TD 05 : INTÉGRALES

PSI 1 2023-2024

vendredi 29 septembre 2023

5.1 a. Bien sûr que non, on a vu dans le cours un contre-exemple d'une fonction continue par morceaux, positive, intégrable et qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

b. Avec $\sin(x-t) = \sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)$ et la linéarité de l'intégrale, comme les fonctions sont toutes continues sur le segment $[0; x]$, $\forall x \geq 0$, $g(x) = f(x) + \sin(x) \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt$. Comme $\cos a f$ et $\sin a f$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la dérivée de fonction $x \mapsto \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt$ est $x \mapsto \cos(x)a(x)f(x)$, et $\left(\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt\right)' = \sin(x)a(x)f(x)$. Par opérations et simplifications, $g'(x) = f'(x) + \cos(x) \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt$. Puis, $g''(x) = f''(x) - \sin(x) \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \cos(x) \int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt + \cos^2(x)a(x)f(x) + \sin^2(x)a(x)f(x)$ donc $g''(x) = f''(x) + f(x) - g(x) + a(x)f(x) = -g(x)$ donc $g'' + g = 0$ (E) sur $\mathbb{R}_+$.

c. Les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}_+$ de cette équation différentielle (E) sont les fonctions g telles que $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \geq 0$, $g(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ donc $|g| \leq |A| + |B| = C$ par exemple et g est bornée. Comme $f(x) = g(x) - \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$, en passant aux valeurs absolues avec l'inégalité triangulaire, on obtient, $\forall x \geq 0$, $|f(x)| \leq |g(x)| + \int_0^x |\sin(x-t)||a(t)||f(t)|dt \leq C + \int_0^x |a(t)f(t)|dt$ car $|\sin| \leq 1$.

d. Posons $h : x \mapsto \int_0^x |a(t)f(t)|dt$, comme la fonction $|a||f|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(x) = |a(x)||f(x)| \leq C|a(x)| + |a(x)|h(x)$ d'après la question c.. En notant $A(x) = \int_0^x |a(t)|dt$, on a $(e^{-A(x)}h(x))' \leq C|a(x)|e^{-A(x)} = C(-e^{-A(x)})'$. On intègre cette inégalité entre 0 et x pour avoir $e^{-A(x)}h(x) \leq C(1 - e^{-A(x)}) \leq C$. Alors, on peut majorer $\forall x \geq 0$, $h(x) \leq Ce^{A(x)}$ et comme a est intégrable, A est croissante (car $A' = |a| \geq 0$) et possède une limite finie $C \exp\left(\int_0^{+\infty} |a(t)|dt\right)$ en $+\infty$ donc A est bornée sur $\mathbb{R}_+$, d'où h est bornée sur $\mathbb{R}_+$ car $|h| \leq Ce^A$. Enfin, f est aussi bornée sur $\mathbb{R}_+$ car $|f| \leq C + h$.

Toutes les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de (E) sont des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$ si a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

5.2 La fonction $g : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est continue, positive sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\forall x \in J = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$

donc, puisque $\tan(u) \underset{0}{=} u$, on a l'équivalent $g(x) \underset{\pi/2}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}}$ donc g est intégrable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par comparaison

aux intégrales de RIEMANN car $\frac{1}{2} < 1$. Ainsi, $\int_0^{\pi/2} g(t)dt$ converge donc I existe.

La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est de classe C^1 , bijective et strictement croissante de J dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\varphi'(x) = \frac{1 + \tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}$. Comme on a $g(x) = \sqrt{\tan(x)} = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ en posant $f : u \mapsto \frac{2u^2}{1+u^4}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de changement de variable montre que, en posant $u = \sqrt{\tan(x)} = \varphi(x)$, on a la relation $I = \int_0^{+\infty} f(u)du$. Il y a maintenant deux méthodes :

(1) Par le changement de variable $u = \frac{1}{v} = \psi(v)$, comme ψ réalise une bijection C^1 strictement décroissante

de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du = \int_{+\infty}^0 \frac{2(1/v)^2}{1+(1/v)^4} \left(-\frac{1}{v^2}\right) dv = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+v^4} dv$ après simplifications.

