CHAPITRE 5
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

⊙ On a déjà constaté que les réels (et les complexes aussi) peuvent s'écrire comme limites de suites de réels ou comme somme de séries numériques réelles. Il est donc naturel d'étudier la représentation de certaines fonctions comme limite de suites de fonctions ou comme somme d'un série de fonctions. Une question fondamentale est alors l'étude des propriétés de ces fonctions limites ou de ces fonctions sommes en fonctions des propriétés de fonctions composant la suite ou la série : parité, périodicité, continuité, existence de limites, dérivabilité, intégrabilité, etc...

Tous ces problèmes ont commencé à être posés au début du XIX^{e} siècle, avec l'introduction des séries entières et des séries trigonométriques. Mais ce n'est qu'avec l'introduction de la notion de convergence uniforme que des réponses définitives ont pu être apportées.

On se sert des séries entières (ou séries de Taylor) en analyse réelle ou même en analyse complexe avec les fonctions holomorphes, en combinatoire ou en probabilités, des séries de Dirichlet et des séries de Riemann en arithmétique, des séries de Fourier en analyse harmonique ou en théorie du signal : le champ d'investigation et d'application des séries de fonctions est extrêmement vaste !

TABLE DES MATIÈRES

⊙ Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts.
Si f est une fonction bornée sur I, on note $||f||_\infty$ sa norme infinie définie par $||f||_\infty = \underset{x\in I}{\text{Sup}}\,|f(x)|$.
S'il y a ambiguïté sur l'ensemble de départ de f, on notera plus précisément $||f||_{\infty,I} = \underset{x\in I}{\text{Sup}}\,|f(x)|$.

PROGRAMME

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1 : Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Utilisation d'une majoration uniforme de $\lvert f_n(x)\rvert$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

2 : Régularité de la limite d'une suite de fonctions

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<u>Continuité de la limite d'une suite de fonctions</u> : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
<u>Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions</u> : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors $$\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$	
<u>Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions</u> : si une suite (f_n) de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, et si la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g, alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$. Extension aux suites de fonctions de classe C^k, sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j < k$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

3 : Régularité de la somme d'une série de fonctions

Contenus	Capacités & Commentaires
<u>Continuité de la somme d'une série de fonctions</u> : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, alors sa somme est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
<u>Théorème de la double limite</u> : si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$	La démonstration est hors programme.
<u>Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment</u> : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$	
<u>Dérivation de la somme d'une série de fonctions</u> : si une série $\sum f_n$ de classe C^1 converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I et sa dérivée est $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. Extension à la classe C^k sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

PARTIE 5.1 : MODES DE CONVERGENCE

5.1.1 : Convergence des suites de fonctions

DÉFINITION 5.1 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I *vers* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ *si* $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
La fonction $f : I \to \mathbb{K}$ *est alors appelée la* **limite simple** *de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXEMPLE 5.1 **:** La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n : x \mapsto \sin(x)^n$ converge simplement sur $[0;\pi]$.

REMARQUE 5.1 : • *Cela signifie donc* $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$.
- *Ou encore que* $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.
- *Si* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *converge simplement vers* f *sur* I, *alors elle le fait aussi sur* J *si* $J \subset I$.
- *Si les fonctions* f_n *sont toutes positives (resp. négatives, croissantes, décroissantes, paires, impaires,* T*-périodiques) et que* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *converge simplement vers* f *sur* I, *alors la fonction* f *est aussi positive (resp. négative, croissante, décroissante, paire, impaire,* T*-périodique).*

DÉFINITION 5.2 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I *vers* f *si les* $(f_n - f)$ *sont bornées sur* I *à partir d'un certain rang et si* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,I} = 0$.

EXEMPLE 5.2 **:** Soit $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = x^n \ln(x)$. Étudier la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

REMARQUE 5.2 : • *Si* g *est bornée sur* I *et* $J \subset I$, *alors* g *est bornée sur* J *et* $||g||_{\infty,J} \leqslant ||g||_{\infty,I}$.
- *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I, *elle le fait sur tout partie* J *de* I.
- *Cela signifie :* $\forall \varepsilon > 0\ , \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
- *Contrairement à la convergence simple : l'entier* n_0 *ne dépend que de* ε *et est indépendant de* $x \in I$.

