DM 2 : CCP 2006 PC

PSI 1 2023/2024 **pour le vendredi 22 septembre 2023**

PARTIE 1 : PROJECTEURS ORTHOGONAUX

1 ($\Longrightarrow$) Si p est une projection orthogonale, $G = F^{\perp}$. Soit $(x,y) \in E^2$ qu'on décompose $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in F^2 \times G^2$, alors, comme $p(x) = x_1$, $p(y) = y_2$, p est un endomorphisme symétrique car $(p(x)|y) = (x_1|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) = (x_1|y_1) = (x_1|y_1) + (x_2|y_1) = (x_1 + x_2|y_1) = (x|p(y))$.

($\Longleftarrow$) Si p est un endomorphisme symétrique, soit $x \in F$ et $y \in G$, alors $p(x) = x$ et $p(y) = 0_E$ donc $(x|y) = (p(x)|y) = (x|p(y)) = (x|0_E) = 0$. Ainsi, $F \perp G$ et, avec les dimensions, on conclut que $G = F^{\perp}$ donc p est une projection orthogonale.

Par double implication, si p est un projecteur : $\boxed{p \text{ est orthogonal si et seulement si } p \text{ est symétrique.}}$

2 Si $n = \dim(E)$ et $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de E, en notant $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k u_k$ et $y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k u_k$, on a $(x|y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$. Comme les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$ sont X et Y telles que $X^T = (x_1 \ \cdots x_n)$ et $Y^T = (y_1 \ \cdots y_n)$, quitte à identifier un réel a avec la matrice (a) : $\boxed{(x|y) = X^T Y = Y^T X}$ par définition du produit matriciel.

3 **Matrice et inégalité**

3.1 Soit $z \in F$, d'après le cours, $\boxed{p(z) = \sum\limits_{i=1}^{k} (z|e_i) e_i}$ car $(e_1, \cdots, e_k)$ est une base orthonormée de H.

3.2 L'égalité ci-dessus s'écrit matriciellement $M(p)Z = \sum\limits_{i=1}^{k} [E_i^T Z] E_i$ où $E_i^T Z$ est ici vu comme un scalaire. Si on le voit plutôt comme une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, cela s'écrit alors $M(p)Z = \sum\limits_{i=1}^{k} E_i [E_i^T Z]$. Par associativité du produit matriciel, on a donc $\boxed{M(p)Z = \sum\limits_{i=1}^{k} E_i E_i^T Z.}$ Soit f l'endomorphisme de F canoniquement associé à $M(p) - \sum\limits_{i=1}^{k} E_i E_i^T$. L'égalité précédente montre que, pour tout $z \in E$, $f(z) = 0_F$, donc $f = 0$ et, au niveau matriciel, on en déduit la relation $\boxed{M(p) = \sum\limits_{i=1}^{k} E_i E_i^T.}$

3.3 Soit $z \in F$, comme $||z||^2 = ||z - p(z) + p(z)||^2 = ||z - p(z)||^2 + ||p(z)||^2$ d'après PYTHAGORE puisque $p(z) \perp (z - p(z))$ car p est un projecteur orthogonal, on a $||z||^2 \geqslant ||p(z)||^2$ ce qui donne bien $\boxed{||p(z)|| \leqslant ||z||.}$

4 **Exemple**

4.1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à M. Comme $M^2 = M$ (petit calcul), f est un projecteur de $\mathbb{R}^4$. Comme les deux premières colonnes de M ne sont pas colinéaires, et que l'on a $C_3 + C_1 = C_2 + C_4 = 0$, il vient rang$(M) = 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ par la formule du rang et les relations sur les colonnes donnent $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1,0,1,0)$ et $v_2 = (0,1,0,1)$. De plus, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2))$ car $f(e_3) = -f(e_1)$ et $f(e_4) = -f(e_2)$. Posons $v_3 = (1,0,-1,0)$ et $v_4 = (0,1,0,-1)$ de sorte que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$. On sait que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$ car f est un projecteur. Comm $v_1 \perp v_3$, $v_1 \perp v_4$, $v_2 \perp v_3$ et $v_2 \perp v_4$, $\boxed{f \text{ est un projecteur orthogonal de } \mathbb{R}^4.}$

4.2 D'après la question précédente, les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 sont orthogonaux deux à deux et sont de norme $\sqrt{2}$, donc $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}v_2\right) \text{ est une base orthonormée de } \mathrm{Ker}(f),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_3, \frac{1}{\sqrt{2}}v_4\right) \text{ en est une de } \mathrm{Im}\,(f).}$

5 **Encadrement des valeurs propres**

5.1 Par définition, $\lambda u = p(r(u))$. Comme $\lambda \neq 0$, $u = p\left(\frac{1}{\lambda} r(u)\right)$ donc $u \in \mathrm{Im}\,(p) = H$. D'autre part, $p(r(u) - \lambda u) = p(r(u)) - \lambda p(u) = \lambda(u - p(u)) = 0_F$ car $p(u) = u$ puisque $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_F - p)$. Ainsi, $r(u) - \lambda u \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}\,(p)^\perp = H^\perp$ car p est orthogonal. Par conséquent, $\boxed{u \in H \text{ et } r(u) - \lambda u \in H^\perp.}$

5.2 D'après la question précédente, $(u|r(u) - \lambda u) = 0$ donc $(u|r(u)) = \lambda||u||^2$. Or, r étant un projecteur orthogonal, c'est un endomorphisme symétrique d'après la question 1 et la relation $\boxed{\lambda||u^2|| = ||r(u)||^2}$ découle du calcul $(u|r(u)) = (u|r^2(u)) = (u|r(r(u))) = (r(u)|r(u)) = ||r(u)||^2$.

5.3 D'après la question 3.3, $||r(u)|| \leqslant ||u||$. Comme $||u|| \neq 0$, on a donc $\lambda = \dfrac{||r(u)||^2}{||u||^2} \in [0;1]$. On en déduit que $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } p \circ r \text{ sont dans l'intervalle } [0;1].}$

6 **Commutation**

6.1 Par composition, $p \circ r$ est un endomorphisme de F et, p et r commutant et étant des projecteurs, $(p \circ r)^2 = p^2 \circ r^2 = p \circ r$ donc $p \circ r$ est aussi un projecteur de F.
De plus, pour des vecteurs x et y de F, $(p(r(x))|y) = (r(x)|p(y)) = (x|r(p(y))$ car p et r sont symétriques. Comme r et p commutent, $(p(r(x))|y) = (x|p(r(y))$ et $p \circ r$ est donc aussi un endomorphisme symétrique. Ainsi, d'après la question 1, $\boxed{p \circ r \text{ est un projecteur orthogonal.}}$

6.2 Si λ est une valeur propre du projecteur $p \circ r$, il existe par définition un vecteur x de F tel que $p \circ r(x) = \lambda x$. En composant par $p \circ r$, on a donc $\lambda x = \lambda^2 x$ donc, comme $x \neq 0_E$, $\lambda^2 = \lambda$ donc $\lambda \in \{0, 1\}$. Comme $p \circ r \neq 0$, le sous-espace $\mathrm{Im}\,(p \circ r) = \mathrm{Ker}(p \circ r - \mathrm{id}_F)$ contient un vecteur x non nul tel que $p \circ r(x) = 1.x$ donc 1 est valeur propre de $p \circ r$. Comme $\mathrm{Im}\,(p \circ r) \subset \mathrm{Im}\,(p) = H$ et que H est strictement inclus dans F par hypothèse, $\mathrm{Im}\,(p \circ r)$ est strictement inclus dans H ce qui montre que $\mathrm{Ker}(p \circ r)$ (qui est un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(p \circ r)$) n'est pas réduit à $\{0_F\}$. Soit donc y un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(p \circ r)$, alors $p \circ r(y) = 0.y$ donc 0 est valeur propre de $p \circ r$. Par double inclusion, on a établi que $\boxed{\text{les valeurs propres de } p \circ r \text{ sont } 0 \text{ et } 1.}$

6.3 Soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ r)$, comme on a les relations $p(r(x)) = 0_F$ et $r(x - r(x)) = r(x) - r^2(x) = 0_F$, en écrivant $x = r(x) + (x - r(x))$, il vient $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$, on peut donc écrire $x = y + z$ avec $p(y) = 0_F$ et $r(z) = 0_F$ d'où $p(r(x)) = p(r(y)) + p(r(z)) = p(r(y)) = r(p(y)) = 0_F$ car p et r commutent donc $x \in \mathrm{Ker}(p \circ r)$. Par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r).}$

Soit $x \in \mathrm{Im}\,(p \circ r)$ et $y \in F$ tel que $p \circ r(y) = p(r(y)) = x$, on voit que $x \in \mathrm{Im}\,(p)$. Comme p et r commutent, on a aussi $x = r(p(y)) \in \mathrm{Im}\,(r)$ donc $x \in \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(r)$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(r)$, alors $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_F) \cap \mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_F)$, d'où $p(x) = x$ et $r(x) = x$ et $p \circ r(x) = p(r(x)) = p(x) = x$ ce qui montre que $x \in \mathrm{Ker}(p \circ r - \mathrm{id}_F) = \mathrm{Im}\,(p \circ r)$. Par double inclusion toujours, $\boxed{\mathrm{Im}\,(p \circ r) = \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(r).}$

7 Condition nécessaire et suffisante de commutation

7.1 Comme $r^2 = r$, on a $Q^2 = Q$ ce qui, en calculant par blocs, donne $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{pmatrix}$ dont on déduit les quatre relations $A^2 + BC = A$, $AB + BD = B$, $CA + DC = C$ et $CB + D^2 = D$. De plus, si $Q = (q_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est la matrice de $p \circ r$ dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_m)$ de F, on sait d'après le cours que $q_{i,j} = (p \circ r(e_j)|e_i)$. Comme $p \circ r$ est symétrique car c'est un projecteur orthogonal, on a $q_{i,j} = (e_j|p \circ r(e_i)) = (p \circ r(e_i)|e_j) = q_{j,i}$ donc Q est symétrique. Comme $Q^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$ et que $Q = Q^T$, en identifiant, on a $A^T = A$, $C^T = B$ et $D^T = D$.

On a donc bien $\boxed{A^2 + BC = A,\ AB + BD = B,\ CB + D^2 = D,\ A^T = A,\ B^T = C \text{ et } D^T = D.}$

7.2 En calculant les produits par blocs, on a $PQ = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $QP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

<u>(i)⟹(ii)</u> : si λ est valeur propre de A, il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. En posant $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, on a $Y \neq 0$ et $PQY = \begin{pmatrix} AX \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda Y$ donc λ est valeur propre de PQ, donc de $p \circ r$, ce qui impose $\lambda \in \{0, 1\}$ d'après 6.2. Comme admis dans l'énoncé, $A^2 = A$ par le théorème spectral. D'après la question précédente, $A^2 + BC = A + BC = A$ donc $BC = 0$ d'où $C^T C = 0$.

<u>(ii)⟹(iii)</u> : en posant $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m-k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} \in \mathcal{M}_{m-k,k}(\mathbb{R})$ et comme $C^T C = 0$, $0 = \mathrm{Tr}\,(C^T C) = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m-k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} c_{i,j}^2$.

Puisque qu'une somme de quantités réelles positives nulle implique que tous ces termes sont nuls, $C = 0$.

<u>(iii)⟹(iv)</u> : si $C = 0$, $B = C^T = 0$ donc $PQ = QP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a $p \circ r = r \circ p$ donc p et r commutent.

<u>(iv)⟹(i)</u> : si $p \circ r = r \circ p = 0$, la seule valeur propre de $p \circ r = 0$, sinon, la question 6.2 montre que les valeurs propres de $p \circ r$ valent 0 et 1. En général, les valeurs propres de $p \circ r$ valent 0 et 1.

Par transitivité de l'implication, $\boxed{\text{on a l'équivalence des quatre conditions de l'énoncé.}}$

PARTIE 2 : PSEUDO-SOLUTIONS D'UN SYSTÈME

1 Soit w le projeté orthogonal de v sur $\mathrm{Im}\,(f)$ et x_0 un vecteur de E tel que $f(x_0) = w$. Pour tout vecteur x de E, on a $||f(x)-v||^2 = ||(f(x)-f(x_0))+(f(x_0)-v)||^2$. Or $f(x)-f(x_0) = f(x-x_0) \in \mathrm{Im}\,(f)$ et, par définition d'une projection orthogonale, $f(x_0)-v = w-v \in (\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}$ donc, d'après le théorème de Pythagore, il vient $||f(x)-v||^2 = ||f(x)-f(x_0)||^2+||f(x_0)-v||^2 \geqslant ||f(x_0)-v||^2$ d'où $||f(x)-v|| \geqslant ||f(x_0)-v||$. Ainsi, $||f(x_0)-v||$ est un minorant de $\{||f(x)-v|| \mid x \in E\}$, mais ce réel faisant partie de l'ensemble qu'il minore, en est le minimum, d'où $\boxed{\text{l'existence (mais pas l'unicité) d'un vecteur } x_0 \in E \text{ tel que } ||f(x_0)-v|| = \underset{x\in E}{\mathrm{Min}}\,||f(x)-v||.}$

