

# TD 07 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2023-2024

vendredi 13 octobre 2023

## 7.1 OdIT 2012/2013 Centrale PSI planche 110I

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies respectives  $n$  et  $p$  avec  $n > p$ .

On considère  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, E)$ .

- a. Si  $u \circ v = \text{id}_F$ , montrer que  $v \circ u$  est un projecteur. Déterminer son rang, son image et son noyau.
- b. Réciproquement, si  $v \circ u$  est un projecteur de rang  $p$ , montrer que  $u \circ v = \text{id}_F$ .

## 7.2 Mines PSI 2013 Jordan Diby

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  telle que  $A \neq 0$  et  $A^3 = 0$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ou à  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

## 7.3 Mines PSI 2015 Gaël Pérez

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $a_{i,j} = 0$  sauf si  $|i - j| = 1$  et alors  $a_{i,j} = 1$ .

On pose  $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ .

- a. Montrer que :  $\forall n \geq 3$ ,  $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ . Calculer  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$ .
- b. Pour  $x \in ]-2; 2[$ , on pose  $x = 2 \cos(\alpha)$  avec  $\alpha \in ]0; \pi[$ . Montrer que  $P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$ .
- c. En déduire les racines de  $P_n$  et le factoriser.

## 7.4 E3A PSI 2015 Bastien Chevallier

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^3 = \text{id}_E$ .

- a. Montrer que  $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$ .
- b. Est-ce qu'on a  $E = \text{Im}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_E)$  ?
- c. Est-ce que ce résultat est toujours vrai en dimension infinie ?
- d. Montrer que  $\text{rang}(f - \text{id}_E)$  est pair.

Indication : montrer que  $f$  induit un endomorphisme  $u$  dans  $\text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$ .

## 7.5 Mines PSI 2017 Corentin Gatellier I

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et des réels  $x_1, \dots, x_n$  distincts deux à deux et  $y_1 < \dots < y_n$ .

Montrer que  $A = (e^{x_i y_j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible.

## 7.6 Mines PSI 2017 Maxime Pouvereau I

Soit  $n \geq 1$  et  $a = (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ . On définit la matrice  $A = (|a_i - a_j|)_{1 \leq i,j \leq n}$ .

Évaluer  $\det(A)$ . Indication : on pourra commencer par le cas où  $a_1 \leq \dots \leq a_n$ .

## 7.7 Mines PSI 2018 Erwan Dessailly I

Soit  $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

a. Si la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre, montrer que pour toute matrice  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe une famille  $(h_1, \dots, h_n) \in E^n$  telle que  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $m_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$ .

b. Supposons que  $\forall M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\exists (h_1, \dots, h_n) \in E^n$ ,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $m_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$ , peut-on conclure à la liberté de la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  ?

**7.8** Petites Mines PSI 2019 Elaia Mugica I

Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $S_d$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour lesquelles il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}_d[X]$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$ .

a. Montrer que si  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $S_d$ , le polynôme  $P$  ci-dessus est unique.

Si  $u \in S_d$ , on notera  $P_u$  l'unique polynôme  $P$  vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$ .

De plus, on définit  $\varphi : S_d \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$  par  $\varphi(u) = P_u$ .

b. Montrer que  $\varphi$  est linéaire.

c. Donner une base de son noyau. Quelle est son image ?

d. Déterminer la dimension de  $S_d$ .

**7.9** X PSI 2022 Olivier Courmont I

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A, B) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})^2$  tel que  $A^2 = B^2 = 0$  et  $\text{rang}(A) \geq n$  et  $\text{rang}(B) \geq n$ .

Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables.

**7.10** Centrale Maths1 PSI 2017 et 2022 Clément Maurel et Naïs Baubry

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  défini par  $u(P) = P'$ .

a. Trouver une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans laquelle la matrice de  $u$  ne contient que des 0 et des 1.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P - P' = Q$ .

c. Montrer que si  $Q$  ne prend que des valeurs positives sur  $\mathbb{R}$ , alors l'unique polynôme  $P$  de la question précédente a la même propriété.

d. Montrer que si  $P$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{R}[X]$  alors  $Q$  l'est également.

**7.11** Mines PSI 2021 et 2022 Yuan Le Guennic I et Louis Bardinet II

Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on se donne des fonctions  $f_1, \dots, f_n$  de  $E$ .

Pour une famille  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on définit la matrice  $A_x = (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

a. Montrer que si  $\det(A_x) \neq 0$ , alors la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre dans  $E$ .

b. Réciproquement, montrer par récurrence que si la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre dans  $E$ , alors il existe une famille de réels  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  telle que  $\det(A_x) \neq 0$ .

**7.12** Mines PSI 2022 Colin Herviou-Laborde II

Soit un entier  $n \geq 2$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

a. Montrer que si toute matrice  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  semblable à  $A$  vérifie  $b_{2,1} = 0$ , alors pour tout vecteur colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , la famille  $(AX, X)$  est liée. En déduire ce que vaut  $A$ .

b. Que dire de  $A$  si toute matrice  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  semblable à  $A$  est telle que  $b_{1,1} = 0$  ?

**7.13** Mines PSI 2022 Thibault Le Gal I

Soit  $E$  espace de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $P(f) = 0$ ,  $P(0) = 0$  et  $P'(0) \neq 0$ .

a. Montrer que si  $E$  est de dimension finie,  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires.

b. Qu'en est-il en dimension quelconque ?

**7.14** OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 108II abordable dès la 1<sup>ère</sup> année

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$  ; montrer que :  $(a_0 \neq 0) \Leftrightarrow (\forall Q \in \mathbb{K}[X], \exists ! P \in \mathbb{K}[X], \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = Q)$ .