Or $L = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{1+u^4} du = \left[\text{Arctan}(u^2) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. De plus, on peut décomposer le dénominateur

avec les identités remarquables car $1+u^4 = (1+u^2)^2 - 2u^2 = (u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)$

ce qui nous incite à écrire $I + \sqrt{2}L + I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du + \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{2}u}{1+u^4} du + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^4} du$ d'où

$I + \sqrt{2}L + I = \int_0^{+\infty} \frac{2(u^2 + \sqrt{2}u + 1)}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)} du$ donc, avec des techniques classiques, on obtient

$I + \sqrt{2}L + I = \int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} du = \int_0^{+\infty} \frac{4}{(\sqrt{2}u - 1)^2 + 1} du = 2\sqrt{2} \left[\text{Arctan}(\sqrt{2}u - 1) \right]_0^{+\infty} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$.

On en déduit que $I = \frac{1}{2} \left(\frac{3\sqrt{2}\pi}{2} - \sqrt{2}L \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(2) Par une décomposition en éléments simples classique (mais hors programme en PSI) on arrive à la

relation $\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2u - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{2u + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right)$

donc $\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2u - \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{2u + \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) + \frac{1}{2(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} + \frac{1}{2(u^2 + \sqrt{2}u + 1)}$ et, après

calculs, $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{u^2 - \sqrt{2}u + 1}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\text{Arctan}(\sqrt{2}u - 1) + \text{Arctan}(\sqrt{2}u + 1) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

5.3 a. Par intégration par parties, comme f est de classe C^1 sur $[a; b]$ et que $\cos$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, on a, pour

tout entier $n \geq 1$, la relation $I_n = \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) f(t) \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt$. Comme f' est continue sur le segment $[a; b]$, il existe $M \geq 0$ tel que $\forall t \in [a; b], |f'(t)| \leq M$. Par inégalités triangulaires, on obtient $|I_n| \leq \frac{1}{n} (|f(a)| + |f(b)| + (b-a)M)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (lemme de RIEMANN-LEBESGUE).

b. Tout d'abord, $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 en posant

$g(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. En posant $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto 1 - \cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1

sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ car $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par $1 - \cos(t) \underset{+\infty}{=} O(1)$. Les intégrales

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ sont donc de même nature. Or $g : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est continue et positive

sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = \frac{1}{2}$ toujours car $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ et $|g(t)| \leq \frac{2}{t^2}$

ce qui garantit son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge car elle converge absolument,

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge aussi et on admet que $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ (DIRICHLET).

c. La fonction $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)^2}{n \sin(t)^2}$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant

$f_n(0) = n$ car $\sin(nt) \underset{0}{\sim} nt$ et $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ donc $f_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{n^2 t^2}{t^2} = n^2$. Ainsi, J_n est bien définie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Or on sait que $\cotan'(t) = -\frac{1}{\sin^2(t)}$ et $\cotan(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ donc, en posant $u = -\cotan$ et $v : t \mapsto \sin(nt)^2$,

les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \cotan(t) \sin(nt)^2 = 0$, par intégration par

parties, on a $J_n = \left[-\frac{\cotan(t) \sin(nt)^2}{n} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2 \sin(nt) \cos(nt) \cotan(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \cotan(t) dt$.

