TD 02 : E3A 2003 PSI EXERCICE 1

PSI 1 2023-2024

vendredi 08 septembre 2023

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = n(a_n - a_{n+1})$, $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$.

1 On prend dans cette question, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

1.1 Vérifier que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge absolument et calculer sa somme.

1.2 En constatant que $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ est la dérivée du polynôme $\sum_{k=0}^n x^k$, déterminer une expression compacte de $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1; 1[$.

1.3 Justifier que $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et calculer sa somme en utilisant la question précédente.

2 On prend dans cette question, $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ pour $n \geq 2$ et $a_1 = 0$.

2.1 Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$.

2.2 Quelle est (on justifiera) la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$?

Indication : appliquer le théorème de comparaison série-intégrale.

2.3 Montrer que $(n+1) \ln(n+1) - n \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} b_n$?

On revient pour la suite du devoir au cas général.

3 Montrer que $\forall n \geq 1$, $B_n = A_n - n a_{n+1}$ (ce qui équivaut à $B_n = A_{n+1} - (n+1)a_{n+1}$).

4 On suppose ici que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

4.1 Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n a_{2n} \leq u_n$.

4.2 En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_{2n} = 0$. Démontrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$.

4.3 Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge. A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

5 On suppose ici que $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

5.1 Vérifier que pour tout entier m tel que $m \leq n$, on a $B_n \geq A_m - m a_{n+1}$.

5.2 En déduire que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

6 Question subsidiaire : soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $a_n = \frac{1}{n}$ si n est une puissance de 2 et $a_n = 0$ sinon.

Par exemple, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = a_6 = a_7 = 0$, $a_8 = \frac{1}{8}$, $a_9 = a_{10} = 0$, etc....

Justifier que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. Que vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$? Est-ce que $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge ?