

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 02

PSI 1 2023-2024

du lundi 25/09 au vendredi 29/09

1 **Séries numériques, propriétés** : voir programme précédent

2 **Séries à termes positifs** : voir programme précédent

3 **Séries à termes réels ou complexes** : voir programme précédent

4 **Espaces préhilbertiens réels** :

- définition d'une forme bilinéaire symétrique définie positive ;
- forme quadratique associée, identités de polarisation, du parallélogramme ;
- inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, de MINKOWSKI, cas d'égalité ;
- produit scalaire et norme associée dans un espace préhilbertien réel ;
- angle non orienté entre deux vecteurs non nuls ;

5 **Orthogonalité** :

- vecteurs unitaires et orthogonaux dans un espace préhilbertien réel ;
- famille libre de vecteurs orthogonaux non nuls, relation de PYTHAGORE ;
- sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace (en somme directe) ;
- relation entre les orthogonaux et la somme, l'intersection ;

6 **En dimension finie** :

- espaces euclidiens, bases orthonormales ;
- procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT, existence de bases orthonormales ;
- relations entre les coordonnées et le produit scalaire, la norme dans une B.O.N. ;
- supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien ;
- projection orthogonale et expression vectorielle dans une B.O.N. ;
- distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie avec la projection orthogonale ;
- expression à l'aide du produit scalaire des formes linéaires : distance à une droite ou un hyperplan ;

7 **Intégrales sur un segment** :

- révisions de sup sur l'intégrale sur un segment des fonctions continues, égalité et inégalités classiques ;
- relations entre intégrales et primitives, théorème fondamental de l'intégration ;
- intégration par parties, TAYLOR reste intégral, changement de variable, sommes de RIEMANN ;
- définition des fonctions continues par morceaux sur un segment puis sur un intervalle ;
- généralisation de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux à valeurs complexes sur un segment ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir ce qu'est un produit scalaire et la norme euclidienne associée dans un espace réel (déf. 2.3)
- 2 énoncer le théorème sur l'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT (th. 2.8)
- 3 énoncer les relations entre les coordonnées des vecteurs et les produit scalaire, norme (th. 2.10)
- 4 énoncer le résultat sur la projection orthogonale sur F de dimension finie dans E préhilb. (prop. 2.14)
- 5 énoncer le théorème sur la distance d'un vecteur à un sous-espace (th. 2.15)
- 6 énoncer le théorème de représentation d'une forme linéaire dans E euclidien (th. 2.16)
- 7 prouver l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans un espace préhilbertien réel (prop. 2.1 et th. 2.4)
- 8 prouver l'inégalité de MINKOWSKI (triangulaire) dans un espace préhilbertien (prop. 2.2 et th. 2.3)
- 9 prouver que si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = {}^t P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (rem. 2.16)
- 10 prouver la relation sur la distance d'un vecteur à un hyperplan dans E euclidien (prop. 2.17)

Prévision pour la prochaine semaine : révision sur les espaces préhilbertiens réels et quasiment tout sur les intégrales.