2 Soit x_1 une autre pseudo-solution de $(*)$, alors $||f(x_1)-v|| = \underset{x\in E}{\mathrm{Min}}\,||f(x)-v|| = d(v, \mathrm{Im}\,(f))$ et on sait d'après le cours que ceci implique $f(x_1) = w$ (le projeté orthogonal de v sur $\mathrm{Im}\,(f)$). Si f injective, $f(x_0) = f(x_1) = w$ implique $x_0 = x_1$. Par conséquent, $\boxed{\text{si } f \text{ est injective, il existe une unique pseudo-solution de } (*).}$

3 D'après la question précédente, si x_0 est une pseudo-solution de $(*)$, $f(x_0)$ est le projeté orthogonal de v sur l'image de f. $f(x_0)-v$ est donc orthogonal à $\mathrm{Im}\,(f)$ et, si $x \in E$, on a $(f(x)|f(x_0)-v) = 0$.

Réciproquement, si $\forall x \in E,\ (f(x)|f(x_0)-v) = 0$, comme on a vu plus haut que $(f(x_0)-f(x)|f(x_0)-v) = 0$, il vient $||f(x_0)-v||^2 = (f(x_0)-f(x)+f(x)-v|f(x_0)-v) = (f(x)-v|f(x_0)-v) \leqslant ||f(x)-v||\,.\,||f(x_0)-v||$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On traite maintenant deux cas :

- si $f(x_0) = v$, alors x_0 est bien pseudo-solution de $(*)$ d'après ce qui précède.
- si $f(x_0) \neq v$, en divisant l'inégalité précédente par $||f(x_0)-v|| > 0$, on a $||f(x_0)-v|| \leqslant ||f(x)-v||$ ce qui prouve, avec la question 1 de cette partie, que x_0 est pseudo-solution de $(*)$.

Par double implication, $\boxed{x_0 \text{ est pseudo-solution de } (E) \iff (\forall x \in E,\ (f(x)|f(x_0)-v) = 0).}$

4 L'équation vectorielle de la question précédente s'écrit matriciellement $(AX)^T(AX_0-V) = 0$ pour tout vecteur colonne ayant $\dim(E)$ lignes, soit encore $X^TA^TAX_0 = X^TA^TV$. On peut transposer, ce qui montre que, pour tout X, $(V^TA - X_0^TA^TA)X = 0$. Mais comme ceci est vrai pour tout X, on sait d'après le cours que $V^TA - X_0^TA^TA = 0$, donc que $A^TAX_0 = A^TV$. Réciproquement, si $A^TAX_0 = A^TV$, on multiplie à gauche par X^T (avec X quelconque) pour obtenir $(f(x)|f(x_0)-v) = 0)$ en revenant aux vecteurs, ce qui entraîne que x_0 est pseudo-solution de $(*)$ d'après la question 3 de cette partie.

Par double implication, $\boxed{x_0 \text{ est pseudo-solution de l'équation } (E) \text{ si, et seulement si, } A^TAX_0 = A^TV.}$

5 En notant $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, comme $A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, l'équation $A^TAX_0 = A^TV$ s'écrit $\begin{cases} 3x-3z &= 0 \\ 6y &= 3 \\ -3x+3z &= 0 \end{cases}$

donc $\boxed{\text{les pseudo-solutions de } (*) \text{ sont les vecteurs } \left(x, \frac{1}{2}, x\right) \text{ où } x \in \mathbb{R}.}$

6 Application

6.1 En posant $f(\lambda,\mu) = \lambda a + \mu b$, le problème est de minimiser $||f(\lambda,\mu) - c||^2$, c'est-à-dire de déterminer les pseudo-solutions de $(*)$: $f(\lambda,\mu) = c$ car f est linéaire et la fonction racine carrée est strictement croissante. Plus précisément, par rapport aux notations précédentes, c'est le problème de la recherche des pseudo-solutions avec $\boxed{v = c \text{ et la matrice de } f \text{ dans les bases canoniques est } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}}$.