DÉFINITION 5.3 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$. *On dit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout segment de** I *vers* f *si pour tout segment* $[a;b] \subset I$ *les* $(f_n - f)$ *sont bornées sur* $[a;b]$ *à partir d'un certain rang et si* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} = 0$ *où* $||f_n - f||_{\infty,[a;b]} = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f(x)|$.

PROPOSITION : IMPLICATIONS ENTRE LES DIFFÉRENTES CONVERGENCES 5.1 :
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVU sur** I **vers** $f \Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVUTS de** I **vers** $f \Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVS vers** f **sur** I.

EXERCICE 5.3 **:** Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right)$ si $x \neq 0$. Étudier la convergence simple, uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

REMARQUE 5.3 : • *On a donc* $\forall \varepsilon > 0,\ \forall [a;b] \subset I,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [a;b],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ *si* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur tout segment de* I. *L'entier* n_0 *ne dépend que de* ε, a *et* b.

• *Pour* I *segment, les notions de convergence uniforme sur* I *et sur tout segment de* I *sont équivalentes.*

EXERCICE 5.4 : Modes de convergence de $(f_n)_{n \geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}$ si $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

5.1.2 : Convergence des séries de fonctions

DÉFINITION 5.4 :
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions, on dit que la série de fonctions* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ **converge simplement sur** I *si* $\forall x \in I,\ \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ *est convergente. Dans ce cas, on définit sa* **somme** S *par* $\forall x \in I,\ S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}$, *son* **reste d'ordre** n *par* $\forall x \in I,\ R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

REMARQUE 5.4 : • *Si* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ *converge simplement sur* I *alors* $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *y converge simplement vers* 0.

• *Si les* f_n *sont toutes croissantes (resp. décroissantes, paires, impaires,* T*-périodiques) et que* $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ *converge simplement vers* S *sur* I, *alors* S *l'est aussi.*

DÉFINITION 5.5 :
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$.

- *On dit que la série de fonctions* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ **converge uniformément sur** I *si* $\left(S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *; cela signifie que la série* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ *converge simplement sur* I *et la suite de fonctions* $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* I *(* $\lim\limits_{n \to +\infty} ||R_n||_\infty = 0$*).*
- *On dit que la série de fonctions* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ **converge uniformément sur tout segment de** I *si* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment de* I, *c'est-à-dire si* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ *converge simplement sur* I *et* $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur tout segment de* I.

EXEMPLE 5.5 : Si $f_n(x) = x^n$, la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $]-1;1[$ vers $S : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1;1[$, mais pas sur $]-1;1[$.

DÉFINITION 5.6 :
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions bornées de* I *dans* $\mathbb{K}$.

- *On dit que la série de fonctions* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ **converge normalement sur** I *si* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} ||f_n||_{\infty, I}$ *converge.*
- *On dit que la série de fonctions* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ **converge normalement sur tout segment de** I *si, pour tout segment* $[a;b] \subset I$, *la série* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} ||f_n||_{\infty,[a;b]}$ *converge.*

REMARQUE 5.5 : • *Si* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge normalement sur un intervalle* I *et si* J *est un intervalle tel que* $J \subset I$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge aussi normalement sur* J *car* $\forall n \in \mathbb{N},\ ||f_n||_{\infty,J} \leqslant ||f_n||_{\infty,I}$.

• *Une condition nécessaire pour que la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge normalement sur* I *est donc que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers la fonction nulle sur* I.

THÉORÈME : IMPLICATIONS ENTRE LES DIFFÉRENTES CONVERGENCES 5.2 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions.**

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge normalement sur } I & \Longrightarrow & \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge normalement sur tout segment de } I \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge uniformément sur } I & \Longrightarrow & \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \\
 & & \Downarrow \\
 & & \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge simplement sur } I
\end{array}$$

EXEMPLE 5.6 : Si $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arccos}\big(\cos(nx)\big)}{n!}$ alors $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.
Quelles propriétés élémentaires de la fonction f peut-on déduire de la convergence simple ?

REMARQUE 5.6 :

• *Si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge normalement sur tout segment de* I *alors pour tout* $x \in I$, *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *est absolument convergente, c'est-à-dire que la série de fonctions* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ *converge simplement sur* I.

• *Pour montrer que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge normalement sur* I, *il suffit de trouver une suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$ *et telle que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ *est une série convergente.*

EXERCICE 5.7 : Si $g_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{n}$, étudier les divers types de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} g_n$.