L'équivalent de cotan en 0 nous incite à écrire $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \left(\cotan(t) - \frac{1}{t} \right) dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt$ (les deux intégrales convergent car $\frac{\sin(2nt)}{t} \underset{0}{\sim} 2n$). Comme on se rappelle que $\tan(t) \underset{0}{=} t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, on a $\cotan(t) - \frac{1}{t} \underset{0}{=} \frac{1}{t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)} - \frac{1}{t} \underset{0}{=} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2)} - 1 \right) \underset{0}{=} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{t^2}{3} - 1 + o(t^2) \right) \underset{0}{=} -\frac{t}{3} + o(t)$. Ainsi, la fonction $h : t \mapsto \cotan(t) - \frac{1}{t}$ se prolonge par continuité (avec $h(0) = 0$) en une fonction dérivable sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ avec $h'(0) = -\frac{1}{3}$. Comme $h'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2(t)}$, le calcul analogue $\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2(t)} \underset{0}{=} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)} \underset{0}{=} \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)} \right) \underset{0}{=} \frac{1}{t^2} \left(1 - \left(1 + \frac{t^2}{3} \right) + o(t^2) \right) \underset{0}{=} -\frac{1}{3} + o(1)$ nous permet de conclure que h est de classe C^1 sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ car $\lim_{t \rightarrow 0^+} h'(t) = -\frac{1}{3} = h'(0)$. La première question nous apprend alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\cotan(t) - \frac{1}{t} \right) \sin(2nt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} h(t) \sin(2nt) dt = 0$. De plus, par le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{u}{2n}$, comme φ réalise une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0; n\pi]$ dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a la relation $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u} du$ et cette quantité tend vers A quand n tend vers $+\infty$ d'après la question **b.**. Au final, en sommant, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$. En fait, la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ est constante et elle vaut $\frac{\pi}{2}$, mais c'est une autre histoire !

- 5.4** a. La fonction $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'intégrale $\int_x^{+\infty} f$ converge pour $x > 0$ car $g(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées et que $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge d'après RIEMANN. Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f(x) = \int_1^{+\infty} g(t) dt - \int_1^x g(t) dt$ et que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = -g(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.
- b. Si $x > 0$, on pose $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \frac{1}{t}$, comme les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient par intégration par parties la relation $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^2}$. Or, comme $\forall t \geq x$, $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2}$, par croissance et linéarité de l'intégrale, on a $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^2} \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{x^2} = \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$. On a donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.
- Si $x \in]0; 1[$, on écrit $f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et, comme $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$, ceci nous incite à écrire la relation $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln(x) + \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt$. Par convexité de la fonction exp, on a $e^u \geq 1 + u$ donc $\forall t \in]0; 1[$, $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$ donc $0 \leq \frac{e^{-t}-1}{t} \leq 1$. Ainsi, $0 \leq \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt \leq 1 - x \leq 1$ donc $\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt \underset{0}{=} O(1)$. Ainsi, $f(x) \underset{0}{=} -\ln(x) + O(1) \underset{0}{=} f(x) + o(\ln(x))$ ce qui signifie que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.
- c. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ d'après la question précédente donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. De plus, les fonctions $u = f$ et $v = \text{id}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $xf(x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$ et $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$ d'après **b.** donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées ce qui montre, par intégration par parties,

que $\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.

Avec le théorème de FUBINI (hors programme), on aurait pu utiliser les intégrales doubles pour avoir plus simplement $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{e^{-t}}{t} dx \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.

5.5 a. La fonction $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse donc elle y admet des primitives.

De plus, $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2 = -2y'^2 - 2yy' - 2yy'' - 2y'y'' = -(y^2)' - (y'^2)' - (2yy')' = -(y + y')^2$. Ainsi, $-(y + y')^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$.

b. L'inégalité classique $|yy''| \leq \frac{y^2 + y''^2}{2}$ montre, par comparaison, comme $y^2 + y''^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse, que yy'' est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} yy''$ converge.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, par intégration par parties puisque les fonctions y et y' sont de classe C^1 sur $[0; x]$, on a $\int_0^x y'^2 = [yy']_0^x - \int_0^x yy''$. Or on sait que $\int_0^{+\infty} yy''$ converge et que, par le théorème de la limite monotone, comme $x \mapsto \int_0^x y'^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une limite finie ou elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Il en est donc de même pour yy' . Mais si on avait $\lim_{x \rightarrow +\infty} yy' = +\infty$, on aurait

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x yy' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x = +\infty$ ce qui montrerait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^2(x) = +\infty$, en contradiction avec la convergence de $\int_0^{+\infty} y^2$. Ainsi, par l'absurde, on a prouvé que $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge.