6.2 D'après le théorème du rang, f est injective si, et seulement si, elle est de rang 2, ce qui se traduit plus simplement ici par $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } a \text{ et } b \text{ ne sont pas colinéaires.}}$

6.3 On suppose donc a et b non colinéaires. Après calculs, $A^T A = \begin{pmatrix} ||a||^2 & (a|b) \\ (a|b) & ||b||^2 \end{pmatrix}$ donc l'équation matricielle de la question 4 devient, si $X_0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} ||a||^2 & (a|b) \\ (a|b) & ||b||^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}$.
Ce système est de Cramer car $\det(A^T A) = ||a||^2||b||^2 - (a|b)^2 > 0$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité : en effet, si on avait $\det(A^T A) = 0$, on aurait $|(a|b)| = ||a||\,||b||$ ce qui conduit à (a,b) liée, ce qui contredit l'hypothèse. Après des calculs de Cramer, on trouve une

$$\boxed{\text{unique pseudo-solution } (\lambda,\mu) \text{ de } (*) \text{ avec } \lambda = \frac{||b||^2(a|c) - (a|b)(b|c)}{||a||^2||b||^2 - (a|b)^2} \text{ et } \mu = \frac{||a||^2(b|c) - (a|b)(a|c)}{||a||^2||b||^2 - (a|b)^2}.}$$

PARTIE 3 : PSEUDO-INVERSE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

1 Construction

1.1 Soit z le projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Im}(f)$, alors par définition d'une projection orthogonale, on a $y' = y - z \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$. Comme $z \in \mathrm{Im}(f)$, il existe un vecteur $u \in E$ tel que $f(u) = z$. Comme le noyau de f et son orthogonal sont supplémentaires dans E, il existe $(x', x) \in \mathrm{Ker}(f) \times (\mathrm{Ker}(f))^\perp$ tel que $u = x + x'$. Par linéarité de f, $f(u) = f(x') + f(x) = f(x)$, de sorte que $\boxed{y = f(x) + y' \text{ avec } (x, y') \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp \times (\mathrm{Im}(f))^\perp.}$

1.2 Soit $(x_1, y_1') \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp \times (\mathrm{Im}(f))^\perp$ et $(x_2, y_2') \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp \times (\mathrm{Im}(f))^\perp$ tels que $y = f(x_1) + y_1' = f(x_2) + y_2'$. En soustrayant, on obtient $f(x_1) + y_1' = f(x_2) + y_2'$, donc $f(x_1 - x_2) = y_2' - y_1' \in (\mathrm{Im}(f))^\perp \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$. Ainsi, $f(x_1 - x_2) = y_1' - y_2' = 0_F$ donc $y_1' = y_2'$ et $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(f) \times (\mathrm{Ker}(f))^\perp = \{0_E\}$ donc $x_1 - x_2 = 0_E$. Par conséquent, $(x_1, y_1') = (x_2, y_2')$ et $\boxed{\text{il y a unicité du couple } (x, y') \text{ de la question précédente.}}$

1.3 Soit x et y deux vecteurs de F et a et b deux réels, par construction de g, on a $x = f(g(x)) + x'$ et $y = f(g(y)) + y'$ avec $(x', y') \in ((\mathrm{Im}(f))^\perp)^2$. Par linéarité de f, $ax + by = f(ag(x) + bg(y)) + ax' + by'$. Comme $ag(x) + bg(y) \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp$ et $ax' + by' \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$ (ce sont des sous-espaces), par définition de g, on a la relation $g(ax + by) = ag(x) + bg(y)$ qui montre bien que $\boxed{g \text{ est linéaire}}$.

2 Soit $x \in \mathsf{Ker}(g)$, comme $g(x) = 0_E$, il vient $x = f(g(x)) + x' = x' \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Ainsi, $\mathsf{Ker}(g) \subset (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Soit $x \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$, alors $x = f(g(x)) + x'$ avec $x' \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$, mais on a également $x = f(0_E) + x$ avec $(0_E, x) \in (\mathsf{Ker}(f))^{\perp} \times (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. L'unicité de cette écriture impose alors $g(x) = 0_E$ donc $x \in \mathsf{Ker}(g)$ et on a l'autre inclusion $(\mathrm{Im}(f))^{\perp} \subset \mathsf{Ker}(g)$. Ainsi, par double inclusion, $\boxed{\mathsf{Ker}(g) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}.}$.