PARTIE 5.2 : CONTINUITÉ ET LIMITE DES SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

5.2.1 : Continuité

THÉORÈME DE CONTINUITÉ D'UNE LIMITE DE SUITE DE FONCTIONS CONTINUES PAR CONVERGENCE UNIFORME (ÉNORME) 5.3 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions qui converge uniformément sur** I **(ou sur tout segment de** I**) vers la fonction** $f : I \to \mathbb{K}$**, alors :**

(i) Soit $a \in I$**, si pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **est continue en** a **alors** f **est continue en** a**.**

(ii) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **est continue sur** I **alors** f **est continue sur** I**.**

EXEMPLE 5.8 **:** Que dire de la convergence sur $[0;\pi]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $f_n(x)=\sin(x)^n$?

THÉORÈME DE CONTINUITÉ D'UNE SOMME DE SÉRIE DE FONCTIONS CONTINUES PAR CONVERGENCE UNIFORME OU NORMALE (ÉNORME) 5.4 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions ; on suppose que :

(i) la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur I (ou sur tout segment de I) vers S,

(ii) pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I,

alors la somme $S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ de la série de fonctions est continue sur I.

EXEMPLE 5.9 **:** Que dire de la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$ si $f_n : x\mapsto (1-x)x^n$?

EXEMPLE FONDAMENTAL 5.10 **:** Montrer que la fonction ζ de RIEMANN définie sur $]1;+\infty[$ par $\forall x>1,\ \zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1;+\infty[$ ainsi que θ sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\forall x>0,\ \theta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

5.2.2 : Double limite

REMARQUE HP 5.7 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et a un réel adhérent à I ($a=\pm\infty$ est possible) ; on suppose de plus les deux hypothèses suivantes :

(H_1) *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (vers f),*

(H_2) *pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a,*

alors on a les résultats suivants :

(R_1) *La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

(R_2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ell_n$ *ce qui s'écrit aussi* $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$.

REMARQUE 5.8 : C'est faux si $a=\mathrm{Sup}(I)\notin I$ et qu'on a convergence uniforme sur tout segment de I.

EXEMPLE 5.11 **:** Soit $f_n : x\to \mathrm{th}\left(\dfrac{x}{n}\right)$. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

THÉORÈME DE DOUBLE LIMITE POUR LES SÉRIES (ÉNORME) 5.5 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et a un réel adhérent à I ($a=\pm\infty$ est possible) ; on suppose de plus avoir les deux hypothèses suivantes :

(H_1) **la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur I vers S,**

(H_2) **pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a.**

alors on a les résultats suivants :

(R_1) **La série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\ell_n$ converge.**

(R_2) $\lim\limits_{x\to a} S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ell_n$ **ce qui s'écrit aussi** $\lim\limits_{x\to a}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$

DÉMONSTRATION : Hors programme.

EXEMPLE FONDAMENTAL 5.12 **:** Que valent $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)$?

5.2.3 : Exemples d'étude

EN PRATIQUE : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *:*

- *On détermine la limite simple* f *de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *Pour montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f*, on calcule* $||f_n - f||_\infty$ *(étude de fonction) ou on cherche* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendant vers* 0 *telle que* $\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
- *Pour montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément sur* I*, on cherche une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ *telle que la suite* $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tende pas vers* 0.

ORAL BLANC 5.13 ***:*** On pose $f_n(x) = x^{2^n} - x^{2^{n+1}}$ pour $x \in [0;1[$ pour $n \geqslant 1$.
Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

EN PRATIQUE : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *et la série de fonctions* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *:*

- *On étudie la convergence simple de* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *: ensemble de définition* D *de* $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$,
- *On étudie la convergence normale sur* D *(éventuellement sur tout segment de* D*).*
- *S'il n'y a pas convergence normale, on essaie d'établir la convergence uniforme en étudiant* $||R_n||_\infty$.
- *On cherche des limites ou des équivalents de* $S(x)$ *aux bornes par comparaison série-intégrale ou théorème de la double limite.*

EXERCICE CLASSIQUE 5.14 ***:*** On pose $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \geqslant 1$.
Étudier la convergence simple, normale et uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

PARTIE 5.3 : INTÉGRATION ET DÉRIVATION DES SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

5.3.1 : Intégration

THÉORÈME D'INTERVERSION LIMITE/INTÉGRALE SUR UN SEGMENT PAR CONVERGENCE UNIFORME 5.6 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**

(H_1) **La suite** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur le segment** $[a;b]$ **vers** f.