c. Comme avant $|yy'| \leq \frac{y^2 + y'^2}{2}$ donc yy' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car y^2 et y'^2 le sont et, à nouveau, $\int_0^{+\infty} yy'$ converge. Or $2 \int_0^x y(t)y'(t)dt = [y^2]_0^x = y(x)^2 - y(0)^2$, donc y^2 admet une limite finie en $+\infty$. Mais comme $\int_0^{+\infty} y^2$ converge par hypothèse, cette limite est forcément nulle donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

d. À nouveau, $|y'y''| \leq \frac{y'^2 + y''^2}{2}$ donc $y'y''$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car y'^2 et y''^2 le sont donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} y'y''$ converge. Ainsi $2 \int_0^x y'(t)y''(t)dt = [y'^2]_0^x = y'(x)^2 - y'(0)^2$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Si on note $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)^2 \in \mathbb{R}_+$, comme $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge, on a forcément $\ell = 0$ ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$.

e. Comme y, y', y'' sont de carrés intégrables d'après ce qui précède, la fonction $y + y' + y''$ l'est aussi donc $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par somme. De toutes façons, pour $x \geq 0$, $\int_0^x (y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2) = [-(y + y')^2]_0^x$ d'après la question **a.** et $\lim_{+\infty} (y + y')^2 = 0$ d'après les questions **c.** et **d.**

En passant à la limite, on a $\int_0^{+\infty} (y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2) = (y(0) + y'(0))^2$. $\int_0^{+\infty} y^2 - \int_0^{+\infty} y'^2 + \int_0^{+\infty} y''^2 - \int_0^{+\infty} (y + y' + y'')^2 = (y(0) + y'(0))^2$ par linéarité de l'intégrale d'où $\int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2 - \int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} (y + y' + y'')^2 + (y(0) + y'(0))^2 \geq 0$ et l'inégalité attendue.

f. Pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité de la question précédente, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $y(0) + y'(0) = 0$ et que (E) : $y'' + y' + y = 0$. Comme les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et j^2 , les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de (E) sont les fonctions $y : x \mapsto \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{x}{2}}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Comme $y(0) = A$ et $y'(0) = -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2}$, la condition $y(0) + y'(0) = 0$ équivaut à $\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2} = 0$ ou $A = -\sqrt{3}B$.

Ainsi, les fonctions y telles que $\int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$ sont les fonctions (en posant $\lambda = 2B \in \mathbb{R}$)

$$y : x \mapsto \lambda \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{x}{2}} = \lambda \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) e^{-\frac{x}{2}}.$$

Questions de cours :

• Soit un intervalle I et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et de carré intégrables sur I . Alors, puisque $|fg| \leq \frac{f^2 + g^2}{2}$, l'intégrale $\int_I fg$ converge par comparaison. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \int_I (f + tg)^2$; l'intégrale converge car $(f + tg)^2 = f^2 + 2tfg + t^2g^2$ est intégrable sur I par somme de fonctions intégrables. Ainsi, φ est bien définie et elle est polynomiale par linéarité de l'intégrale et on a $\varphi(t) = \int_I f^2 + 2t \int_I fg + t^2 \int_I g^2$. Traitons deux cas :

– Si $\int_I g^2 = 0$, alors φ est affine et positive sur $\mathbb{R}$ donc elle est constante et on a donc $\int_I fg = 0$.

Alors l'inégalité $\left(\int_I fg\right)^2 \leq \int_I f^2 \times \int_I g^2$ est clairement vraie ($0 \leq 0$).

– Si $\int_I g^2 > 0$, comme φ est positive sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif (on ne peut pas avoir deux racines réelles car φ serait négative entre les deux). Ainsi, $\Delta = 4 \int_I f^2 \times \int_I g^2 - 4 \left(\int_I fg\right)^2 \leq 0$ ce qui est à nouveau l'inégalité $\left(\int_I fg\right)^2 \leq \int_I f^2 \times \int_I g^2$.

Dans les deux cas, on a l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $\left(\int_I fg\right)^2 \leq \int_I f^2 \times \int_I g^2$.

• Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que f est nulle sur $\left[0; \frac{3}{4}\right]$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est affine sur $\left[n - \frac{1}{2^{2n}}; n\right]$ et sur $\left[n; n + \frac{1}{2^{2n}}\right]$ avec $f\left(n - \frac{1}{2^{2n}}\right) = f\left(n + \frac{1}{2^{2n}}\right) = 0$ et $f(n) = 2^{n+1}$ et telle que f soit nulle partout ailleurs que sur ces intervalles. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on trouve $\int_{\mathbb{R}_+} f = 2$ bien que la fonction f ne tende pas vers 0 en $+\infty$. En effet, si $x_n = n + \frac{1}{2^{2n}}$, on sait calculer $\int_0^{x_n} f = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \times 2^{k+1} \times \left(2 \times \frac{1}{2^{2k}}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ qui tend vers 2.

5.6 a. La fonction $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{(x^2 - x^3)^{1/3}} = x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}$ est continue sur $]0; 1[$. De plus, $f(x) \sim \frac{1}{1 - (1-x)^{1/3}}$ et $f(x) \sim \frac{1}{0^+ x^{2/3}}$ donc, d'après RIEMANN puisque $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$, f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$ et $]0; \frac{1}{2}]$ donc sur $]0; 1[$. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$ converge donc I existe.

Même si ce n'est pas demandé, on peut transformer l'intégrale I en posant $x = \varphi(u) = \frac{u^3}{1+u^3}$ car la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow]0; 1[$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 dont la bijection réciproque est la fonction $\varphi^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$. Par changement de variable, $I = \int_0^{+\infty} f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$ (après calculs).

On effectue ensuite le changement de variable $u = \psi(v) = \frac{1}{v}$ dans $\int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$ car $\psi :]0; 1[\rightarrow [1; +\infty[$ est une bijection strictement décroissante de classe C^1 donc $\int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} = -\int_1^0 \frac{v dv}{1+v^3}$ (après calculs). On obtient donc, puisque v est une variable muette qu'on remplace avantageusement par u et que l'on factorise $1+u^3 = (1+u)(u^2 - u + 1)$, $I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^3} + \int_0^1 \frac{u du}{1+u^3} = \int_0^1 \frac{(1+u)du}{1+u^3} = \int_0^1 \frac{du}{u^2 - u + 1}$.

b. Avec cette expression de I , et en mettant $u^2 - u + 1$ sous la forme $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$, on

trouve $I = \int_0^1 \frac{du}{u^2 - u + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} du}{\left(1 + \left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{Arctan} \left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ par

imparité de Arctan. Or $\text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$ donc $I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

5.7 a. Si $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t \sin(xt)}{1+t^2}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc y est intégrable et $f(0)$ existe.

L'existence de $f(x)$ et celle de $f(-x)$ sont équivalentes par imparité de la fonction $\sin$ et, en cas de convergence, on aura $f(-x) = -f(x)$ donc f est une fonction impaire sur son ensemble de définition.

Soit $x > 0$, posons $u : t \mapsto -\frac{\cos(xt)}{x}$ et $v : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = 0$

et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, comme $u'(t) = \sin(xt)$ et $v'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, les

intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$ sont de même nature et, en cas de convergence, on

aura $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$. Or $g_x : t \mapsto \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ceci montre l'existence de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f est définie

et impaire sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$.

b. Pour $x > 0$, puisque $f(x)$ existe, on effectue le changement de variable $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ strictement

croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, et $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x} \cdot \frac{\sin(u)}{1 + \frac{u^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} du = \int_0^{+\infty} \frac{u \sin(u)}{x^2 + u^2} du$.

Ainsi, $f(x) - I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x^2 + u^2} - \frac{1}{u} \right) \sin(u) du = -x^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u(x^2 + u^2)} du$. Comme on sait que $|\sin(u)| \leq u$

et que la fonction $u \mapsto \frac{1}{x^2 + u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut majorer par inégalité triangulaire et on

obtient $0 \leq |I - f(x)| \leq x^2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{x^2 + u^2} = x^2 \left[\frac{1}{x} \text{Arctan} \left(\frac{u}{x} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi x}{2}$. Par théorème d'encadrement,

comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x}{2} = 0$, on obtient la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I$.

