# PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 03

**PSI 1 2023-2024** **du lundi 02/10 au vendredi 06/10**

**1** **Espaces préhilbertiens réels, orthogonalité, espaces euclidiens** : voir programme précédent

**2** **Intégrales sur un segment** : voir programme précédent

**3** **Comparaison locale des fonctions** : notations de LANDAU, dév. limités : voir programme précédent

**4** **Intégrales convergentes et divergentes** : $f : I \to \mathbb{K}$ avec $I$ intervalle et $f$ continue par morceaux sur $I$

- convergence de $\int_{[a;b[} f$ (resp. $\int_{]a;b]} f$) par l'existence d'une limite finie de $\int_a^x f$ (resp. $\int_x^b f$) quand $x$ tend vers $b$ (resp. vers $a$) : définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- définition de la convergence de $\int_{]a;b[} f$ par l'existence de $\int_{]a;c]} f$ et de $\int_{[c;b[} f$ pour un certain $c \in ]a;b[$ : indépendance de cette définition par rapport à $c$ et définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- cas particulier des fonctions positives en bornant une "primitive" ;
- convergence des intégrales de RIEMANN sur $]0;1]$ ou $[1;+\infty[$, et des $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$ selon $\lambda$ ;
- Si $f \in C^0(]a;b[, \mathbb{K})$ et $\varphi : ]\alpha;\beta[ \to ]a;b[$ bijection strictement croissante de classe $C^1$ alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt$ sont de même nature et $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt$ ; calcul en pratique ;
- Si $f, g : \widetilde{]a;b[} \to \mathbb{K}$ de classe $C^1$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x)$ existent et sont finies, $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ et $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ sont de même nature et $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$ ; pratique ;
- techniques pour montrer qu'une intégrale converge ou diverge, pour calculer les intégrales généralisées ;

**5** **Fonctions intégrables** :

- si $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, on dit que $\int_I f$ converge absolument si $\int_I |f|$ converge ;
- l'absolue convergence d'une intégrale implique sa convergence et inégalité triangulaire associée ;
- on dit que $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux est intégrable si $\int_I f$ est absolument convergente ;
- CHASLES généralisé, caractérisation avec limite d'une "primitive" de $|f|$ aux bornes de l'intervalle ;
- théorème de comparaison : par $\sim$, $O$, $o$, majoration, minoration ;

**QUESTIONS DE COURS :**

1 définir ce qu'est une fonction continue par morceaux sur un intervalle (déf. 3.3 et 3.4)
2 définir la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ si $f : ]a;b[ \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux (déf. 3.10)
3 énoncer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ sur les intégrales (prop. 3.2, th. 3.3, prop. 3.34)
4 énoncer la formule de TAYLOR reste intégral (th. 3.10)
5 énoncer le théorème de changement de variable sur des intervalles ouverts (th. 3.26)
6 énoncer le théorème d'intégration par parties sur des intervalles ouverts (th. 3.27)
7 énoncer le théorème de comparaison concernant l'intégrabilité (th. 3.30)
8 prouver que pour $f$ continue sur $I$, $u, v : J \to I$ dérivables, $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable (prop. 3.7)
9 prouver que si $f$ est continue sur $[a;b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $\lim\limits_{x\to b^-} \int_x^b f(t)dt = 0$ (prop. 3.19)
10 prouver que si $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 0$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iat}}{t^\alpha}dt$ converge (exem. 3.36)

**Prévision pour la prochaine semaine** : tout sur les intégrales et début des révisions sur l'algèbre linéaire.