R_{n+1}| = (-1)^{n+1}R_n + (-1)^{n+2}R_{n+1} = (-1)^{n+1}(R_n - R_{n+1})$ or $R_n - R_{n+1} = (-1)^{n+1}u_{n+1}$ après simplification. Ainsi, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_{n+1}$. Mais on sait que la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $|R_{n+1}| \leqslant |R_n| \leqslant |R_{n-1}|$ qui devient, en ajoutant $|R_n|$ et d'après ce qui précède, $u_{n+1} \leqslant 2|R_n| \leqslant u_n$ et on a bien $\frac{u_{n+1}}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{u_n}{2}$.

c. Comme $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$ d'après l'énoncé, le théorème des gendarmes prouve que $|R_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{2}$ d'après l'encadrement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{2|R_n|}{u_n} \leqslant 1$. Et puisque $R_n = (-1)^{n+1}|R_n|$, on en déduit que $R_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\dfrac{u_n}{2}$.

d. Posons $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ donc f est décroissante sur $[e;+\infty[$ donc sur $[3;+\infty[$. f est même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on trouve $f''(x) = \dfrac{2\ln(x)-3}{x^3}$ donc f'' est positive sur $[e^{3/2};+\infty[$ donc sur $[5;+\infty[$. Ainsi, la fonction f est convexe sur $[5;+\infty[$. De plus, en posant $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} = f(n)$, on a $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ car $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{=} o(\ln(n))$ et $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$ donc, en divisant, $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$. Pour $n \geqslant 5$, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe deux réels $\alpha_n \in]n+1;n+2[$ et $\beta_n \in]n;n+1[$ tels que $u_{n+2} - u_{n+1} = f(n+2) - f(n+1) = f'(\alpha_n)$ et $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) = f'(\beta_n)$. Mais comme f' est croissante sur $[5;+\infty[$, on a $f'(\beta_n) \leqslant f'(\alpha_n)$ car $\beta_n \leqslant \alpha_n$. Ainsi, pour $n \geqslant 5$, $u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n$.

On en déduit d'après la question **c.** (comme on parle de reste, le fait que les propriétés requises ne commencent qu'à partir du rang 5 importe peu) que $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{\ln(k)}{k} \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\dfrac{\ln(n)}{2n}$.

1.10 **a.** La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!}$ converge car en notant $u_n = \dfrac{1}{n!}$, on a par exemple $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ou alors par D'ALEMBERT car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$. On reconnaît la série exponentielle et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e^1 = e$. Par conséquent $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$ existe pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ en tant que reste d'une série convergente.

b. On isole les deux premiers termes, $(n+1)!R_n = (n+1)!\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(n+1)!}{k!} = 1 + \dfrac{1}{n+2} + \sum\limits_{k=n+3}^{+\infty} \dfrac{(n+1)!}{k!}$ or, pour tout entier $k \geqslant n+3$, on a $\dfrac{(n+1)!}{k!} = \dfrac{1}{k(k-1)\cdots(n+2)} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. Ainsi, en sommant $\sum\limits_{k=n+3}^{+\infty} \dfrac{(n+1)!}{k!} \leqslant \sum\limits_{k=n+3}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{n+2}$. Ainsi, $1 \leqslant (n+1)!R_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{n+2}$ et on conclut par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)!R_n = 1$.

c. On sait que $e = S_n + R_n$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ donc $en! = n!S_n + n!R_n$ mais $n!S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!}$ est un entier donc $\sin(2\pi en!) = \sin(2\pi n!S_n + 2\pi n!R_n) = \sin(2\pi n!R_n)$ par 2π-périodicité de la fonction $\sin$. Comme $R_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)!}$, on a $2\pi n!R_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\pi}{n+1}$ donc $u_n = \sin(2\pi en!) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\pi}{n+1} > 0$ ce qui garantit par comparaison à la série harmonique de RIEMANN la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(2\pi en!)$.

1.11 **a.** Par construction, on a $u_n > 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est bien défini. De plus, $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \left(n+\dfrac{3}{2}\right)\ln(n+1) - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n) - \ln(n+1) - 1$ après simplifications. Alors, $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1 \underset{+\infty}{=} \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge absolument donc converge.

b. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \big(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\big)$ converge, par dualité suite-série, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une réel k. Par continuité de l'exponentielle, comme $u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers

$c = e^k > 0$. Par conséquent, $\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} \underset{+\infty}{\sim} c$, ce qui équivaut à $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ avec $C = \dfrac{1}{c} > 0$.

