CHAPITRE 5
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PARTIE 5.1 : MODES DE CONVERGENCE

DÉFINITION 5.1 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$*. On dit que :*
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I *vers* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ *(sa* **limite simple***) si* $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$*.*
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I *vers* f *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ *(*$f_n - f$ *bornée si* n *assez grand).*
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout segment de** I *vers* f *si pour tout segment* $[a;b] \subset I$*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a;b]$ *(comme son nom l'indique).*

<u>REMARQUE 5.1</u> : • *Convergence simple :* $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$*.*
- *Convergence uniforme :* $\forall \varepsilon > 0$ *,* $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$*.*
- *Conv. unif. sur tout segment :* $\forall \varepsilon > 0,\ \forall [a;b] \subset I,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [a;b],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$*.*
- *CVS :* n_0 *dépend de* ε *et* x*. CVU :* n_0 *dépend de* ε *seulement. CVUTS :* n_0 *dépend de* ε *et de* a*,* b*.*
- *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I*, elle le fait sur tout partie* J *de* I*.*
- *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I*, elle le fait sur tout partie* J *de* I*.*
- *Pour* I *segment, les notions de convergence uniforme sur* I *et sur tout segment de* I *sont équivalentes.*

PROPOSITION 5.1 :
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVU vers** f **sur** $I \Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVU vers** f **sur TS de** $I \Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVS vers** f **sur** I**.**

DÉFINITION 5.2 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions, on dit que :*
- $\sum f_n$ **converge simplement sur** I *si* $\forall x \in I,\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *converge. On note* $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *sa somme.*
- $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I *si* $\left(S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *ou encore que* $\left(R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* I *(* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_\infty = 0$*).*
- $\sum f_n$ **converge uniformément sur tout segment de** I *si* $\forall [a;b] \subset I,\ \sum f_n$ *CVU sur* $[a;b]$*.*
- $\sum f_n$ **converge normalement sur** I *si* $\sum\limits_{n\geqslant n_0} ||f_n||_{\infty,I}$ *converge (*f_n *bornée pour* n *assez grand).*
- $\sum f_n$ **converge normalement sur tout segment de** I *si* $\forall [a;b] \subset I,\ \sum f_n$ *CVN sur* $[a;b]$*.*

<u>REMARQUE 5.2</u> : • *Si* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *CVS sur* I *alors* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CVS vers la fonction nulle sur* I*.*
- *Si* $\sum f_n$ *CVS (resp. CVU, CVN) sur* I *et si* $J \subset I$*, alors* $\sum f_n$ *CVS (resp. CVU, CVN) sur* J*.*
- *Si* $\sum f_n$ *CVN sur* I*, alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CVU vers la fonction nulle sur* I*.*
- *Si* $\sum f_n$ *CVN sur tout segment de* I *alors* $\forall x \in I,\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *CVA.*
- *S'il existe* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$ *avec* $\sum \alpha_n$ *CV, alors* $\sum f_n$ *CVN sur* I*.*

THÉORÈME 5.2 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions. À propos de convergence sur** I **:**

$\sum f_n$ **CVN** $\Longrightarrow \sum f_n$ **CVNTS** $\Longrightarrow \sum f_n$ **CVUTS** $\Longrightarrow \sum f_n$ **CVS et aussi**

$\sum f_n$ **CVN** $\Longrightarrow \sum f_n$ **CVU** $\Longrightarrow \sum f_n$ **CVUTS** $\Longrightarrow \sum f_n$**CVS.**

PARTIE 5.2 : CONTINUITÉ ET LIMITE

THÉORÈME 5.3 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions qui converge uniformément sur** I **(ou sur tout segment de** I**) vers la fonction** $f : I \to \mathbb{K}$**, alors :**

(i) Soit $a \in I$**, si pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **est continue en** a **alors** f **est continue en** a**.**

(ii) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **est continue sur** I **alors** f **est continue sur** I**.**

THÉORÈME ÉNORME 5.4 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions. On suppose que :**

(i) $\sum f_n$ **CVU (ou CVN ou CVUTS ou CVNTS) sur** I **vers** S**,**

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur** I**.**

Alors la somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ **est continue sur** I**.**

<u>REMARQUE 5.3</u> : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$*,* a *un réel adhérent à* I *(*$a = \pm\infty$ *est possible). On suppose :*

(H_1) *la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *(vers* f*),*

(H_2) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la fonction* f_n *admet une limite finie* ℓ_n *en* a*.*

Alors $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$ *i.e.* $\lim\limits_{x\to a}\Big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\Big)$.

THÉORÈME ÉNORME 5.5 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions et** a **un réel adhérent à** I **(**$a = \pm\infty$ **est possible) ; on suppose de plus avoir les deux hypothèses suivantes :**

(H_1) **la série de fonctions** $\sum f_n$ **converge uniformément (ou normalement) sur** I **vers** S**,**

(H_2) **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **admet une limite finie** ℓ_n **en** a**.**

Alors $\sum \ell_n$ **converge et** $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ **i.e.** $\lim\limits_{x\to a}\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\Big)$**.**

<u>REMARQUE 5.4</u> : Ce théorème de la double limite est faux (dans la remarque et le théorème précédents) si par exemple $a = \mathrm{Sup}(I) \notin I$ *et qu'on a juste convergence uniforme sur tout segment de* I *(ou convergence normale sur tout segment de* I *dans le cas des séries de fonctions).*

EN PRATIQUE : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *:*

- *On détermine la limite simple* f *de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *Pour montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f*, on calcule* $||f_n - f||_\infty$ *(étude de fonction) ou on cherche* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendant vers* 0 *telle que* $\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
- *Pour montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément sur* I*, on cherche une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ *telle que la suite* $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tende pas vers* 0.

Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *et la série de fonctions* $\sum f_n$ *:*

- *On étudie la convergence simple de* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *: ensemble de définition* D *de* $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$,
- *On étudie la convergence normale sur* D *(éventuellement sur tout segment de* D*).*
- *S'il n'y a pas convergence normale de la série, on essaie d'établir la convergence uniforme en étudiant* $||R_n||_\infty$ *et en la majorant.*
- *On cherche limite ou équivalent de* $S(x)$ *aux bornes par comparaison série-intégrale ou double limite.*

PARTIE 5.3 : INTÉGRATION ET DÉRIVATION

THÉORÈME ÉNORME 5.6 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**
(H_1) **La suite** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur le segment** $[a;b]$ **vers** f.
(H_2) **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$.
Alors f **est continue sur** $[a;b]$ **et** $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt$.

REMARQUE 5.5 : On peut généraliser ce théorème à un intervalle borné I *qui n'est pas un segment si on suppose les fonctions* f_n *intégrables sur* I.

THÉORÈME ÉNORME 5.7 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**
(H_1) **La série** $\sum f_n$ **converge uniformément sur le segment** $[a;b]$ **vers** S.
(H_2) **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$.
Alors S **est continue sur** $[a;b]$, $\displaystyle\sum\int_a^b f_n(t)dt$ **converge et** $\displaystyle\int_a^b S(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt$.

THÉORÈME 5.8 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**
(H_1) **La série** $\sum f_n$ **converge normalement sur le segment** $[a;b]$ **vers** S.
(H_2) **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$.
Alors en plus du th. 5.10, $\displaystyle\sum\int_a^b |f_n(t)|dt$ **CV et** $\displaystyle\int_a^b \big|S(t)\big|dt = \int_a^b \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big|dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b |f_n(t)|dt$.

THÉORÈME ÉNORME 5.9 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions telle que :**
(H_1) **la suite** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I **vers** f,
(H_2) **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est de classe** C^1 **sur** I,
(H_3) $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I **(ou unif. sur tout segment de** I**) vers** g.
Alors f **est de classe** C^1 **sur** I **et** $f' = g$**, ie** $\forall x \in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'_n(x)\right)$.

<u>*REMARQUE FONDAMENTALE 5.6*</u> *: Pour démontrer que la limite simple d'une suite de fonctions est de classe* C^∞*, on peut utiliser une récurrence avec le théorème précédent :*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions, on suppose que :*

(H_1) *la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I *vers une fonction* f*,*

(H_2) *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*, la fonction* f_n *est de classe* C^∞ *sur* I*,*

(H_3) *pour tout* $k\in\mathbb{N}^*$*, la suite* $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *(ou uniformément sur tout segment de* I*) (vers* φ_k*).*

Alors f *est de classe* C^∞ *sur* I *et* $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ f^{(k)}=\varphi_k \Longleftrightarrow \forall x\in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n^{(k)}(x)\right)$.

THÉORÈME 5.10 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions,** $p\geqslant 2$**, si :**

(H_1) **toutes les fonctions** f_n **sont de classe** C^p **sur** I**,**

(H_2) **les suites** $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent simplement sur** I **(vers** φ_k**) pour** $k\in[\![0;p-1]\!]$**,**

(H_3) $\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I **(ou unif. sur tout segment de** I**) (vers** φ_p**).**

Alors on peut conclure (on admet que ces conditions suffisent) :

(R_1) $f=\varphi_0$ **est de classe** C^p **sur** I**.**

(R_2) $\forall k\in[\![0;p]\!], f^{(k)}=\varphi_k$**, c'est-à-dire :** $\forall k\in[\![0;p]\!],\ \forall x\in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n^{(k)}(x)\right)$**.**

THÉORÈME ÉNORME 5.11 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions telle que :**

(H_1) **la série** $\sum f_n$ **converge simplement sur** I **vers** S**,**

(H_2) **pour tout** $n\in\mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est de classe** C^1 **sur** I**,**

(H_3) $\sum f'_n$ **converge uniformément sur** I **(ou uniformément sur tout segment de** I**).**

Alors S **est de classe** C^1 **sur** I **et** $S'=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f'_n$ **ie** $\forall x\in I,\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(f'_n(x)\right)$**.**

<u>*REMARQUE FONDAMENTALE 5.7*</u> *: Encore une récurrence pour la classe* C^∞ *:*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions, on suppose que :*

(H_1) *la série* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I*,*

(H_2) *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*, la fonction* f_n *est de classe* C^∞ *sur* I*,*

(H_3) $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\sum f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur* I *(ou unif. sur tout segment de* I*).*

Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* C^∞ *sur* I *et* $\forall x\in I,\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$.

THÉORÈME 5.12 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions,** $p\geqslant 2$**, si :**

(H_1) **pour tout** $n\in\mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est de classe** C^p **sur** I**,**

(H_2) **les séries** $\sum f_n^{(k)}$ **convergent simplement sur** I **pour** $k\in[\![0;p-1]\!]$**,**

(H_3) $\sum f_n^{(p)}$ **converge uniformément sur** I **(ou uniformément sur tout segment de** I**).**

Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ **est de classe** C^p **sur** I **et** $\forall x\in I,\ \forall k\in[\![1;p]\!],\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$**.**

<u>*REMARQUE 5.8*</u> *: Pour les deux dernières remarques, on peut a fortiori avoir les mêmes conclusions en remplaçant la convergence uniforme (ou uniforme sur tout segment) par la convergence normale (ou normale sur tout segment).*