Comme $|\cos(xt)| \leq 1$ et que la fonction $t \mapsto \frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, encore une fois par inégalité

triangulaire, avec l'expression vue en **a.**, on a $|f(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2} dt$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge d'après l'énoncé, on peut utiliser CHASLES pour l'écrire sous la

forme $I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on effectue le changement de variable $t = u + k\pi = \varphi_k(u)$ dans

$\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ avec φ_k de classe C^1 sur le segment $[0; \pi]$ pour avoir $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u + k\pi)}{u + k\pi} du$.

Or $\sin(u + k\pi) = (-1)^k \sin(u)$ ce qui donne bien $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$. Finalement, on a

bien une expression de I sous forme de somme de série numérique, $I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$.

d. Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$. Alors $u_k > 0$ car $\sin$ est strictement positive sur $]0; \pi[$ et

que $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u + k\pi}$ est continue sur $[0; \pi]$. Comme $\forall u \in [0; \pi]$, $\frac{\sin(u)}{u + (k+1)\pi} \leq \frac{\sin(u)}{u + k\pi}$, on obtient $u_{k+1} \leq u_k$

par croissance de l'intégrale. De plus, si $k \geq 1$, il vient $0 \leq u_k \leq \int_0^\pi \frac{1}{k\pi} du$ en majorant $\sin(u)$ par 1 et en minorant $u + k\pi$ par $k\pi$. Ainsi, $0 \leq u_k \leq \frac{1}{k}$ donc, par encadrement, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$. Comme la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, le critère spécial des séries alternées montre que $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ converge. On le savait déjà d'après la question précédente. Mais il dit aussi que les sommes partielles consécutives constituent un encadrement de la somme I. Ainsi, pour tout entier n , en notant $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$, on a la double inégalité $S_{2n+1} \leq I \leq S_{2n}$. En particulier, $u_0 - u_1 \leq I \leq u_0$ donc $I \geq u_0 - u_1$. Or, en écrivant $u_0 - u_1 = \int_0^\pi \sin(u) \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+\pi} \right) du = \int_0^\pi \frac{\pi \sin(u)}{u(u+\pi)} du$, comme $u \mapsto \frac{\pi \sin(u)}{u(u+\pi)}$ est continue, positive et non nulle sur $[0; \pi]$, on a $u_0 - u_1 > 0$ donc $I > 0$. On le sait déjà car on connaît l'intégrale de DIRICHLET $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ mais ce n'est pas au programme et ce qui précède montre bien que $I > 0$.

Comme $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I > 0$, la fonction f n'est pas continue en 0.

5.8 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x \sqrt{t(1+t)}}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{x+(1/2)}}$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+(3/2)}}$. D'après le critère de RIEMANN, g_x est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $x + \frac{1}{2} < 1$ et g_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\frac{3}{2} + x > 1$ donc f est définie sur $I =]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ car pour une fonction continue positive, la convergence ou l'absolue convergence de l'intégrale sont équivalentes et que g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si elle l'est sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$.

b. Pour $x \in I$, on pose $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est strictement décroissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = \int_{+\infty}^0 \frac{\sqrt{u}}{u^{-x}(1+u^{-1})} \left(-\frac{du}{u^2} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{-x}\sqrt{u(1+u)}} = f(-x)$ donc f est paire.