c. On sait d'après la formule de STIRLING que $C = \sqrt{2\pi}$. Pour le montrer, on définit, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale de WALLIS $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$, qui est bien définie car $f_n : I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(t) = \sin^n(t)$ est continue sur le segment I. De plus, $\forall t \in I,\ 0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant f_{n+1}(t) \leqslant f_n(t)$ ce qui, par croissance de l'intégrale, donne $0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc positive et décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $u : t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ et $v : t \mapsto (-\cos(t))$ dans $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} u(t)v'(t)dt$, comme u et v sont de classe C^1 sur I, on a $W_{n+2} = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} + \displaystyle\int_0^{\pi/2}(n+1)\cos^2(t)\sin^n(t)dt$ donc $W_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt = (n+1)(W_n - W_{n+2})$ ce qui montre que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
Ainsi, $(n+2)W_{n+1}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1}$ donc la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et, comme $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Pour $n \geqslant 1$, comme $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, en multipliant par W_n, on a $W_nW_{n+1} \leqslant W_n^2 \leqslant W_{n-1}W_n$ donc $\dfrac{\pi}{2(n+1)} \leqslant W_n^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2n}$ car $W_n \geqslant 0$. Par encadrement, on a donc $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n-1)}{2n}W_{2n-2} = \cdots = \dfrac{(2n-1)\times\cdots\times 1}{(2n)\times\cdots\times 2}W_0 = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$. D'après la question **b.**, on a $W_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C\sqrt{2n}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\pi}{2^{2n+1}\left(C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{C\sqrt{2n}}$ après simplifications. Mais d'après ce qui précède, on a $W_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. Par conséquent, on a $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{C}$ ce qui donne $C = \sqrt{2\pi}$ et on retrouve la formule de STIRLING bien connue : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

1.12 La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie car $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 1 + a_k > 0$ par hypothèse.

a. Initialisation : D'abord, $u_1 = \dfrac{a_1}{1+a_1} = 1 - \dfrac{1}{1+a_1}$. De plus, comme $(1+a_1)(1+a_2) = a_1 + a_1a_2 + a_2 + 1$, on a la relation $u_1 + u_2 = \dfrac{a_1}{1+a_1} + \dfrac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} = \dfrac{a_1 + a_1a_2 + a_2 + 1 - 1}{(1+a_1)(1+a_2)} = 1 - \dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$.

Hérédité : soit $n \geqslant 1$, supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k = 1 - \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k}$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=1}^n u_k\right) + u_{n+1}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1 - \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k} + a_{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{1}{1+a_k}$ par hypothèse de récurrence et définition de u_{n+1}. Ainsi, en regroupant les deux derniers termes, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1 - \frac{1 + a_{n+1} - a_{n+1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k)} = 1 - \prod_{k=1}^{n+1}\frac{1}{1+a_k}$.

Par principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^n u_k = 1 - \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k}$.

b. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs, la suite $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante donc convergente par le théorème de la limite monotone car elle est minorée par 0. Ainsi, d'après **a.**, la suite de ses sommes partielles étant convergente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

c. Posons, $v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{k}}} > 0$. D'après **b.**, $\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - v_n$. Or on a $\ln(v_n) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Comme $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge par RIEMANN, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ diverge, ses sommes partielles tendent donc vers $+\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$. Ainsi, puisque $v_n = e^{\ln(v_n)}$, puisque $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, par composition des limites, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Par conséquent, si on suppose que $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

1.13 **a.** Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : x \mapsto (\tan(x))^k$ est continue sur le segment $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc u_k est bien défini. De plus, $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant f_{k+1}(x) \leqslant f_k(x)$ ce qui, par croissance de l'intégrale, donne $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc positive et décroissante.

b. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$ par le théorème de la limite monotone. La fonction $\tan$ est convexe sur I car $\forall x \in I,\ \tan''(x) = 2\tan(x)(1+\tan^2(x)) \geqslant 0$ donc la courbe représentative de $\tan$ est en dessous de ses cordes sur I, notamment $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \tan(x) \leqslant \frac{4x}{\pi}$. Ainsi $0 \leqslant u_k \leqslant \int_0^{\pi/4} \left(\frac{4x}{\pi}\right)^k dx = \frac{4^k}{\pi^k}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4(k+1)}$ toujours par croissance de l'intégrale. Comme $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1}$, par encadrement, on a $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.

On aurait aussi pu utiliser le chapitre sur les suites de fonctions :

(H_1) La suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < \frac{\pi}{4}$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(H_2) Les fonctions f_k et la fonction f sont continues sur I.

(H_3) $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_k(x)| \leqslant \varphi(x) = 1$ et φ est intégrable sur I.

Par le théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} \int_0^{\pi/4} f_k = \int_0^{\pi/4} f = 0$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k + u_{k+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^k(x)(1+\tan^2(x))dx = \int_0^{\pi/4} \tan^k(x)\tan'(x)dx$ par linéarité de l'intégrale donc $u_k + u_{k+2} = \left[\frac{\tan^k(x)}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{k+1}$.

d. $u_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$ et $u_1 = \int_0^{\pi/4} \tan(x)dx = [\ln(\cos(x))]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}$. Grâce à **c.**, on a $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(u_{2k}+u_{2k+2}) = u_0 + (-1)^{n-1}u_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ donc $u_{2n} = (-1)^n\left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$. De même, on a la relation $\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}(u_{2k-1}+u_{2k+1}) = u_1 + (-1)^n u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ d'où l'on déduit que $u_{2n+1} = (-1)^n\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} - \frac{\ln(2)}{2}\right)$.

e. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \frac{\ln(2)}{2}$. D'où la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et les valeurs $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.