TD 11 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2023-2024 **vendredi 24 novembre 2023**

11.1 *Centrale PSI 2014* Thibault

On pose $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de S.

b. Montrer que S est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$. Justifier que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Trouver un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

d. Montrer que $S(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

11.2 *Mines PSI 2014* Mathias

Calculer $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta} - i\theta} d\theta$.

11.3 *Mines PSI 2018* Erwan Dessailly II

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est continue sur D.

b. Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner $f'(x)$ sous forme d'une somme d'une série.

c. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et, plus précisément, trouver un équivalent de $f(x) - \ell$ quand x tend vers $+\infty$.

11.4 *Mines PSI 2018* Thibaud Vendrely I

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n - 1}}{1 + x^{2^n}}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Donner une expression plus simple de $\prod_{n=0}^{N} (1 + x^{2^n})$.

c. En déduire une expression de $f(x)$.

11.5 *Petites Mines PSI 2019* Elaia Mugica II

Soit $I = \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \frac{x - 1}{(n+1)(n+x)}$. En cas de convergence, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Montrer que S est de classe C^1 sur I et calculer S'.

b. Calculer $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}$ et en déduire la valeur de $S(p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

c. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

11.6 *Centrale Maths1 PSI 2022* Manon Odelot

Soit $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n(1 + n^2 |x|)}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Étudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.

Questions de cours : donner la formule de Taylor reste intégral et le théorème des valeurs intermédiaires.

11.7 *Mines PSI 2022* Paul Mayé I

En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c. Trouver un équivalent de $f'(x)$, puis de $f(x)$, quand x tend vers 0^+.

d. Quelles sont les variations de f ?

e. Trouver les limites de f en $\pm\infty$.

f. Tracer la courbe représentative de f.

11.8 *CCINP PSI 2022* Paul Lafon I

Soit $a \in \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1 - e^{-nx}}{x^a(1 + nx)}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a. Si $a \in [0;1]$, montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers une fonction f à déterminer.

b. Pour quelles valeurs de a a-t-on convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0;1]$?

c. Soit $a \in [0;1]$, montrer que l'intégrale I_n existe.

d. Soit $a \in [0;1[$, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

e. Étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $a = 1$.

11.9 *CCINP PSI 2022* Élouan Princelle I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. Déterminer les valeurs de α telles que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})dx$.

d. Peut-on intervertir les symboles "intégrale" et "limite" comme ci-dessus si $\alpha = \frac{3}{2}$?

11.10 *CCINP PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche I

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.