

DM 05 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2023/2024

pour le vendredi 24 novembre 2023

Soit dans tout le sujet un réel strictement positif α .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}.$$

Là où c'est possible, on définit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

En cas de convergence, on note

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha(1+u)}.$$

1 Modes de convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$

1.1 Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . Que dire de S ?

1.2 Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur \mathbb{R} si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

1.3 Soit deux réels a et b tels que $0 < a < b$. Prouver que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[a; b]$.

Y-a-t-il convergence normale de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur \mathbb{R}_+^* ?

1.4 On suppose dans cette question que $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, établir $|R_n(x)| \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{|x|}{\sqrt{2k}(1+kx^2)}$.

En déduire, si $a > 0$, que $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge uniformément ni sur $[0; a]$, ni sur $[-a; a]$, ni sur \mathbb{R} .

2 Continuité et limites de S

2.1 Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, S est continue sur \mathbb{R}^* .

2.2 Déterminer la limite et un équivalent de S en $\pm\infty$.

2.3 Montrer que, si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors S est continue sur \mathbb{R} .

2.4 Soit dans cette question $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Si $p \in \mathbb{N}^*$, minorer $\sum_{n=1}^p u_n\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$. La fonction S est-elle continue en 0 ?

2.5 Soit dans cette question $\alpha < \frac{1}{2}$. Soit $x \in]0; 1[$, déterminer l'unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{p+1}} < x \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x)$?

3 Dérivabilité de S

3.1 Établir que $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur \mathbb{R} si et seulement si $\alpha > 1$.

3.2 Montrer que S est de classe C^1 sur \mathbb{R} si $\alpha > 1$.

3.3 Justifier que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* si $\alpha \in]0; 1[$.

3.4 Pour $\alpha \in]0; 1[$, montrer que S n'est pas dérivable en 0.

4 Équivalent en 0

4.1 Déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0 si $\alpha > 1$.

4.2 Si $0 < \alpha \leq 1$, pour un réel $x > 0$, on définit $f_x : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f_x(t) = \frac{x}{t^\alpha (1 + tx^2)}$.

Montrer que f_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ et justifier que $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} f_x(t) dt$.

4.3 Si $\alpha = \frac{1}{2}$, déterminer la valeur exacte de $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x)$.

4.4 Si $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+ .

4.5 Justifier l'existence de I_α pour $\alpha \in]0; 1[$. Si $0 < \alpha < 1$, montrer que $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} I_\alpha x^{2\alpha-1}$.

On admet que $\forall \alpha \in]0; 1[$, $\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} + t^{-\alpha}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

4.6 En déduire, toujours si $0 < \alpha < 1$, que $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} x^{2\alpha-1}$.