TD 04 : INTÉGRALES

PSI 1 2023-2024 **vendredi 22 septembre 2023**

4.1 *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 277II*

Soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue.

a. Montrer que $G : x \to \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|g(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^2 sur $[0;1]$ et calculer G''.

b. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = G(x) + ax + b$ vérifie $f'' = g$ et $f(0) = f(1) = 0$.

c. Existe-t-il d'autres fonctions f vérifiant ces conditions ?

4.2 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 218I*

Trouver a, b et c tels que $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t$ existe et la calculer.

4.3 *Mines PSI 2017* Alexandre Chamley II

On définit f par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$. Justifier que f se prolonge par continuité en 0 et en 1.

Tracer le graphe de f. Montrer l'existence et trouver la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\mathrm{d}x$.

4.4 *CCP PSI 2017* Maxime Lacourcelle II

Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et 2π-périodiques.

On pose $c(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$ et $g : t \mapsto f(t) - c(f)$ si $f \in E$.

a. Étudier la convergence, pour $\alpha > 1$ et $f \in E$, de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

b. Si $f \in E$, montrer que f a ses primitives 2π-périodiques si et seulement si $c(f) = 0$.

c. Si $f \in E$, est-ce que $g \in E$? Calculer $c(g)$.

d. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\mathrm{d}t$.

e. Trouver, si $c(f) \neq 0$, un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$.

f. Déduire des questions précédentes la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$.

4.5 *E3A PSI 2018* Peio Betbeder

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_0 et I_1. Étudier le sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{n}{3}\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}\mathrm{d}x$. En déduire une relation entre I_{n+1} et I_{n-1}.

c. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ 0 < \dfrac{n}{n+3}I_{n-1} < I_n < I_{n-1}$. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $u_n = n(n+1)(n+2)I_nI_{n-1}$.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4.6 <u>*CCP PSI 2019*</u> Elaia Mugica I

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, une fonction continue $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in [a;b],\ f(x) = f(a+b-x)$.

a. Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$.

b. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt$.

4.7 <u>*X PSI 2020*</u> Victor Barberteguy I

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient les conditions suivantes :

- $f(0) = 0$,
- f' croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$,
- $\forall x \geqslant 0,\ \displaystyle\int_0^x f'(t)^2 dt \geqslant f(x+f(x)) - f(x)$.

4.8 <u>*Mines PSI 2022*</u> Tony Géreaud II

Soit une fonction continue $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)\ \ (1)$.

a. Calculer $f(1)$. Pour $x \in]0;+\infty[$, comparer $f(x)$ et $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt$.

c. Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et en déduire f.

4.9 <u>*Mines PSI 2021 et 2022*</u> Esteban Poupinet I et Colin Herviou-Laborde I

a. Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

4.10 <u>*Mines PSI 2022*</u> Anatole Rousset I

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t}dt$.

b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}dt$.

c. Établir $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t + i\sin(\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}dt = -\frac{1}{2}\ln\left(2 - 2\cos(\theta)\right) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$.

d. En déduire que si $\theta \in]0;\pi[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\ln\left(2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.