DM 3 : DIRICHLET ET COMPAGNIE

PSI1 2023/2024 **pour vendredi 29 septembre 2023**

Notations et objectifs

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *et en cas de convergence de l'intégrale, on note* $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, *et en cas de convergence de l'intégrale, on note* $J_m = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$.

PARTIE 1 : ÉTUDE DE φ

1.1 **Étude de fonctions.** Étudier $d : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ et $\delta : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définies par $d(t) = t - 1 + \cos(t)$ et $\delta(t) = \dfrac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$. En déduire deux réels α et β telles que $\forall t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t} \leqslant \alpha$ et $0 \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \leqslant \beta$.

1.2 **Existence de la fonction φ sur $[0;+\infty[$.** Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$.
En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$.

1.3 **Limite de la fonction φ en $+\infty$.** Préciser le signe de $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$ pour $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.
En déduire que la fonction φ admet une limite finie λ en $+\infty$.
Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser **1.1**).

1.4 **Caractère C^k de la fonction φ** *: soit un réel* $a > 0$.

1.4.1 Pour $t > 0$ fixé, on définit $f_t : \left[\dfrac{a}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R}$ par $f_t(x) = e^{-xt}$. En appliquant une formule de Taylor à la fonction f_t, montrer que $\forall x \geqslant \dfrac{a}{2},\ \left|e^{-xt} - e^{-at} + (x-a)te^{-at}\right| \leqslant \dfrac{(x-a)^2}{2} t^2 e^{-at/2}$.

1.4.2 En déduire que $\left|\varphi(x) - \varphi(a) + (x-a)\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-at} dt\right| \leqslant \dfrac{(x-a)^2}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t) e^{-at/2} dt$ si $x \geqslant \dfrac{a}{2}$. Établir que φ est dérivable en a et donner l'expression de $\varphi'(a)$ à l'aide d'une intégrale.

De même, et on l'admet ici, φ *est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et que* $\forall x > 0,\ \varphi''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t) e^{-xt} dt$.

1.4.3 Expliciter $\varphi''(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$. En déduire la valeur de $\varphi'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.

1.5 **Expression explicite de la fonction $\varphi(x)$.**

1.5.1 Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$. Expliciter une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$.

1.5.2 Expliciter $\varphi(x)$ pour $x > 0$. Déterminer $\varphi(0)$. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

PARTIE 2 : ÉTUDE DE L'EXISTENCE DE J_m

2.1 **Étude de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$.** Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, *en cas de convergence de l'intégrale, on note* $I_k = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t} dt$.

2.2 **Étude de J_1.** Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties et choisir judicieusement la constante d'intégration).

2.3 **Étude de l'existence de I_k.** Préciser la nature de l'intégrale généralisée I_k selon la valeur de l'entier relatif k (on pourra utiliser une intégration par parties).

2.4 **Étude de la nature de J_m.**

Pour tout x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2};+\infty\right[$ et tout entier relatif k, on note $I_k(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{e^{ikt}}{t}dt$.

2.4.1 Exprimer, pour $m\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\left[\frac{\pi}{2};+\infty\right[$, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{(\sin t)^m}{t}dt$ à l'aide des intégrales $I_k(x)$.

2.4.2 En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p (donc la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^{2p+1}}{t}dt$).

2.4.3 Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^{2p}}{t}dt$ pour $p\in\mathbb{N}^*$?

2.4.4 Pour $p\in\mathbb{N}^*$, la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^{2p+1}}{t}dt$ est-elle absolue ?

PARTIE 3 : CALCUL DE J_{2p+1}

3.1 **Étude d'un procédé de calcul.**

On désigne par f une fonction continue sur $[-1;1]$, à valeurs réelles, impaire et dérivable en 0.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\gamma_n=\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\frac{f(\sin(t))}{t}dt$ et $\mu_n=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2tf(\sin(t))}{t^2-n^2\pi^2}$.
On admettra la relation suivante (en posant $\frac{\sin(0)}{0}=1$), $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\sin(x)}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x\sin(x)}{x^2-n^2\pi^2}=1$.
On admet que $S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2t\,f(\sin(t))}{t^2-n^2\pi^2}$ définit une fonction $S:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ continue et qu'on peut inverser somme et intégrale de sorte que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2tf(\sin(t))}{t^2-n^2\pi^2}\right)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n\frac{2tf(\sin(t))}{t^2-n^2\pi^2}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n\,.$$

3.1.1 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n$. Établir, pour $n\in\mathbb{N}^*$, une relation entre γ_n et μ_n.

3.1.2 Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{f(\sin t)}{t}dt$.

Montrer l'égalité $\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(t)dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{f(\sin t)}{t}dt$.

3.1.3 Justifier la convergence des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin t)}{\sin t}dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin t)}{t}dt$.

3.1.4 Exprimer $\int_0^{+\infty}\frac{f(\sin(t))}{t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}dt$ à l'aide de l'intégrale d'une fonction continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3.2 **Application au calcul de J_{2p+1}.**

3.2.1 En utilisant les résultats obtenus en **3.1**, retrouver la valeur de J_1 (déjà obtenue en 2.2).

3.2.2 Calculer J_3.

3.2.3 Plus généralement, expliciter J_{2p+1} pour tout $p\in\mathbb{N}$.