c. On a admis qu'en notant $g : (x, t) \mapsto \frac{1}{t^x \sqrt{t(1+t)}} = \frac{e^{-x \ln(t)}}{\sqrt{t(1+t)}}$, on a $\forall x \in I$, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt$ (c'est la formule de LEIBNIZ). On peut bien sûr le montrer en utilisant deux fois le théorème de dérivation sous le signe somme (voir plus tard dans l'année). Comme $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{(-\ln(t))^2 e^{-x \ln(t)}}{\sqrt{t(1+t)}} = \frac{(-\ln(t))^2}{t^x \sqrt{t(1+t)}} \geq 0$, on a $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt \geq 0$ donc f est convexe. Comme f est paire et dérivable, sa dérivée en 0 est nulle donc, comme f' est croissante car $f'' \geq 0$ sur l'intervalle I , f' est positive sur $]0; \frac{1}{2}[$ et négative sur $]-\frac{1}{2}; 0]$ donc f admet son minimum absolu en 0. Comme $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)}} = [2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{t})]_0^{+\infty} = \pi$, on a bien $\forall x \in I$, $f(x) \geq f(0) = \pi$.

d. Comme $\frac{1}{(1/2) - x} = \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{x+(1/2)}} = \left[\frac{t^{(1/2)-x}}{(1/2)-x} \right]_0^1$, on évalue la différence entre $\int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}}$ pour $x \in I \cap \mathbb{R}_+$. Or $\left| \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}} - \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}} \right| = \int_0^1 \frac{t dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}}$ et, comme $\frac{t}{1+t} \leq t$, $\int_0^1 \frac{t dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}} \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^{x-(1/2)}} = \left[\frac{t^{(3/2)-x}}{(3/2)-x} \right]_0^1 = \frac{1}{(3/2)-x} \leq 1$ d'où $\left| \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}} - \frac{1}{(1/2)-x} \right| \leq 1$.

e. Avec CHASLES, $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}} = \frac{1}{(1/2)-x} + O(1)$ avec **d.** De plus, $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+(3/2)}} = \left[\frac{t^{-(1/2)-x}}{-(1/2)-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{(1/2)+x} \leq 2$ donc

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}} = O(1)$. Par somme, $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - (1/2) - x} + O(1)$. Or $\lim_{x \rightarrow (1/2)^-} \frac{1}{(1/2) - x} = +\infty$ donc $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - (1/2) - x} + o\left(\frac{1}{(1/2) - x}\right)$, d'où $f(x) \sim \frac{1}{\frac{1}{2} - (1/2) - x}$. Par parité de f , on a aussi $f(x) \sim \frac{1}{\frac{1}{2} + (1/2) + x}$.

5.9 a. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto e^{-(1-i)t} t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(t)| = t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} t^n dt$ existe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u(t) = t^n$ et $v(t) = \frac{e^{(i-1)t}}{i-1}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc $I_n = 0 - \frac{n}{i-1} \int_0^{+\infty} e^{(i-1)t} t^{n-1} dt = \frac{n(i+1)}{2} I_{n-1}$ par intégration par parties. Par une récurrence très simple, puisque $I_0 = \left[\frac{e^{(i-1)t}}{i-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-i} = \frac{i+1}{2}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n! \left(\frac{i+1}{2}\right)^{n+1}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|g_n(t)| \leq e^{-t^{1/4}} t^n = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n dt$ existe. On effectue dans J_n le changement de variable $t = u^4 = \varphi(u)$ avec φ qui est strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, de sorte que $J_n = 4 \int_0^{+\infty} e^{-u} \sin(u) u^{4n+3} du = 4 \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} e^{iu} u^{4n+3} du \right)$ donc $J_n = 4 \operatorname{Im} (I_{4n+3})$. Or $I_{4n+3} = (4n+3)! \left(\frac{i+1}{2}\right)^{4n+4} = (4n+3)! \left(\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)^{4(n+1)} = (4n+3)! (-1)^{n+1}$ est réel donc $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n dt = 0$.