(H_2) **Pour tout** $n\in\mathbb{N}$, **la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$.

Alors on a les résultats suivants :

(R_1) f **est continue sur le segment** $[a;b]$ **(on le savait déjà).**

(R_2) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\Big(\int_a^b f_n(t)dt\Big) = \int_a^b \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\Big)dt.$

EXEMPLE 5.15 *:* Soit f_n définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x\in\big[0;\frac{1}{n}\big]$ et $f_n(x)=0$ sinon.

Limite simple de $(f_n)_{n\geqslant 1}$? Convergence uniforme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0;1]$? Sur $[a;1]$ avec $a\in]0;1[$?

REMARQUE 5.9 : On peut généraliser ce théorème à un intervalle borné I *qui n'est pas un segment si on suppose les fonctions* f_n *intégrables sur* I.

THÉORÈME D'INTÉGRATION TERME À TERME SUR UN SEGMENT PAR CONVERGENCE UNIFORME 5.7 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**

(H_1) **La série** $\sum f_n$ **converge uniformément sur le segment** $[a;b]$ **vers** S.

(H_2) **Pour tout** $n\in\mathbb{N}$, **la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$.

Alors on a les trois conclusions suivantes :

(R_1) S **est continue sur le segment** $[a;b]$ **(on le savait déjà).**

(R_2) **La série numérique** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_a^b f_n(t)dt$ **converge.**

(R_3) $\displaystyle\int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_a^b f_n(t)dt\Big) = \int_a^b\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)dt.$

PROPOSITION D'INTÉGRATION TERME À TERME SUR UN SEGMENT PAR CONVERGENCE NORMALE 5.8 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**

(H_1) **La série** $\sum f_n$ **converge normalement sur le segment** $[a;b]$ **vers** S.

(H_2) **Pour tout** $n\in\mathbb{N}$, **la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$.

Alors en plus des trois renseignements du théorème précédent, on a :

(R_1) **La série** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_a^b |f_n(t)|dt$ **converge.**

(R_2) $\displaystyle\int_a^b |S(t)|dt = \int_a^b \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big|dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b |f_n(t)|dt.$

ORAL BLANC 5.16 *:* Soit $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. En distinguant selon que $|a| < 1$ ou $|a| > 1$ et en utilisant les séries géométriques, calculer $\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt$.

5.3.2 : Dérivation

THÉORÈME D'INTERVERSION LIMITE/DÉRIVÉE (ÉNORME) 5.9 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**

- (H_1) **la suite** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I **vers** f,
- (H_2) **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, **la fonction** f_n **est de classe** C^1 **sur** I,
- (H_3) $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I **(ou unif. sur tout segment de** I**) vers** g.

Alors on peut conclure :

- (R_1) f **est de classe** C^1 **sur** I.
- (R_2) $f' = g$, **c'est-à-dire que** $\forall x \in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(f'_n(x)\right)$.

REMARQUE 5.10 : • D'après la preuve, il suffit ci-dessus qu'il existe $x_0 \in I$ *tel que* $\left(f_n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

- *Sous les hypothèses de ce théorème, on a prouvé également que la convergence de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniforme sur tout segment de* I *vers* f. *Mais elle n'est pas forcément uniforme sur* I.
- *Sous les hypothèses de ce théorème, et si on suppose de plus que* I *est borné, on a vu dans la preuve du théorème que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeait uniformément vers* f *sur* I.

EXEMPLE 5.17 *:* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{n^2}{x^2 + n^2}$. Étudier les modes de convergence des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers leurs limites.

REMARQUE FONDAMENTALE 5.11 : Pour démontrer que la limite simple d'une suite de fonctions est de classe C^∞*, on peut utiliser une récurrence avec le théorème précédent :*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions, on suppose que :*

- (H_1) *la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I *vers une fonction* f,
- (H_2) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est de classe* C^∞ *sur* I,
- (H_3) *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *la suite* $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *(ou uniformément sur tout segment de* I*) (vers* φ_k*).*

Alors f *est de classe* C^∞ *sur* I *et* $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)} = \varphi_k \Longleftrightarrow \forall x \in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(f_n^{(k)}(x)\right)$.