Par définition de g, on a $\mathrm{Im}(g) \subset (\mathsf{Ker}(f))^{\perp}$. D'autre part, par la formule du rang appliquée à g puis à f et comme $\mathrm{Im}(f)$ et $(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ sont supplémentaires dans F, on a $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(F) - \dim(\mathsf{Ker}(g))$ donc $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(F) - \dim((\mathrm{Im}(f))^{\perp}) = \dim(F) - (\dim(F) - \dim(\mathrm{Im}(f)))$ ce qui conduit à la relation $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathsf{Ker}(f)) = \dim((\mathsf{Ker}(f))^{\perp})$, d'où, par inclusion et égalité des dimensions, cela donne bien $\boxed{\mathrm{Im}(g) = (\mathsf{Ker}(f))^{\perp}.}$

3 **Projecteurs orthogonaux**

3.1 Par construction de g, pour tout vecteur $x \in E$, on a $f(x) = f(g(f(x))) + y'$, avec $y' \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Comme on a clairement $y' = f(x) - f(g(f(x))) = f(x - g(f(x))) \in \mathrm{Im}(f)$, il vient $y' \in \mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ donc $y' = 0_F$ et $f(x) = f(g(f(x)))$. Ainsi, $f = f \circ g \circ f$ d'où $(g \circ f)^2 = g \circ (f \circ g \circ f) = g \circ f$: $g \circ f$ un projecteur de E.

De plus, on a toujours l'inclusion $\mathsf{Ker}(f) \subset \mathsf{Ker}(g \circ f)$. Pour $x \in \mathsf{Ker}(g \circ f)$, comme $g(f(x)) = 0_E$, on a $f(x) \in \mathsf{Ker}(g) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Mais comme on a aussi $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, on a donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Im}(f))^{\perp} = \{0_F\}$ donc $f(x) = 0_F$ et $x \in \mathsf{Ker}(f)$. Par double inclusion, $\mathsf{Ker}(g \circ f) = \mathsf{Ker}(f)$.

De même, on a toujours $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g) = (\mathsf{Ker}(f))^{\perp}$. La formule du rang appliquée à $g \circ f$ et l'égalité ci-dessus montrent que $\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \dim(E) - \dim(\mathsf{Ker}(g \circ f)) = \dim(E) - \dim(\mathsf{Ker}(f)) = \dim((\mathsf{Ker}(f))^{\perp})$. Par inclusion et égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(g \circ f) = (\mathsf{Ker}(f))^{\perp}$.

On peut donc conclure que $\boxed{g \circ f \text{ est le projecteur orthogonal de } E \text{ sur } (\mathsf{Ker}(f))^{\perp}.}$

3.2 Pour tout $y \in F$, on a par définition $f(g(y)) = f(g(f(g(y)))) + y'$, avec $y' \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que ce vecteur y' est nul, d'où $(f \circ g)^2 = f \circ g$: $f \circ g$ est donc un projecteur de F.

De plus, $(\mathrm{Im}(f))^{\perp} = \mathsf{Ker}(g) \subset \mathsf{Ker}(f \circ g)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$. Un raisonnement analogue à celui qui précède montre que ces inclusions sont des égalités et que $\boxed{f \circ g \text{ est le projecteur orthogonal de } F \text{ sur } \mathrm{Im}(f).}$

4 Soit B la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. La matrice A est de rang 2 donc f est surjective, ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. D'après la question 3.2 de cette partie, on a donc $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ d'où $AB = I_2$. Si on pose $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$, la relation $AB = I_2$ montre que $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & -b \\ a-1 & b+1 \end{pmatrix}$. Le noyau de f étant clairement la droite (par la formule du rang) engendrée par le vecteur $(1, -1, 1)$ (car $C_1 - C_2 + C_3 = 0$ dans A) et comme $\mathrm{Im}(g) = \mathsf{Ker}(f)^{\perp}$ d'après la question 2, les vecteurs $(a, 1-a, a-1)$ et $(b, -b, b+1)$ sont orthogonaux à $(1, -1, 1)$, ce qui impose $a = \dfrac{2}{3}$ et $b = -\dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire $\boxed{B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.}$.

