

TD 02 : E3A 2003 PSI EXERCICE 1

PSI 1 2023-2024

vendredi 08 septembre 2023

1.1 La série étudiée est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$. Elle est donc convergente. Par ailleurs, en effectuant le changement d'indice $j = k - 1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1 - (1/2)^n}{1 - (1/2)}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$, $\boxed{\sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge absolument}}$ et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1 - (1/2)} = 2}$.

1.2 On sait que, pour $x \in]-1; 1[$, on a $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. En dérivant par rapport à x sur cet intervalle, on a

donc $\boxed{\forall x \in]-1; 1[, \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$.

1.3 Tout d'abord, on remarque que, pour tout $k \geq 1$, on a

$$b_k = k \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} \right) = k \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times k \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}.$$

D'après la question 1.2, puisque $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, on a $\sum_{k=1}^n b_k = \frac{1}{2} \times \frac{n(1/2)^{n+1} - n(1/2)^{n-1} + 1}{(1 - 1/2)^2}$. Par croissances comparées, on a les limites suivantes $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1/2)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)(1/2)^n = 0$. Ainsi, par une coïncidence

surprenante, il vient $\boxed{\sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge (absolument) et } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 - 1/2)^2} = 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$.

2.1 Par opérations, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est de classe C^1 sur $]1; +\infty[$ et on trouve

$$\forall x > 1, f'(x) = \frac{-(1 + \ln(x))}{x^2 \ln^2(x)} \leq 0.$$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

En particulier, si $n \geq 2$, $a_n = f(n) \geq f(n+1) = a_{n+1}$, ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n \geq 2} \text{ est décroissante.}}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, par produit et inverse, on a $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0}$.

On pouvait aussi étudier le signe de $a_{n+1} - a_n$ mais introduire f est utile pour la suite.

2.2 La fonction f étudiée précédemment est continue, décroissante et positive sur $[2; +\infty[$. D'après le théorème de comparaison séries-intégrales, on peut donc affirmer que la série $\sum_{n \geq 2} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[2; +\infty[$ (ce qui signifie que $x \mapsto \int_2^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$). Or :

$$\int_2^x f(t)dt = \left[\ln(\ln(t)) \right]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La fonction f n'est donc pas intégrable sur $[2; +\infty[$. On peut donc conclure que

la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ diverge.

Plus simplement, $a_k = f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)dt$, on somme pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ et, par CHASLES, comme $a_1 = 0$,
 $\sum_{k=2}^n a_k = A_n \geq \int_2^{n+1} f(t)dt = [\ln(\ln(t))]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$. Par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = +\infty$.

2.3 Tout d'abord, pour tout $n \geq 2$, $b_n = n \left(\frac{1}{n \ln(n)} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \right) = \frac{(n+1) \ln(n+1) - n \ln(n)}{(n+1) \ln(n) \ln(n+1)}$.

Trouvons un équivalent du numérateur. On peut écrire :

$$\begin{aligned} (n+1) \ln(n+1) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n+1) \left[\ln(n) + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n+1) \ln(n) + (n+1) \left(\frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) + \ln(n) + 1 + o(1) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) + \ln(n) + o(\ln(n)). \end{aligned}$$

Il en résulte $(n+1) \ln(n+1) - n \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + o(\ln(n))$ ou $(n+1) \ln(n+1) - n \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. On

trouve par rapport d'équivalents que $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} a_n$ car $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$,

donc, par comparaison de séries à termes positifs, on peut conclure que la série

$\sum_{n \geq 1} b_n$ est divergente.

Ou alors $\frac{(n+1) \ln(n+1) - n \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{(n+1) \ln(n) + (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - n \ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\ln(n)}$

et, comme $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\ln(n)} = 0$ donc $(n+1) \ln(n+1) - n \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3 Il suffit de couper la somme en deux et de changer d'indice. Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^n k a_k - \sum_{k=1}^n k a_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n k a_k - \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) a_j \\ &= \sum_{k=1}^n k a_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) a_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^n (k - (k-1)) a_k \right) - n a_{n+1} \\ &= A_n - n a_{n+1} = A_{n+1} - a_{n+1} - n a_{n+1} \\ &= A_{n+1} - (n+1) a_{n+1} \end{aligned}$$

donc on a bien

$$\forall n \geq 1, B_n = A_{n+1} - (n+1) a_{n+1} = A_n - n a_{n+1}.$$

4.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est supposée décroissante, donc chacun des termes $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}$ (et

il y en a n) est supérieur ou égal à a_{2n} . On en déduit que :

$$u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p \geq \sum_{p=n+1}^{2n} a_{2n} = n a_{2n}.$$

4.2 La série $\sum_{n \geq 1} a_n$ est convergente, donc la suite de ses sommes partielles $(A_n)_{n \geq 1}$ admet une limite que nous noterons A . On sait alors que $(A_{2n})_{n \geq 1}$ tend aussi vers A en tant que suite extraite d'une suite convergente. Si $n \geq 1$, on a $u_n = A_{2n} - A_n$, par soustraction la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ tend vers $A - A = 0$.