5.10 • Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(E_0) : y' - y = 0$ associée à (E) sont les $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $y(x) = \lambda e^x$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$). On cherche une solution particulière de (E) par variation de la constante, avec $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $y(x) = \lambda(x) e^x$ et, en reportant, $\lambda'(x) e^x = f(x)$, soit $\lambda(x) = e^{-x} f(x)$. En prenant pour λ la primitive de $x \mapsto e^{-x} f(x)$ qui s'annule en 0, $\lambda(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt$, ce qui montre que $x \mapsto e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ est solution particulière de (E) . Par structure affine des solutions de (E) , les solutions de (E) sont les $F_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $F_C : x \mapsto C e^x + e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt = e^x \left(C + \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

- Pour l'existence, il semble logique de prendre la constante C qui rend petite la quantité $C + \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ quand x tend vers $+\infty$. Tout d'abord, comme $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|e^{-t} f(t)| \leq |f(t)|$ et que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison donc $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ converge et on pose donc $C_0 = -\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{C_0}(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ par CHASLES. Vérifions que F_{C_0} est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\forall t \in [x; +\infty[$, $|e^{-t} f(t)| \leq e^{-x} |f(t)|$, on obtient la majoration $|F_{C_0}(x)| = e^x \left| \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right| \leq e^x \int_x^{+\infty} |f(t)| e^{-t} dt \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ donc F_{C_0} est bornée sur $\mathbb{R}$. Définissons donc $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = F_{C_0}(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$. Cette fonction F est solution de (E) et elle est bornée sur $\mathbb{R}$.
- Les solutions de (E) sont donc aussi les $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $y(x) = F(x) + \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \neq 0$, comme F est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda e^x = \pm\infty$, la fonction y n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
- En conclusion, il existe donc une unique solution F de (E) bornée sur $\mathbb{R}$ et il s'agit de la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$.

- On veut maintenant montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$, or on dispose de la majoration établie précédemment $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq G(x) = e^x \int_x^{+\infty} |f(t)|e^{-t} dt$, ce qui nous conduit à nous intéresser à l'intégrabilité de G . Or, en écrivant, $G(x) = e^x \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t} dt - \int_0^x |f(t)|e^{-t} dt \right)$, comme $t \mapsto |f(t)|e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $G'(x) = G(x) - e^x |f(x)|e^{-x}$ donc $G' = G - |f|$. Par conséquent, G est une primitive de $G - |f|$, ce qui montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} (G - |f|)$ converge si et seulement G admet des limites finies en $\pm\infty$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, on a vu ci-dessus que $G(x) \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt$ donc, comme $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge, on sait d'après le cours que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} |f(t)| dt = 0$ (reste). Par encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.
- Soit $\varepsilon > 0$, comme $\int_{-\infty}^0 |f|$ converge, il existe $A \in \mathbb{R}_-$ tel que $\int_{-\infty}^A |f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit un réel $x \leq A$, comme on a $G(x) = \left| e^x \int_x^A e^{-t} f(t) dt + e^x \int_A^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right| \leq e^x \left| \int_x^A e^{-t} f(t) dt \right| + e^x \left| \int_A^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right|$ par CHASLES et inégalité triangulaire. Alors, par inégalité de la moyenne, comme $\forall t \in [x; A], e^{-t} \leq e^{-x}$ et $\forall t \geq A, e^{-t} \leq e^{-A}$, on obtient $G(x) \leq \int_x^A |f(t)| dt + e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)| dt$. Or $[x; A] \subset]-\infty; A]$ et $|f|$ positive donc $0 \leq G(x) \leq \int_{-\infty}^A |f(t)| dt + e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)| dt$. Mais $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)| dt = 0$ donc il existe $B \leq A$ tel que $\forall x \leq B, e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, $\forall x \leq B, G(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$.
- Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} (G - |f|)$ converge avec ce qui précède donc, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ converge par hypothèse, on en déduit la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} G$ ce qui équivaut, puisque G est positive, à l'intégrabilité de G sur $\mathbb{R}$. Par théorème de comparaison, comme $0 \leq |F| \leq G$, la fonction F est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Par construction, $F + f = F'$ car F est solution de (E) donc, comme avant, F est une primitive de $F + f$. Or $F + f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par somme avec ce qui précède donc $\int_{-\infty}^{+\infty} (F + f) = [F]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$. Puisque $0 \leq |F| \leq G$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Par conséquent, $\int_{-\infty}^{+\infty} (F + f) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} F = - \int_{-\infty}^{+\infty} f$.