5 Cas symétrique

5.1 Soit deux vecteurs $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$, soit alors $z \in E$ tel que $y = f(z)$, comme f est symétrique, on a la relation $(x|y) = (x|f(z)) = (f(x)|z) = (0_E|z) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) \subset (\mathrm{Im}(f))^\perp$. Par la formule du rang, $\dim((\mathrm{Im}(f))^\perp) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Par inclusion et égalité des dimensions, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^\perp.}$ Ainsi, E étant de dimension finie, $\boxed{\mathrm{Im}(f) = ((\mathrm{Im}(f))^\perp)^\perp = (\mathrm{Ker}(f))^\perp.}$

5.2 Soit x un vecteur propre de f et λ la valeur propre associée, supposée non nulle, de sorte que, par définition, on a $f(x) = \lambda x$. En particulier, $x = f\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ g - \mathrm{id}_E)$ (d'après 3.2) d'où $f(g(x)) = x = f\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$ et $f\left(\frac{1}{\lambda}x - g(x)\right) = 0_E$. Ainsi, $\frac{1}{\lambda}x - g(x) \in \mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^\perp$. D'autre part, $g(x) \in \mathrm{Im}(g) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp = \mathrm{Im}(f)$ (d'après les questions 2 et 5.1) et $x \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\frac{1}{\lambda}x - g(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Comme le vecteur $\frac{1}{\lambda}x - g(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Im}(f))^\perp = \{0_E\}$, il vient $g(x) = \frac{1}{\lambda}x$ ce qui prouve bien que $\boxed{\text{tout vecteur propre de } f \text{ associé à une valeur propre non nulle est vecteur propre de } g}$ (associé à la valeur propre inverse). D'autre part, on a vu aux questions 2 et 5.1 que $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^\perp = \mathrm{Ker}(g)$ donc $\boxed{\text{tout vecteur propre de } f \text{ associé à la valeur propre } 0 \text{ est vecteur propre de } g \text{ associé à la valeur propre } 0.}$

5.3 f étant un endomorphisme symétrique, il existe d'après le théorème spectral (que l'on verra plus tard dans l'année) une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Comme ce sont aussi des vecteurs propres de g, il existe des scalaires $\mu_1, \cdots, \mu_n$ tels que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $g(v_k) = \mu_k v_k$. Alors, pour deux vecteurs x et y de E qu'on écrit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k v_k$, on a par linéarité de g et comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E :

$$(g(x)|y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i v_i \middle| \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k y_k = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j v_j\right) = (x|g(y))$$

Ainsi, $\boxed{g \text{ est aussi un endomorphisme symétrique de } E.}$

6 D'après la question précédente il suffit de trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f pour que ce soit aussi une base formée de vecteurs propres de g. $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas un automorphisme si et seulement si $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Or, après calculs, $\det(A - \lambda I_3) = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6)$ donc les valeurs cherchées sont par exemple $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 6$.

- Comme $2C_2 + C_3 - 2C_1$ dans A, le vecteur $w_1 = (-2, 2, 1)$ est propre pour la valeur propre $\lambda_1 = 0$.
- Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et qu'on a, dans cette matrice, $C_1 + 2C_2 - 2C_3 = 0$, le vecteur $w_2 = (1, 2, -2)$ est propre pour la valeur propre $\lambda_2 = 3$.
- Comme $A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et que, dans cette matrice, on a $2C_1 + C_2 + 2C_3 = 0$, le vecteur $w_3 = (2, 1, 2)$ est propre pour la valeur propre $\lambda_3 = 6$.

On aurait pu résoudre les trois systèmes linéaires $AX = 0$, $AX = 3X$ et $AX = 6X$ pour trouver ces trois droites. Ces trois vecteurs forment une famille libre (à vérifier) donc forment une base de $\mathbb{R}^3$. Or, ils ont pour norme

$\sqrt{1+4+4} = 3$ donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ si on pose $v_1 = \frac{1}{3}w_1 = \frac{1}{3}(-2,2,1)$, $v_2 = \frac{1}{3}w_2 = \frac{1}{3}(1,2,-2)$ et $v_3 = \frac{1}{3}w_3 = \frac{1}{3}(2,1,2)$. Par construction, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et, par la formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$ avec $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Comme P est la matrice de passage entre deux bases orthonormées, on a vu dans le cours que $P^{-1} = P^T$. On a vu en 5.3 que v_1 est un vecteur propre de g associé à la valeur propre 0, et que v_2 (resp. v_3) est un vecteur propre de g associé à la valeur propre $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{6}$). Ainsi, $D' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$ ce qui donne, avec la formule de changement de base, $B = PD'P^T$. Après calculs, on a donc $\boxed{B = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}}$.