TD 03 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

PSI 1 2023-2024 **vendredi 15 septembre 2023**

3.1 *Centrale Maths1 PSI 2016* Arthur Robbe

Soit E un espace euclidien de dimension n, $X = (x_1, \cdots, x_n)$ et $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ sont deux familles de vecteurs de E telles que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (x_i|x_j) = (y_i|y_j)$.

a. Si $n = 2$ et (x_1, x_2) est libre, montrer que (y_1, y_2) est libre.

b. On revient au cas général, montrer que si X et Y sont libres, alors si on définit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ par les conditions $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \varphi(x_i) = y_i$, alors $\forall x \in E,\ ||\varphi(x)|| = ||x||$.

c. Si X n'est pas libre, montrer qu'il existe encore $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \varphi(x_i) = y_i$ et qui vérifie $\forall x \in E,\ ||\varphi(x)|| = ||x||$. Montrer qu'on peut même imposer que cette isométrie soit directe.

3.2 *Mines PSI 2017* Maxime Lacourcelle II

Soit E un espace euclidien de dimension n.

a. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists! (f_1, \cdots, f_n) \in E^n,\ M = \big((e_i|f_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

b. La réciproque est-elle vraie ?

3.3 *Mines PSI 2018* Jean Boudou II

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

On suppose que $\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

3.4 *Mines PSI 2018* Julien Langlais I

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega :]a;b[\to \mathbb{R}$ continue, strictement positive et intégrable sur $]a;b[$.

a. Montrer que $< P, Q > = \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère $(P_0, \cdots, P_n)$ l'orthonormalisée de GRAM-SCHMIDT de la base canonique $(1, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
Dans toute la suite de l'exercice k désigne un entier dans $[\![1;n-1]\!]$.

b. Montrer qu'il existe $(a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3$ tel que $XP_k = a_k P_{k+1} + b_k P_k + c_k P_{k-1}$.

c. Si $k \geqslant 2$, montrer que $c_k = a_{k-1}$.

d. Avec $< P_k, 1 >$, montrer que P_k possède une racine réelle de multiplicité impaire dans $]a;b[$.

Soit $(x_1, \cdots, x_p) \in]a;b[^p$ les racines de multiplicités impaires de P_k dans l'intervalle $]a;b[$.

e. En considérant $Q_k = \prod\limits_{i=1}^{p} (X - x_i)$ et $< P_k, Q_k >$, montrer que $p = k$.

f. En déduire que les racines complexes de P_k sont toutes réelles, toutes dans $]a;b[$ et toutes simples.

3.5 *CCP PSI 2018* Benoit Souillard I

On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

a. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

b. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

3.6 *Centrale Maths1 PSI 2022* Louis Lacarrieu

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $< P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

On note, pour $k \in [\![0; n]\!]$, $B_k = \dfrac{X^k}{k!}$ et $L_k : t \mapsto \dfrac{(-1)^k}{k!}e^t f_k^{(k)}(t)$ où $f_k : t \mapsto e^{-t}t^k$.

a. Montrer que $< .,. >$ définit un produit scalaire sur E.

b. La famille $\mathcal{B} = (B_0, \cdots, B_n)$ est-elle une base orthonormale de E ?

c. Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_n)$ est une famille de vecteurs de E.

Donner le degré et le coefficient dominant de L_k pour $k \in [\![0; n]\!]$.

d. La famille $\mathcal{L}$ est-elle une base orthonormale de E ?

e. On définit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$. Donner une base de F, de $F^\perp$.

f. Calculer $\underset{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Inf}} \int_0^{+\infty} (1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2 e^{-t}dt$.

3.7 *CCINP PSI 2022* Marius Desvalois I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur lequel on définit, pour tout $(X, Y) \in E^2$, $< X, Y >= X^T Y \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que $< .,. >$ définit un produit scalaire sur E. On note $||.||$ sa norme euclidienne associée.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Im}\,(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^T)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in E$ fixés, on définit $f : E \to \mathbb{R}$ par $f(X) = ||AX - Y||$.

c. Montrer que $f(X) = \underset{Z\in E}{\mathrm{Inf}}(f(Z))$ si et seulement si $A^T(AX - Y) = 0$.

3.8 *CCINP PSI 2022* Matis Viozelange II

On note $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ et, pour $(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$. On pose F le sous-espace de E composé des fonctions affines de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $F = \{f \in E \mid \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in [0; 1],\ f(x) = ax + b\}$.

a. Montrer que $(. | .)$ définit un produit scalaire sur E.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de $\int_0^1 t^n \ln(t)dt$ et calculer sa valeur.

c. Déterminer le projeté orthogonal de $f : x \mapsto x\ln(x)$ sur F.

d. Calculer $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} ||g_{a,b}||$ où $g_{a,b} : x \mapsto ax + b - x\ln(x)$.