PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 06

PSI 1 2023-2024 **du lundi 06/11 au vendredi 10/11**

1 Révisions d'algèbre linéaire :

- espaces et sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés ;
- somme de deux sous-espaces, somme directe, sous-espaces supplémentaires ;
- applications linéaires, noyau et image, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité ;
- projecteurs et symétries : passage de l'algébrique au géométrique ;
- famille libre, génératrice, base, propriétés de ces familles ;
- sous-espace stables par un endomorphismes et endomorphismes induits ;
- théorème du rang (isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image) ;
- application donnée par ses restrictions à des sous-espaces en somme directe ;
- familles libres, génératrices, liées, bases éventuellement infinies (hors programme néanmoins) ;
- définition des hyperplans (prog. en dimension finie) : supplémentaire droite ou dimension $\mathsf{dim}(E) - 1$;
- les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles ;
- les hyperplans n'ont qu'une seule équation à un coefficient multiplicatif près ;
- calcul matriciel : somme, produit, espace vectoriel, anneau, matrices élémentaires, dimension ;
- transposée, matrices symétriques, antisymétriques, diagonales, triangulaires, trace ;
- inverses de matrices, calcul de puissances, matrices de GAUSS ;
- représentations matricielles : famille, matrice d'application linéaire, d'endomorphisme ;
- isomorphisme matrice-applications linéaires, relation avec le produit, l'inverse ;
- matriciellement : image d'un vecteur, changement de bases, matrices de passage entre bases ;
- changement de bases pour une application linéaire, matrices équivalentes, matrices semblables ;
- déterminant des matrices carrées, relations associées, $\mathsf{det}(A) = \mathsf{det}({}^tA)$;
- déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base, caractérisation des bases ;
- déterminant des endomorphismes, relations associées, caractérisation des automorphismes ;
- développement par rapport à une rangée ;
- matrices des opérations de GAUSS, conservation du déterminant par transvection, algorithme ;
- déterminant de VANDERMONDE, orientation d'un espace de dimension finie ;

2 Algèbre linéaire : ce qui est nouveau !

- espaces produits de plusieurs espaces : définition et dimension ;
- somme de plusieurs sous-espaces vectoriels dans un espace ;
- somme directe de plusieurs sous-espaces et caractérisations ; projecteurs associés ;
- caractérisation de sous-espaces en somme directe sur les dimensions ;
- produit matriciel par blocs et stabilité ;
- stabilité des noyaux et images si les endomorphismes commutent ;
- déterminant des matrices diagonales ou triangulaires par blocs ;
- trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme, trace d'un projecteur ;

QUESTIONS DE COURS :

1. définir ce qu'est une somme directe de plusieurs sous-espaces (déf. 4.41)
2. énoncer le théorème du rang (th. 4.13)
3. énoncer la caractérisation d'une somme directe par les dimensions en dimension finie (th. 4.75)
4. énoncer le lien entre stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme f et existence d'une base adaptée dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure par blocs (prop. 4.78)
5. prouver que $\mathsf{Ker}(f) \cap \mathsf{Ker}(g) \subset \mathsf{Ker}(f+g)$ et $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ (rem. 4.20)
6. prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et donner les dimensions et bases de chaque sev (prop. 4.39)
7. prouver que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathsf{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v (prop. 4.80)

Prévision pour la prochaine semaine : toute l'algèbre linéaire et le début des séries de fonctions.