Mais $(a_n)_{n \geq 1}$ est constituée de réels positifs, ce qui permet alors d'utiliser la double inégalité $0 \leq n a_{2n} \leq u_n$ de la question précédente pour conclure par encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_{2n} = 0.$$

Posons, pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n = n a_n$. D'après la question précédente, la suite $(\alpha_{2n})_{n \geq 1}$ converge vers 0 car $\alpha_{2n} = 2(n a_{2n})$. D'autre part, par décroissance de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$, on peut écrire

$$0 \leq \alpha_{2n+1} = (2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = \alpha_{2n} + a_{2n}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, donc son terme général tend vers 0. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 0$ (suite extraite) donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_{2n} + a_{2n}) = 0$. Par l'encadrement précédent, la suite $(\alpha_{2n+1})_{n \geq 0}$ converge vers 0. Les deux suites $(\alpha_{2n})_{n \geq 1}$ et $(\alpha_{2n+1})_{n \geq 0}$ convergent vers 0 donc, d'après le cours, la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge également vers 0, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0.$$

4.3 Puisque la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ est convergente, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ converge. Par ailleurs, la suite $(n a_n)_{n \geq 1}$ converge d'après la question 4.2, ainsi que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ (vers 0 bien sûr d'après la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$).

La relation $B_n = A_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}$ permet donc d'affirmer que la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ converge, ce qui signifie que la série

$$\sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge.}$$

Les deux suites $(n a_n)_{n \geq 1}$ et $(a_n)_{n \geq 1}$ convergeant vers 0, il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $B_n = A_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}$ pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

5.1 D'après les calculs effectués à la question 3, on peut écrire, pour tout $n \geq 1$,

$$B_n = A_n - n a_{n+1}.$$

Pour $m \leq n$, on obtient donc :

$$B_n = A_m + \sum_{k=m+1}^n a_k - n a_{n+1}.$$

Dans la somme, les $n - m$ termes sont tous supérieurs à a_{n+1} car la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est décroissante. Par conséquent, il vient

$$B_n \geq A_m + \sum_{k=m+1}^n a_{n+1} - n a_{n+1} = A_m + (n - m)a_{n+1} - n a_{n+1} = A_m - m a_{n+1}.$$

5.2 Faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente : on le peut car $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0. On obtient :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \geq A_m.$$

Tous les termes de la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ étant majorés par $B = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, on peut conclure que

la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ est convergente car c'est une série de termes positifs. La convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$

nous permet d'appliquer les résultats de la question 4, ce qui conduit à nouveau à l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Conclusion : avec les questions 4, 5, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, positive et de limite nulle, on a l'équivalence

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge si et seulement si } \sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge.} \quad \text{Si elles convergent, } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

6 Notons $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$. On sait (séries géométriques) que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

Comme $(T_n)_{n \geq 0}$ est clairement croissante, on a même : $\forall n \geq 0, T_n \leq 2$. Soit $n \geq 1$:

- si n est une puissance de 2, posons $n = 2^p$ avec $p \geq 0$. On a alors $A_n = A_{2^p} = \sum_{k=1}^{2^p} a_k = \sum_{j=0}^p \frac{1}{2^j} = T_p$ par définition de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ donc $A_n = T_p \leq 2$.

- Si n n'est pas une puissance de 2, on peut l'encadrer entre deux puissances de 2. En effet, prenons $p = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$, alors $p = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor \leq \frac{\ln n}{\ln 2} < \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor + 1 = p + 1$ donc, en passant à l'exponentielle, on obtient $2^p \leq n < 2^{p+1}$. Alors, comme $(A_n)_{n \geq 1}$ est aussi croissante car $(a_n)_{n \geq 1}$ est à termes positifs, $A_n \leq A_{2^{p+1}} = T_{p+1} \leq 2$.

Dans tous les cas, la suite croissante $(A_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ . Mais comme une de ses suites extraites, à savoir $(A_{2^p})_{p \geq 0}$, tend vers 2, on a $\ell = 2$ par unicité de la limite.

En conclusion, $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2$. Pour $n \geq 1$, $B_{2^n} = A_{2^n} - 2^n a_{2^n+1} = A_{2^n}$ d'après la

question 3 car $2^n + 1$ n'est pas un carré parfait. Ainsi, $(B_{2^n})_{n \geq 1}$ converge vers 2. De plus, pour $n \geq 1$, $B_{2^n-1} = A_{2^n-1} - (2^n - 1)a_{2^n} = A_{2^n-1} - \frac{2^n - 1}{2^n}$, or la suite extraite $(A_{2^n-1})_{n \geq 1}$ tend aussi vers 2 d'après ce qui précède, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{2^n-1} = 2 - 1 = 1$.

On vient de trouver deux suites extraites de $(B_n)_{n \geq 1}$, à savoir $(B_{2^n})_{n \geq 1}$ et $(B_{2^n-1})_{n \geq 1}$, qui convergent vers des limites différentes, on en déduit que $(B_n)_{n \geq 1}$ diverge, donc que $\sum_{n \geq 1} b_n$ diverge.

Contreexemple : si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive et de limite nulle mais pas supposée décroissante, on vient de trouver un contreexemple à la conclusion précédente : les deux séries ne sont plus forcément de même nature et, si elles convergent toutes deux, les sommes ne sont pas forcément égales.