PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 04

PSI 1 2023-2024

du lundi 09/10 au vendredi 13/10

1 Intégrales sur un segment : voir programme précédent

2 Comparaison locale des fonctions : notations de LANDAU, dév. limités : voir programme précédent

3 Intégrales convergentes et divergentes : voir programme précédent

4 Fonctions intégrables :

- si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, on dit que $\int_I f$ converge absolument si $\int_I |f|$ converge ;
- l'absolue convergence d'une intégrale implique sa convergence et inégalité triangulaire associée ;
- on dit que $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux est intégrable si $\int_I f$ est absolument convergente ;
- CHASLES généralisé, caractérisation avec limite d'une "primitive" de $|f|$ aux bornes de l'intervalle ;
- théorème de comparaison : par $\sim$, O , o , majoration, minoration ;
- exemples d'intégrales convergentes associées à des fonctions non intégrables ;
- exemples de fonctions équivalentes dont les intégrales associées ne sont pas de même nature ;
- espaces $L^1(I, \mathbb{K})$, $L^2(I, \mathbb{K})$, produit scalaire sur les fonctions continues, inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ;
- pratique de la comparaison série/intégrale : surtout le principe graphique général à utiliser pour toute fonction monotone pour l'obtention de convergences, de limites ou d'équivalents ;

5 Révisions d'algèbre linéaire :

- espaces et sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés ;
- somme de deux sous-espaces, somme directe, deux sous-espaces supplémentaires ;
- applications linéaires, noyau et image, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité ;
- projecteurs et symétries : passage de l'algébrique au géométrique ;
- famille libre, génératrice, base, propriétés de ces familles ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir ce qu'est une fonction continue par morceaux sur un intervalle (déf. 3.3 et 3.4)
- 2 définir la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ si $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux (déf. 3.10)
- 3 énoncer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ sur les intégrales (prop. 3.2, th. 3.3, prop. 3.34)
- 4 énoncer la formule de TAYLOR reste intégral (th. 3.10)
- 5 énoncer le théorème de changement de variable sur des intervalles ouverts (th. 3.26)
- 6 énoncer le théorème d'intégration par parties sur des intervalles ouverts (th. 3.27)
- 7 énoncer le théorème de comparaison concernant l'intégrabilité (th. 3.30)
- 8 prouver que pour f continue sur I , $u, v : J \rightarrow I$ dérivables, $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable (prop. 3.7)
- 9 prouver que si f est continue sur $]a; b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^b f(t)dt = 0$ (prop. 3.19)
- 10 prouver que si $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 0$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iat}}{t^\alpha} dt$ converge (exem. 3.36)
- 11 prouver que si f et g sont de carré intégrable sur I , alors fg est intégrable sur I (prop. 3.34)

Prévision pour la prochaine semaine : révisions d'algèbre linéaire.