⊙ Mais si on veut juste prouver que f est de classe C^p sur I pour $p \geqslant 2$, on admet :

PROPOSITION DE DÉRIVÉES SUCCESSIVES POUR LES SUITES 5.10 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions,** $p \geqslant 2$, **si :**

- (H_1) **toutes les fonctions** f_n **sont de classe** C^p **sur** I,
- (H_2) **les suites** $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent simplement sur** I **(vers** φ_k**) pour** $k \in [\![0; p-1]\!]$,
- (H_3) $\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I **(ou unif. sur tout segment de** I**) (vers** φ_p**).**

Alors on peut conclure :

- (R_1) $f = \varphi_0$ **est de classe** C^p **sur** I.
- (R_2) $\forall k \in [\![0; p]\!], f^{(k)} = \varphi_k$, **c'est-à-dire :** $\forall k \in [\![0; p]\!],\ \forall x \in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(f_n^{(k)}(x)\right)$.

THÉORÈME DE DÉRIVATION TERME À TERME (ÉNORME) 5.11 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, on suppose que :

(H_1) **la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I vers S,**

(H_2) **pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I,**

(H_3) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f'_n$ **CVU (ou CVN) sur I (ou CVU (ou CVN) sur tout segment de I).**

Alors on peut conclure :

(R_1) S **est de classe C^1 sur I.**

(R_2) $S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f'_n$**, c'est-à-dire que** $\forall x \in I,\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(f'_n(x)\Big)$.

REMARQUE 5.12 : Il sera souvent plus simple de montrer que la convergence de la série des dérivées est normale sur I (ou même normale sur tout segment de I) pour arriver au résultat du théorème précédent.

ORAL BLANC 5.18 : Montrer que : $\forall x \in [-1;1],\ \mathrm{Arctan}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 5.13 : Encore une récurrence pour la classe C^∞ :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, on suppose que :

(H_1) *la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I,*

(H_2) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur I,*

(H_3) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur I (ou unif. sur tout segment de I).*

Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur I et $\forall x \in I,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$.

REMARQUE 5.14 : Là encore, on pourra obtenir le résultat par convergence normale.

EXEMPLE FONDAMENTAL 5.19 : Montrer que $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.

⊙ Mais on a l'équivalent du résultat vu sur les suites de fonctions :

PROPOSITION DE DÉRIVÉES SUCCESSIVES POUR LES SÉRIES 5.12 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $p \geqslant 2$, si :

(H_1) **pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^p sur I,**

(H_2) **les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ convergent simplement sur I pour $k \in [\![0;p-1]\!]$,**

(H_3) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(p)}$ **converge uniformément sur I (ou uniformément sur tout segment de I).**

Alors on peut conclure :

(R_1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ **est de classe C^p sur I.**

(R_2) $\forall x \in I,\ \forall k \in [\![1;p]\!],\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$.

ORAL BLANC 5.20 :

On pose, pour $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$. On rappelle que : $\forall a \in \mathbb{R},\ e^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$.

a. Montrer que S est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier sa monotonie.

b. Établir : $\forall x > 0,\ xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

c. Trouver aussi un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

COMPÉTENCES

- Déterminer le domaine de définition de la limite simple d'une suite de fonctions.
- Savoir étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions selon les intervalles.
- Déterminer le domaine de définition de la somme d'une série de fonctions.
- Savoir étudier la convergence uniforme d'une série de fonctions selon les intervalles.
- Savoir étudier la convergence normale d'une série de fonctions selon les intervalles..
- Montrer la continuité d'une limite simple de suite de fonctions par convergence uniforme.
- Montrer la continuité d'une somme de série de fonctions par convergence uniforme ou normale.
- Trouver par théorème de la double limite la limite d'une limite simple de suite de fonctions en $\pm\infty$.
- Trouver par théorème de la double limite la limite d'une somme de série de fonctions en $\pm\infty$.
- Trouver une limite d'intégrales par convergence uniforme sur un segment.
- Reconnaître une "intégration terme à terme" par convergence uniforme ou normale sur un segment.
- Maîtriser la dérivation d'une limite de suite de fonctions par convergence uniforme des dérivées.
- Maîtriser la dérivation d'une somme de série de fonctions par convergence normale des dérivées.
- Généralisation à l'aspect C^∞ des limites de suites de fonctions ou des sommes de séries de fonctions.