DM 2 : CCP 2006 PC

PSI 1 2023/2024 **pour le vendredi 22 septembre 2023**

Notations et objectifs :

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions au moins égales à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $(x|y)$ et $||x||$.

$\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

On dit qu'un endomorphisme f de E euclidien est symétrique si $\forall (x,y) \in E^2,\ (f(x)|y) = (x|f(y))$.

La matrice transposée d'une matrice A est notée A^T.

L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de *pseudo-solution* et la troisième partie généralise la notion d'inverse d'une matrice carrée à une matrice rectangulaire en introduisant la notion de *pseudo-inverse*.

PARTIE 1 : PROJECTEURS ORTHOGONAUX

1 Soit p un projecteur de E (sur F parallèlement à G), montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

2 Soit x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $(x|y) = X^T Y = Y^T X$.

3 **Matrice et inégalité** : soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leqslant \dim(H) < \dim(F)$, $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H

3.1 Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$.

3.2 Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F. Relativement à cette base $\mathcal{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur de $z \in F$, $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, E_i la matrice de e_i. Montrer que pour tout $z \in F$, $M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} E_i E_i^T Z$. En déduire $M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i E_i^T$.

3.3 Montrer que pour tout $z \in F$, $||p(z)|| \leqslant ||z||$.

4 **Exemple** : on note M la matrice définie par $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.1 Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.

4.2 Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur.

5 **Encadrement des valeurs propres** : soit K un second sous-espace vectoriel de F, r le projecteur orthogonal de F sur K, un réel $\lambda \neq 0$ tel qu'il existe un vecteur non nul u tel que $p \circ r(u) = \lambda u$ (on dit que λ est une valeur propre de $p \circ r$).

5.1 Montrer que u est élément de H et que $r(u) - \lambda u$ est élément de $H^{\perp}$.

5.2 Établir l'égalité : $\lambda ||u||^2 = ||r(u)||^2$.

5.3 En déduire que $\lambda \in [0;1]$.

6 **Commutation** : on suppose dans cette question que p et r commutent.

6.1 Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

6.2 Si $p \circ r$ est non nul, montrer que ses valeurs propres valent 0 ou 1.

6.3 Montrer que : $\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Im}\,(p \circ r) = \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(r)$.

7 **Condition nécessaire et suffisante de commutation** : on pose $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs : $P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où I_k est la matrice identité d'ordre k, A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m-k$.

7.1 Montrer que les matrices vérifient les relations :

$$A^2 + BC = A, \quad AB + BD = B, \quad CB + D^2 = D, \quad A^T = A, \quad B^T = C, \quad D^T = D.$$

7.2 Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les valeurs propres de $p \circ r$ valent 0 ou 1.

(ii) $C^T C = 0$.

(iii) $C = 0$.

(iv) p et r commutent.

Pour (i)$\Longrightarrow$(ii), on pourra montrer que les valeurs propres de A sont aussi 0 ou 1 et admettre que, puisque A est symétrique réelle, $X(X-1)$ est donc un polynôme annulateur de A.

PARTIE 2 : PSEUDO-SOLUTIONS D'UN SYSTÈME

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathcal{L}(E,F)$ et un élément v de F.

1 En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f, montrer qu'il existe x_0 de E tel que :

$$||f(x_0) - v|| = \underset{x \in E}{\mathrm{Min}}\, ||f(x) - v||$$

Dans la suite x_0 sera appelée une pseudo-solution de l'équation (E) : $f(x) = v$.

2 Montrer que si f est injective, alors l'équation (E) admet une pseudo-solution unique.

3 Montrer que x_0 est pseudo-solution de (E) si, et seulement si, $\forall x \in E,\ (f(x)|f(x_0) - v) = 0$.

4 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{C}$ à l'arrivée, V la matrice de v dans $\mathcal{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathcal{B}$.

Écrire sous forme matricielle l'équation $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation (E) si, et seulement si, $A^T A X_0 = A^T V$.

5 Exemple : dans cette question, on prend $E = F = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^5$, les matrices de f et v sont respectivement $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $(E)\ :\ \ f(x) = v$.

6 **Application** : n désignant un entier supérieur ou égal à 2, on considère trois éléments $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ et $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

6.1 Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x) = v$ où f est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques.

6.2 Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?

6.3 Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

PARTIE 3 : PSEUDO-INVERSE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Dans cette partie, f désigne toujours un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

1 **Construction**

1.1 Soit y un élément de F. Montrer qu'il existe deux vecteurs x et y' tels que :

$$y = f(x) + y',\ \ (x, y') \in (\mathrm{Ker}(f))^{\perp} \times (\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}.$$

1.2 Montrer qu'un tel couple est unique. On peut alors définir l'application g de F vers E qui à y fait correspondre x.

1.3 Montrer que l'application g est linéaire. g sera appelée l'application *pseudo inverse* de f.

2 Déterminer le noyau et l'image de g.

$\boxed{3}$ **Projecteurs orthogonaux**

$\boxed{3.1}$ Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.

$\boxed{3.2}$ Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}\,(f)$.

$\boxed{4}$ **Premier exemple** : on prend $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ munis de leur produit scalaire usuel. La matrice de f relativement aux bases canoniques est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques.

$\boxed{5}$ **Cas symétrique** : dans cette question, on suppose que $E = F$ et que f est un endomorphisme symétrique.

$\boxed{5.1}$ Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\,(f) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.

$\boxed{5.2}$ Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g. Indication : on pourra discuter suivant que la valeur propre associée est nulle ou non.

$\boxed{5.3}$ En déduire que g est aussi un endomorphisme symétrique de E (admettre le théorème spectral).

$\boxed{6}$ **Deuxième exemple** : on prend $E = F = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. La matrice de f relativement à la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver les trois valeurs réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de λ telles que $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. En déduire la matrice de g relativement à la base canonique.